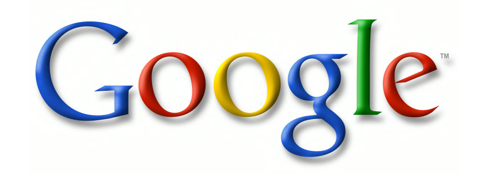
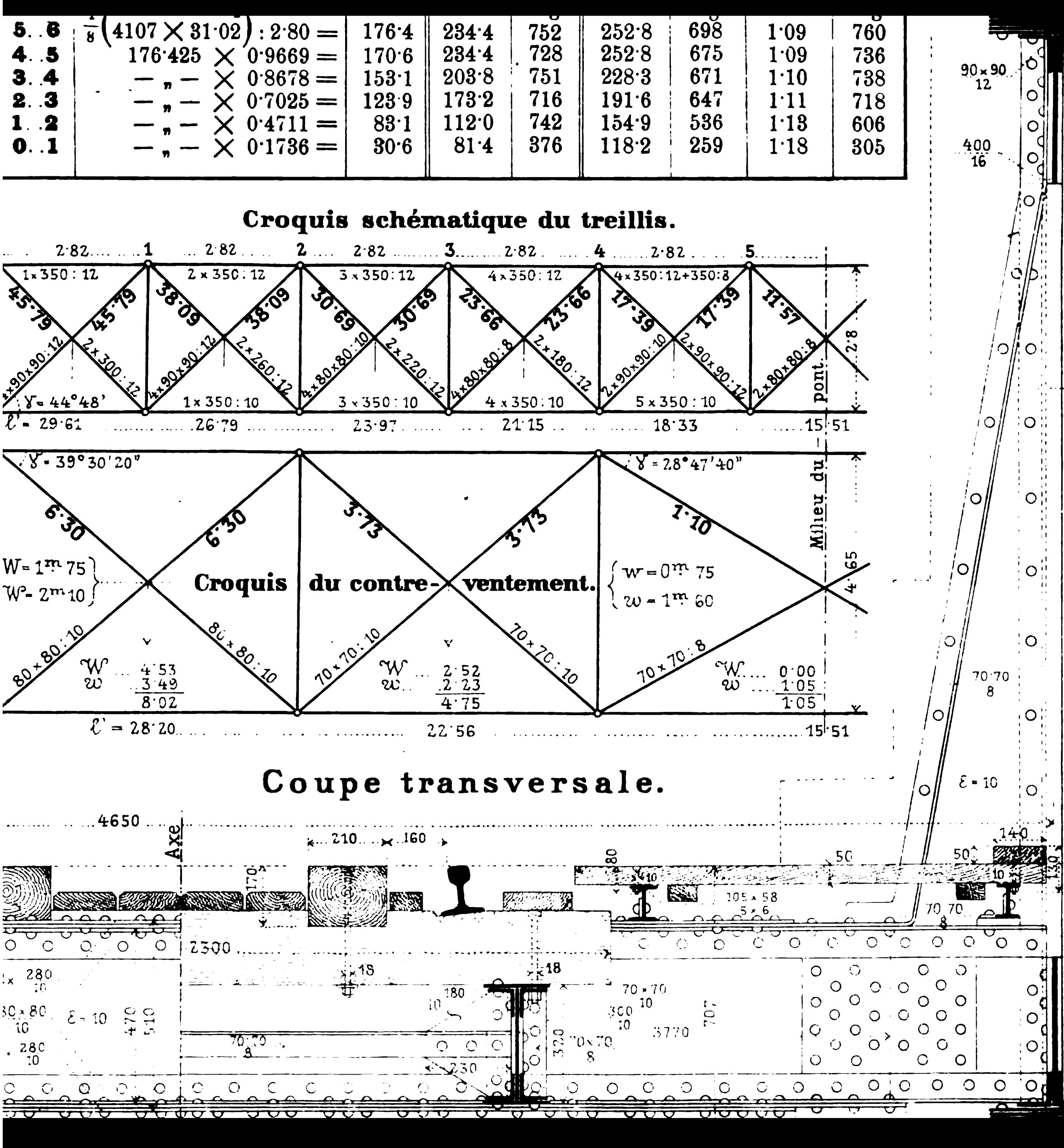




5..6	$\frac{1}{8}$(4107 × 31·02) : 2·80 =	176·4	234·4	752	252·8	698	1·09	760
4..5	176·425 × 0·9669 =	170·6	234·4	728	252·8	675	1·09	736
3..4	— „ — × 0·8678 =	153·1	203·8	751	228·3	671	1·10	738
2..3	— „ — × 0·7025 =	123·9	173·2	716	191·6	647	1·11	718
1..2	— „ — × 0·4711 =	83·1	112·0	742	154·9	536	1·13	606
0..1	— „ — × 0·1736 =	30·6	81·4	376	118·2	259	1·18	305

Calculs des ponts métalliques à une ou plusieurs travées

Maximilien Leber, Charles Bricka

CALCULS DES

PONTS MÉTALLIQUES

À UNE OU PLUSIEURS TRAVÉES.

CHARGES MOBILES ET APPLICATIONS PRATIQUES

D'APRÈS L'ORDONNANCE POUR LA CONSTRUCTION DES PONTS

DU MINISTÈRE I. R. DU COMMERCE DE L'EMPIRE D'AUTRICHE, EN DATE DU 15 SEPTEMBRE 1887

AVEC COMMENTAIRES À L'APPUI ET TABLES NUMÉRIQUES

PUBLIÉS PAR LE RAPPORTEUR

MAXIMILIEN DE LEBER

INSPECTEUR AU CORPS I. R. DU CONTRÔLE DES CHEMINS DE FER

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES DE PARIS.

ÉDITION FRANÇAISE.

AVEC UNE INTRODUCTION ET DES NOTES

PAR

CHARLES BRICKA

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES

INGÉNIEUR EN CHEF DE LA VOIE ET DES BÂTIMENTS AUX CHEMINS DE FER DE L'ÉTAT.

TOME I

EXPOSÉS THÉORIQUES ET APPLICATION À DES PONTS CONSTRUITS
AVEC GRAVURES SUR BOIS ET PLANCHES.

PARIS

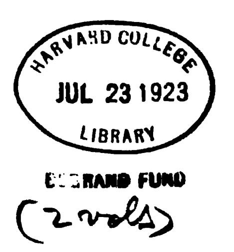
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET CIE, ÉDITEURS

15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15

MÊME MAISON À LIÈGE, RUE DES DOMINICAINS, 7.

1889.





IMPRIMERIE DE GUILLAUME KÖHLER À VIENNE.

INTRODUCTION

par M. Bricka.

Les études théoriques sur la résistance des ponts métalliques dont les bases ont été posées par Navier et par Bresse, ont fait en France l'objet d'un grand nombre d'ouvrages; il n'en est pas de même des applications pratiques de la théorie, qui n'ont été jusqu'ici traitées que d'une manière accessoire par la pluppart des auteurs. La simplicité des prescriptions ministérielles relatives à la vérification de la stabilité des ponts, le tendance des ingénieurs français, à considérer les treillis comme des âmes pleines évidées plutôt que comme des systèmes articulés, le nombre très-restreint des types en usage et l'emploi presque exclusif des ponts à bandes parallèles expliquent le peu d'intérêt qu'ont offert jusqu'ici les recherches ayant pour but la simplification des calculs pratiques et la discussion des efforts supportés par les divers éléments des ponts. Le rôle prépondérant que jouent aujourd'hui les constructions métalliques dans l'art de l'ingénieur et les changements qui se sont produits dans les idées régnantes au sujet de la constitution des poutres ne permettent plus de considérer comme secondaires les questions de cette nature. S'il a été possible, sans autres calculs que les vérifications fort simples prescrites par la circulaire de 1877, de construire un grand nombre de ponts dont la stabilité ne laisse rien à désirer, les augmentations successives du poids des machines rendent maintenant nécessaire une discussion plus approfondie des efforts produits par le passage des trains; des théories venues de l'étranger ont appelé l'attention sur les variations qu'il convient de faire subir aux coefficients de résistance selon la nature des efforts qui s'exercent sur les pièces; les progrès de l'industrie, en mettant à la disposition des constructeurs des fers de dimensions toujours croissantes ont conduit à l'adoption de treillis qui s'éloignent de plus en plus de la conception des poutres évidées, - enfin la construction des ponts n'est plus le monopole presque exclusif de maisons importantes dont l'expérience pouvait suppléer à l'insuffisance des calculs lorsqu'ils étaient incomplets.

D'un autre côté, l'attention des ingénieurs est appelée aujourd'hui sur les travaux importants exécutés dans les pays voisins, et sur les études auxquels ils ont donné lieu; il est devenu nécessaire de bien connaître les théories en faveur à l'étranger, non seulement pour tirer profit de leur valeur incontestable, mais aussi pour se mettre en garde contre les déductions trop absolues qui en ont été tirées.

L'ouvrage que nous présentons au lecteur répond à ce double besoin. Chargé depuis près de vingt ans de l'examen et de la vérification des projets de ponts métalliques soumis en Autriche à l'approbation ministérielle, Mr de Leber a dû rechercher, aussi bien dans les méthodes françaises qui lui étaient familières que dans les méthodes allemandes, les procédés de calcul les plus simples et les plus exacts; il a été amené sur beaucoup de points à les remanier et à les compléter, soit pour faciliter leur emploi, soit pour se rendre compte du degré d'exactitude auquel elles conduisent; il s'est attaché à simplifier non seulement les formules, mais les calculs arithmétiques eux-mêmes, et a dressé, un grand nombre de tables qui réduisent au minimum le travail matériel des applications pratiques. Il a eu l'occasion de coordonner et de compléter l'ensemble de ses travaux dans la préparation de l'ordonnance du Ministère I. R. du commerce de l'Empire d'Autriche relative à la construction des ponts qui a paru en 1887 et à la rédaction de laquelle, il a pris une grande part*. Il a dû notamment à cette occasion, faire une étude complète des effets des surcharges produites par les trains, en tenant compte du poids et de la position des machines

* Mr de Leber était rapporteur de la commission chargée de préparer cette ordonnance en 1886; il avait été en 1878 chargé de faire une étude complète de l'industrie des chemins de fer en France où la circulaire ministérielle du 9 Juillet 1877 venait d'être mise en vigueur; ce sont les résultats de ces études publiées en 1880 („Das Eisenbahnwesen in Frankreich") qui ont servi de base aux travaux de la commission.

tenders et wagons ainsi que des formules adoptées dans les différents pays pour évaluer le travail maximum du métal. L'ouvrage dans lequel se trouve présenté le résultat de ces diverses études est en réalité un traité complet, à la fois théorique et pratique, du calcul des ponts métalliques à travées indépendantes et continues; l'ordonnance de 1887, dont il justifie les différentes prescriptions, lui sert de cadre; mais si les formules et tables qu'il renferme ont été dressées en vue de l'application de cette ordonnance, toutes les questions y sont néanmoins traitées et les calculs y sont présentés au point de vue général, et, pour les tables peu nombreuses spéciales à l'ordonnance, il suffit de multiplier par des coefficients correctifs les chiffres donnés, pour qu'ils puissent être utilisés dans des cas quelconques. Il nous sera facile de le montrer en exposant sommairement de quelle manière sont traitées les principales questions.

Avant d'aborder les questions de calcul et de résistance, Mr de Leber a essayé de jeter les bases d'une nomenclature des principaux éléments des ponts et d'une classification des types usités. La langue technique qui se rapporte à cette partie de l'art de l'ingénieur est loin d'avoir, en France aussi bien qu'en Allemagne, la précision qui serait désirable; lorsqu'on lit des ouvrages écrits dans la langue dont on se sert d'habitude, cet inconvénient frappe peu, car le sens général du texte précise la signification des mots techniques; mais lorsqu'on lit une langue étrangère, avec laquelle on n'est pas parfaitement familier, ce qui est le cas ordinaire pour les ingénieurs, c'est au contraire la signification des mots techniques qui précise bien souvent le sens du texte, et le défaut d'une nomenclature bien définie est alors un réel embarras. Pour en citer quelques exemples dans notre langue, le même élément des poutres droites, est appelé bande ou table* (Collignon), semelle ou corde (Résal), membrure (Seyrig); le mot tablier désigne tantôt l'ensemble de la partie métallique, et tantôt l'ensemble des pièces de pont, des longerons et du plancher etc. La même confusion existe en ce qui concerne la classification des poutres: on confond souvent avec les types américains (Warren, Prat, Linville), les poutres en usage en Allemagne et en Hollande, quoiqu'elles en diffèrent complétement par le mode d'assemblage et la constitution des pièces, on appelle poutres paraboliques, des poutres dont aucun élément n'est en forme de parabole**.

La nomenclature et la classification proposées par Mr de Leber, et dont nous avons soigneusement étudié les termes français avec lui, ne peuvent avoir la prétention d'être definitives; mais elles auront rendu un réel service si elles appellent l'attention des ingénieurs sur l'utilité de fixer cette partie de la langue technique et d'arrêter les bases d'une classification des poutres métalliques.

La discussion des efforts auxquels les divers éléments d'un pont peuvent être soumis selon la composition des trains qui le franchissent, n'a été traitée jusqu'ici dans aucun ouvrage français, au point de vue général et pratique***; les ingénieurs qui ont eu à construire ou à entretenir un grand nombre d'ouvrages métalliques ont en général été conduits à faire, dans des cas particuliers, des recherches de ce genre; mais, à défaut d'une étude d'ensemble celles-ci doivent être recommencées pour chaque ouverture de pont et pour chaque type de machine ou de véhicule exceptionnellement lourd. L'étude très-complète faite par Mr de Leber, en vue de la rédaction de l'ordonnance autrichienne, et qui forme un des chapitres les plus importants de son ouvrage, n'aura pas seulement pour effet de simplifier et souvent d'éviter les calculs de cette nature; elle permettra en outre, de reconnaître, pour chaque ouverture de pont, le degré d'approximation des hypothèses de charge uniformément répartie qui servent habituellement aux calculs. Mr de Leber a comparé les efforts produits par les trains les plus lourds qui peuvent être appelés à circuler† avec ceux qui résultent des charges uniformément réparties dans les conditions fixées par la circulaire ministérielle française du 9 Juillet 1877. Les surcharges prévues par celle-ci, sont, comme on pourra le voir, notablement inférieures à celles qui correspondent à la réalité dans les cas les plus défavorables; pour les moments fléchissants la modération des coefficients de 6^{kg} admis pour le travail des fers permet néanmoins de considérer les ouvrages construits d'après ses prescriptions comme offrant une sécurité bien suffisante. Au

* Le mot table, ou semelle, est usuel et très-exact lorsqu'il s'agit de poutres à double *T*, mais lorsque, comme cela arrive fréquemment en Allemagne et en Autriche, les poutres ont une autre forme, cette désignation cesse d'être admissible.

** Dans les poutres à bande supérieure courbe, la bande supérieure a souvent la forme d'une ellipse ou d'un polygone mixtiligne; le nom de bow-string souvent donné à ce genre de poutres paraît impropre également pour les ponts construits actuellement vu leur hauteur au-dessus des appuis.

*** Des études théoriques intéressantes ont paru dans les Annales des Ponts et Chaussées (Kleitz, 1876 et 1877) pour les ponts routes. Bresse, 1877). — Les méthodes de calcul employées dans ces mémoires diffèrent essentiellement des procédés spéciaux dont l'auteur s'est servi.

† Les poids des machines autrichiennes diffèrent peu des poids des machines françaises (voir les notes du N° *XXVII* où nous citons les machines les plus lourdes ainsi que leurs tenders).

point de vue des efforts tranchants, l'application littérale de la circulaire aurait conduit à donner, vers le milieu des poutres, des dimensions dangereuses aux barres; mais la nécessité de relier convenablement les bandes supérieure et inférieure et les règles pratiques en usage dans les constructions métalliques ont presque toujours écarté ce danger.

Jusqu'à une époque encore récente, la limite pratique de travail du fer était fixée, en France, uniformément à 6^k par mm^2 non seulement par les circulaires ministérielles, mais par les ouvrages techniques. Depuis quelques années l'attention des ingénieurs a été attirée sur les résultats des expériences de Wöhler et de Spangenberg, et les formules qui en ont été déduites ont été accueillies en France avec faveur par un certain nombre d'ingénieurs. Il n'y a pas lieu de s'en étonner. Les coefficients de résistance du métal consacrés soit par la pratique, soit par les réglements administratifs, sont déterminés en tenant compte des charges accidentelles dont la limite n'est jamais définie d'une manière absolument précise, et dont les effets dynamiques peuvent, lorsqu'il s'agit d'ouvrages pour chemin de fer, accroître l'influence dans une certaine proportion; il est donc rationnel de faire varier ces coefficients avec le rapport des charges mobiles à la charge morte: mais on a certainement attribué une importance exagérée aux expériences de Wöhler, faites dans des conditions qui n'ont aucun rapport avec celles où se trouvent les constructions métalliques, et qui n'ont eu en somme pour effet que de faire ressortir le danger de l'application aux matériaux d'efforts supérieurs à la limite de l'élasticité; quant aux formules qui en sont dérivées, malgré leur apparence mathématique, elles ne sont en réalité que des formules d'interpolation entre des coefficients arbitraires ou établis d'après des données expérimentales insuffisantes*. S'il fallait s'en rapporter à leur application, un grand nombre d'ouvrages métalliques, dont une longue expérience a démontré la stabilité, devraient être considérés comme établis dans des conditions dangereuses; presque tous les ponts à poutres continues qui existent en France, seraient notamment dans ce cas. La discussion des expériences de Wöhler et de Spangenberg, et de celles de Bauschinger qui les ont complétées et rectifiées, tient une place importante dans l'ouvrage de Mr de Leber, elle permettra au lecteur de se rendre un compte exact des conditions dans lesquelles ont été établies les formules dont nous venons de parler. Ces formules, dont beaucoup d'ingénieurs croient l'application générale en déhors de la France, perdent aujourd'hui en Allemagne même, la faveur dont elles ont joui jusqu'ici; en Autriche où les théories allemandes sont cependant étudiées avec soin, la commission chargée de rédiger l'ordonnance sur les ponts ne les a pas admises; elle a fait varier le coefficient de travail du métal avec la portée, ce qui, sous une forme plus simple, équivaut à le faire varier avec le rapport de la charge accidentelle, à la charge morte.

Dans les ouvrages métalliques, l'effort brut par mm^2 exercé sur les matériaux n'est pas seul à considérer; il faut pour les pièces comprimées, tenir compte aussi du flambage par aboutement. Beaucoup de ponts ont dû être consolidés après coup, quelques-uns même ont péri parce que les barres comprimées avaient fléchi. L'expérience a conduit à ajouter dans certains types des montants supplémentaires pour éviter ce danger; mais une étude spéciale de la résistance des pièces chargées par le bout, peut seule permettre de réunir avec certitude la sécurité et l'économie. La formule simple et pratique établie par Mr de Leber pour les calculs de cette nature, en partant des formules bien connues de Love, et des expériences de Hodgkinson donne des résultats très-rapprochés de ceux que Bauschinger a trouvés expérimentalement pour les fers à U à T et à double T; elle répond à tous les besoins de la pratique.

Quelles que soient les considérations théoriques qui leur aient servi de base, les limites du travail à imposer au métal selon les efforts auxquels il est soumis, dépendent essentiellement de la qualité des matériaux employés. Cette considération a été beaucoup trop laissée de côté par les théoriciens, même pour le fer puddlé, ou soudé, dont les différences de qualité peuvent avoir sur la stabilité des ouvrages une influence bien plus considérable qu'un écart d'une fraction de kilog. dans le choix des coefficients du travail; lorsqu'il s'agit de l'acier, ou pour parler plus exactement, du fer fondu qui paraît, au moins en France, appelé à bref délai à devenir d'un emploi général pour les grands ouvrages, il devient d'autant plus nécessaire de déterminer avec précision la qualité du métal, que celle-ci peut varier dans des limites extrêmement étendues. Les garanties d'homogénéité qu'offrent les fers soudés de qualité moyenne n'existent en effet, pour le fer fondu, que si la fabrication a été très-

* Mr Séjourné, ingénieur des ponts et Chaussées a proposé une formule purement expérimentale, qui échappe à cette critique. (Voir Flamant, résistance des matériaux.)



régulière; les effets de la trempe lui font subir, lorsqu'il n'est pas très-doux, des modifications profondes, et on ne peut compter avec certitude sur la qualité du métal que si elle a fait l'objet d'essais précis et répétés.

L'avenir des ouvrages en fer fondu dépend certainement en partie du soin et de la rigueur que les ingénieurs apporteront dans la surveillance des matières employées. Le lecteur trouvera à ce sujet au N° *XXXI* et *XXXIV* un résumé des conditions qui doivent être exigées aussi bien pour le fer soudé que pour le fer fondu: En ce qui concerne ce dernier, il a paru utile d'y ajouter quelques développements sur le mode de fabrication et sur les ouvrages déjà construits, enfin sur les conditions nécessaires pour éviter le retour d'accidents qui ont fait grand bruit à l'étranger il y a quelques années.

Après avoir traité ces diverses questions, l'auteur expose, en discutant les méthodes en usage, le détail des calculs à faire pour l'établissement d'un pont à travées indépendantes. Les tables qu'il a dressées, et qui sont contenues dans le second volume, réduisent, dans les cas usuels, les calculs numériques à quelques opérations très-simples. Elles donnent directement au moyen de simples additions, non seulement la section, le moment d'inertie etc., des fers laminés d'un usage courant, mais les moments d'inertie des pièces composées telles que celles qui entrent habituellement dans les bandes des ponts, les moments de flexion correspondant à des charges uniformément réparties, les efforts tranchants résultant de l'action du vent, le nombre de rivets de chaque diamètre correspondant aux diverses sections des pièces, et l'effort exercé sur les parois des trous. Des exemples appliqués à six poutres des types les plus usuels, facilitent l'usage des tables et des formules.

Pour les poutres continues, la méthode exposée est nouvelle dans ses applications; elle est basée sur la théorie connue de Clapeyron qu'elle généralise, et conduit à ramener immédiatement le calcul des poutres avec travées solidaires à celui des poutres avec travées indépendantes. Ceci permet d'utiliser, tant pour les efforts provoqués que pour les sections sur lesquelles ils agissent, toutes les tables numériques établies pour les travées indépendantes. Les coefficients numériques donnés par les tables placées à la fin du second volume, servent à opérer les réductions voulues, en sorte que l'on obtient ainsi immédiatement, par voie de simple addition, tous les moments sur les appuis dont on a besoin pour le calcul des bandes et des croisillons. Les effets additionnels provoqués dans ces derniers par les surcharges partielles à considérer, s'évaluent séparément d'une manière très-simple, en tenant compte des nouveaux principes admis par l'ordonnance autrichienne. Cette partie importante de l'ouvrage mérite spécialement l'attention des ingénieurs.

Les procédés de la statique graphique, en faveur depuis longtemps en Allemagne, sont aujourd'hui assez répandus en France. Sans y attacher l'importance exagérée qu'on a quelquefois voulu leur attribuer, on doit reconnaître qu'ils fournissent, dans certains cas, des solutions élégantes qu'ils permettent d'embrasser d'un seul coup d'œil les efforts qui s'exercent sur les différentes pièces d'une poutre, enfin qu'au moyen d'un simple changement d'échelle, un seule épure suffit pour trouver tous les résultats qui correspondent à diverses valeurs des charges; leur emploi est souvent précieux, soit pour les recherches préliminaires auxquelles donne lieu l'étude d'une poutre, soit pour la vérification des calculs. Mr de Leber a heureusement complété l'édition française de son ouvrage en y donnant, avec un exposé sommaire des principes et des méthodes les plus répandues de la statique graphique, quelques constructions d'un emploi pratique et notamment des épures nouvelles pour la détermination des efforts supportés par toutes les pièces dans les poutres à bandes courbes ainsi que des moments fléchissants et efforts tranchants provoqués dans les poutres à travées continues.

L'ensemble de l'ouvrage constitue, comme on peut le voir par l'exposé qui précède, à la fois un traité théorique complet et un manuel des calculs de résistance: à l'un et à l'autre titre, il est appelé à rendre de réels services aux ingénieurs, et les méthodes nouvelles qu'il renferme nous paraissent appelées à passer rapidement dans la pratique.

Paris, le 14 Août 1889.

Table des matières du Tome I.

C. Procédés pratiques pour effectuer les calculs de résistance conformément à des données et prescriptions quelconques.

A. Traduction française

de l'ordonnance du Ministère i. r. du commerce (Autriche) en date du 15 Septembre 1887

(Reichsgesetzblatt Nr. 109 ex 1887)

concernant les conditions de sécurité à observer à l'égard des ponts de chemins de fer, des ponts par-dessus les chemins de fer* et des ponts de routes d'accès aux chemins de fer*.

Vu la loi du 16 Novembre 1851 (R.-G.-Bl. Nr. 1 ex 1852)** sur l'exploitation des chemins de fer il est ordonné ce qui suit:

A. Ponts de chemins de fer à construire.

§ 1. Présentation des projets.

Les projets de ponts de chemins de fer, à construire, seront avant tout commencement des travaux, soumis à l'approbation du Ministère du commerce.

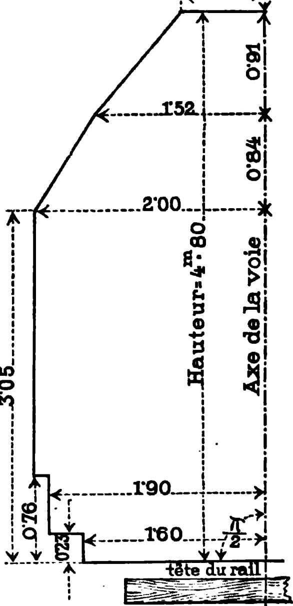
Le dossier des projets présentés devra contenir:

a) Un plan de l'ensemble du pont, à l'échelle de 1 : 1000, des dessins d'ensemble et de détail représentant les piles à l'échelle de 1 : 100, l'épure de la distribution des matériaux***, les dessins d'ensemble et de détail de la construction résistant aux charges, les dessins de détail à l'échelle de 1 : 10 (pour certains dessins annexés représentant des groupes de détails on admettra 1 : 15 ou 1 : 20). Les pièces de la construction y seront définies tant au point de vue de la qualité des matériaux qu'au point de vue des dimensions relatives aux conditions de résistance,

b) les renseignements concernant la charge propre (charge permanente),

c) la justification théorique des dimensions adoptées dans les diverses parties de la construction†; pour les lignes d'intérêt local et les lignes industrielles on joindra au dossier le barême des surcharges produites par les vehicules les plus lourds du matériel roulant††,

d) pour les ponts de plus de 20^{m} de portée ainsi que pour les constructions conçues dans un système ou avec des proportions exceptionnels, le calcul des déformations caractéristiques résultant des charges accidentelles.



§ 2. Espace libre à ménager sur les ponts.

Le tablier des ponts à voie en dessus ou à voie contrebaissée doit avoir une largeur suffisante, pour qu'en tout point du pont il y ait un intervalle d'au moins 2^{m}15 compris entre l'axe de la voie et les appuis horizontaux du garde-corps ou les rebords extérieurs de platelage, les plus proches.

Le même espace libre doit encore être ménagé dans les ponts à voie en dessous ou à voie intermédiaire, entre l'axe de la voie et les bandes ou barres diagonales, jusqu'à 2^{m} de hauteur au-dessus du platelage.

L'écartement pourra être réduit au droit des montants verticaux et des contrefiches verticales; toutefois ces pièces, ainsi que toutes les autres parties de la construction non mentionnées devront rester en déhors du gabarit de libre passage figuré ci-contre.

---

* Le mot allemand: „Bahnüberbrückung" peut concerner un pont-route, une passerelle, un aqueduc même un pont de voie ferrée industrielle . . . etc. et ne saurait parconséquent être traduit exactement par „passage supérieur" qui est le terme français usuel. La difficulté des compétences concernant ces ponts ainsi que ceux des routes d'accès, provient de ce qu'en Autriche les voies de communication relèvent de trois ministères (commerce, intérieur et agriculture) suivant les cas, les chemins de fer d'intérêt public (c. a. d. accessibles au public) et tout ce qui s'y rapporte relevant exclusivement du Ministère du commerce.

** „Eisenbahn-Betriebsordnung" c. a. d. Réglement sur . . . aurait plutôt le caractère d'une „ordonnance" ou d'un „décrèt" si la date ancienne de sa publication ne lui donnait force de loi ce qui veut dire la même importance que possède une loi votée par les chambres actuelles.

*** „Materialvertheilung" s'entend généralement comme synonyme de „épure des tôles" peut toutefois être appliqué à tout autres matériaux de construction que du fer.

† Ce qu'on appelle les calculs de résistance.

†† Ce renseignement sert au classement de ces lignes, quant aux surcharges à prescrire suivant le § 3 lit. *h* comportant une réduction de 20 ou 40% suivant le cas.

§ 3. Charges.

Les charges à faire entrer dans les calculs de résistance se composent du poids propre de la construction (charge permanente) et des charges accidentelles provenant du matériel roulant (charge mobile).

On aura à tenir compte en outre des effets du vent et en tant que le système de construction adopté le rendra nécessaire, des changements de température. Pour les calculs de résistance on se conformera aux prescriptions suivantes:

a) Pour le calcul des bandes dans les ponts des types les plus usuels à travées indépendantes, la charge accidentelle par mètre courant à admettre comme uniformément répartie sur toute la portée, comptée entre les milieux des appuis, sera fixée par le tableau (scala, échelle) suivant:

Scala a.

Portée en mètres	Charge mobile en tonnes	Portée en mètres	Charge mobile en tonnes	Portée en mètres	Charge mobile en tonnes
1·0	30	5	11·5	40	5·6
1·5	20	10	8·5	80	4·4
2·0	15	15	7·0	120	3·8
2·5	13·5	20	6·5	160	3·4

Pour les portées intermédiaires on effectuera une interpolation rectiligne.

b) Pour le calcul des croisillons dans les maîtresses-poutres des mêmes ponts, les efforts tranchants dûs à la charge accidentelle et comptés dans un sens ou dans l'autre pour chaque section, se détermineront par l'hypothèse d'une surcharge s'étendant depuis la section en question jusqu'à l'appui à considérer suivant le sens de l'effort cherché.

Cette surcharge sera fixée par mètre courant de voie indépendamment de la portée du pont et en tenant compte seulement de la longueur de la partie de pont surchargée, conformément au tableau (scala, échelle) ci-dessous*:

Scala b.

Longueur de portée surchargée, en mètres	Charge par mètre de la partie de pont surchargée, en tonnes	Longueur de portée surchargée, en mètres	Charge par mètre de la partie de pont surchargée, en tonnes	Longueur de portée surchargée, en mètres	Charge par mètre de la partie de pont surchargée, en tonnes
1·0	30	5	14·0	40	6·2
1·5	25	10	10·0	80	4·8
2·0	20	15	8·5	120	4·0
2·5	18	20	7·6	160	3·5

Pour les longueurs intermédiaires on procédera par interpolation rectiligne.

c) Pour les ponts à poutres continues reposant sur plus de deux appuis on calculera les bandes en admettant pour les travées surchargées, les charges qui d'après le tableau **a** correspondent à leurs portées, tout en tenant compte des combinaisons de surcharge qui produisent les plus grands moments de flexion.

Pour le calcul des croisillons des mêmes ponts, on admettra pour la travée considérée les charges du tableau **b** et pour les combinaisons d'autres travées surchargées simultanément, les charges du tableau **a**.

* Ce principe de la charge fixée par *m* courant de la longueur de portée surchargée, constitue l'innovation la plus importante que la nouvelle ordonnance autrichienne introduit dans les calculs de résistance.

d) Pour les ponts autres que ceux qui sont mentionnés lit. *a, b* et *c* (ponts suspendus, ponts à arcboutants, ponts en arcs, ponts à poutres equilibrées . . . etc.) et en tant que la simple application des tableaux a et b ne sera pas admissible, on choisira des trains de surcharge qui pour les ponts usuels à travées indépendantes, correspondent à peu près aux charges prescrites pour ces ponts et on admettra à cet effet ce qui suit:

La charge mobile sera censée produite par un train composé de trois locomotives à quatre essieux, ayant chacune 3^m60 d'écartement entre essieux extrèmes et 9^m50 de longueur totale, avec leurs tenders à trois essieux, ayant chacun 3^m d'écartement entre essieux, extrèmes et 6^m10 de longueur totale et avec le nombre de wagons nécessaires ayant chacun deux essieux écartés de 3^m et une longueur totale de 7^m. Les charges d'essieu dans ce train seront en principe de 13^t pour les locomotives, de 10^t pour les tenders et de 8^t pour les wagons.

Les effets de la surcharge résultant du train considéré devront toutefois être augmentés pour les petites ouvertures en vue de charges d'essieu s'élevant à 14^t; pour de très-grandes ouvertures par contre, ils seront susceptibles d'une certaine réduction en vue de la probabilité que les charges et écartements d'essieux ne seront pas constitués tous de la manière la plus défavorable.

e) Pour le calcul des poutres transversales intermédiaires on admettra comme charge mobile, la moitié de la charge totale qui d'après le tableau a serait applicable à un pont ayant pour portée, la distance des deux poutres transversales immédiatement voisines sur la gauche et sur la droite*, de celle qu'on aura à considérer.

Le calcul des poutres transversales de rive se fera dans chaque cas spécial suivant leur disposition en construction, en remplaçant celle des poutres voisines faisant défaut pour appliquer la règle ci-dessus, par un support théorique de la voie pris à distance convenable.

Les longerons seront traités comme des maîtresses-poutres reposant sur les poutres transversales.

f) L'action du vent sera déterminée par l'hypothèse d'un effort transversal de 270^{kg} par m^2 agissant sur le pont non chargé et de 170^{kg} par m^2 agissant sur le pont chargé par un train; on fera entrer dans les calculs celui de ces deux genres d'effort qui sera le plus défavorable, à savoir:

1. Pour le pont non chargé, on tiendra compte dans les calculs de la surface exposée effectivement à l'action du vent, au droit de l'une des deux maîtresses-poutres et de la surface mesurée au droit de l'autre de la même manière, mais réduite suivant les indications du tableau (scala, échelle) ci-contre.

2. Pour le pont chargé, le train sera considéré comme un rectangle plein de 2^m50 de hauteur cheminant à 0^m50 au-dessus des rails. Comme surface exposée on admettra celle du train et des parties de la construction qui dépassent son profil à l'endroit de l'une des maîtresses-poutres, ainsi que la surface de ces mêmes parties à l'endroit de l'autre, après reduction conformément, au tableau ci-contre.

Scala

pour la réduction de la surface exposée à l'action du vent, au droit de la deuxième maîtresse-poutre.

Rapport de la surface des ouvertures de mailles à la surface totale du contour de la première poutre.	Rapport pour la réduction de la surface exposée à l'action du vent, au droit de la deuxième poutre.
pour 0·40	0·2
„ 0·60	0·4
„ 0·80	1·0

Pour les valeurs intermédiaires on procédera par interpolation rectiligne.

g) Pour des systèmes de construction comportant une augmentation des efforts intérieurs par suite des changements de température (ponts en arc, poutres continues sur palées métalliques élevées . . . etc.) on aura évidemment à en tenir compte.

On aura en outre, s'il y a lieu, à tenir compte des effets dynamiques conformément aux conditions de tracé et aux vitesses admises.

Pour des constructions directement exposées aux chocs provenant du matériel roulant et non atténués par un intermédiaire élastique, on fera entrer dans les calculs la charge mobile avec un surplus de 10 pour cent.

* Cette partie du pont fictif sera dans le cas d'intervalles égaux le double de l'un deux, dans le cas d'intervalles inégaux la somme des ceux contigus à la poutre transversale considérée. Ce principe qui constitue aussi une innovation de la nouvelle ordonnance est rigoureusement exact si l'on fait abstraction de la continuité des longerons comme cela est d'usage (voir No *XXVII* du 1er Volume).

h) Pour les lignes à écartement de voie normal qui sont d'intérêt local ou qui ont un caractère industriel et sur les quelles les pesantes locomotives à quatre essieux ne circulent point, il conviendra de réduire en conséquence les charges mobiles prescrites lit. *a* et *b,* à savoir:

1. de 20 pour cent pour les lignes dont les ponts ne sont pas exposés à des surcharges plus défavorables que celles que produisent des locomotives de 7^m70 de longueur totale à trois essieux chargés de 12^t chacun et écartés de 1^m20, avec tenders de 6^m30 de longueur totale à trois essieux chargés ensemble de 25^t.

2. de 40 pour cent pour les lignes dont les ponts ne sont pas exposés à des surcharges plus défavorables que celles que produisent des locomotives-tenders de 7^m20 de longueur totale à trois essieux chargés de 8^t50 chacun et écartés de 1^m10.

§ 4. Travail intérieur.

Le travail maximum des matériaux provoqué par les charges et effets précisés ou § 3 lit. *a, b, c, d, e, g, h* ainsi que par le poids propre de la construction et calculé par cm^2 de la surface de section effective (c. a. d. déduction faite des trous de rivets et des parties pleines qui ne participent pas au travail) ne devra pas dépasser, les limites suivantes:

a) Pour du „fer soudé" (fer puddlé*) soumis à l'extension, à la compression, ou au cisaillement**:

1. au-dessous de 40^m de portée 700^{kg} avec une augmentation de 2^{kg} par mètre de portée.

2. à partir et au-dessus de 40^m de portée, à savoir:

pour 40^m	780^{kg}	pour 120^m	880^{kg}
„ 80^m	840^{kg}	„ 160^m	900^{kg}

on procédera par interpolation rectiligne pour les valeurs intermédiaires et on prendra pour les poutres transversales et les longerons les valeurs qui correspondent à la portée de ces poutres;

3. pour calculer la résistance des rivets au cisaillement, dans une seule direction 600^{kg}, — dans plusieurs directions 500^{kg}; les parois des trous de rivets mesurées en projection sur la section diamétrale, ne devant pas avoir à supporter plus de 1400^{kg} par cm^2;

4. pour le calcul de la résistance au glissement longitudinal des fibres laminées 500^{kg}.

5. Le fer soudé (fer puddlé) ayant une résistance à la rupture de 3600^{kg} et plus, doit avoir au moins 12 pour cent d'allongement dans le sens du laminage.

Pour une résistance à la rupture inférieure à 3600^{kg} l'allongement devra augmenter proportionnellement et pour 3300^{kg}, la plus faible limite de résistance admise, il devra s'élever au moins 20 pour cent.

L'allongement sera mesuré sur une éprouvette de 5^{cm^2} de section entre deux repères écartés de 20^{cm}***. Dans le cas ou l'emploi d'une éprouvette de section différente serait inévitable, on déterminera l'écartement des repères par rapport à l'éprouvette type, de telle manière que les carrés des écartements soient entre eux comme les sections.

b) Pour la fonte de fer qui ne pourra constituer aucune partie essentielle de toute construction travaillant comme poutre ou console, les limites précisées au commencement de ce §, seront fixées à 700^{kg} pour la compression, 200^{kg} pour l'extension simple et 300^{kg} pour l'extension dans le cas de la flexion.

c) Pour le bois on admettra 80^{kg} pour l'extension et la compression dans le sens des fibres.

---

* Voir au N° *XXXI* la définition internationale des fers et aciers obtenus par voie de puddelage ou par voie de fusion.

** Le cisaillement perpendiculairement aux fibres laminées pour lequel on fixe ici les limites élevées de 700 a 900^{kg} pr. cm^2 (pivots des „pin connected bridges" américains, arbres de fer dans les ponts tournants . . . etc.) se présentera très-rarement, car pour les rivets usuels le N° 3 fixe les limites réduites de 600 et 500^{kg}.

*** La section de 5^{cm^2} correspond à peu de chose près à un cercle de $2^{cm}5$ de diamètre; l'échantillon type correspond donc à un cylindre dont le diamètre serait le huitième de la longueur.

d) Pour toutes les pièces travaillant à la compression, on aura à tenir compte de la résistance à la flexion par aboutement*.

e) Le travail maximum des matériaux résultant des effets du vent précisés au § 3 lit. *f*, combinés avec les effets mentionnés ci-dessus, suivant les pièces considérées, ne devra pas excéder les limites suivantes:

ad § 4 lit. *a* Nº 1 et 2	1000^{kg}
„ § 4 lit. *a* „ 3	700^{kg}
„ § 4 lit. *a* „ 4	600^{kg}
„ § 4 lit. *c*	90^{kg}

§ 5. Mesures préventives de sécurité.

a) Pour tous les ponts ou viaducs de plus de 20^{m} de longueur totale mesurée entre les traverses limitant le ballast à l'abord des ouvertures de rive, des dispositions spéciales devront être prises pour parer aux conséquences dangereuses d'un déraillement.

Les »longrines de protection« (ou rails protecteurs) usuelles**, ne doivent pas dépasser en hauteur les rails de la voie de plus de 3^{cm}, elles doivent être placées à l'intérieur de manière à laisser entre rail et longrine une ornière de 16^{cm} de largeur, dans laquelle les bandages de roue peuvent s'engager librement.

Les longrines de protection doivent reposer librement sur les traverses retenant le ballast aux ouvertures extrèmes et s'étendre sur toute la longueur intermédiaire de l'ouvrage d'art.

b) On tiendra compte des effets résultant des changements de température en ménageant des appuis mobiles et l'on aura soin également de pourvoir aux effets de dilatation spéciaux à la voie.

c) Des garde-corps seront placés sur tous les ponts qui ne sont pas éloignés de plus de 800^{m} de la dernière aiguille*** de changement de voie d'une station, d'une halte ou d'un garage pourvus de signaux avancés, on à moins de 200^{m} du milieu d'une halte dépourvue de ces signaux et ne servant pas aux croisements de trains.

Pour les lignes d'intérêt local on réduira l'espace mentionné ci-dessus, en le comptant pour les stations pourvues de signaux avancés, jusqu'à 100^{m} au delà de ces signaux, — pour les stations qui en sont dépourvues, jusqu'à 400^{m} au delà de la dernière aiguille de changement de voie, et pour les haltes sans croisement de trains, jusqu'à 100^{m} au delà de leur milieu.

Tous les ouvrages sans exception ayant plus de 20^{m} de longueur mesurée entre les traverses qui limitent le ballast, devront recevoir des garde-corps qui, dans le cas de murs en retour seront à prolonger au-dessus de ces derniers.

§ 6. Cas exceptionnels.

a) Pour les lignes qui devront être parcourues par un matériel roulant exceptionnellement lourd, pour les tramways à vapeur, pour les lignes à voie normale sans traction à vapeur, pour les chemins de fer à voie anormale, de même que dans le cas d'emploi de matériaux d'une qualité extraordinaire et en général dans les cas exceptionnels, toutes les prescriptions qui précèdent pourront être modifiées suivant les circonstances.

* „Knickfestigkeit" mot allemand très-usuel, signifie „résistance des pièces comprimées considérées comme chargées debout et pouvant fléchir", ainsi qu'on le mentionne dans les traités de résistance des matériaux. La locution du texte que nous emploirons dans la suite pour simplifier, semble la plus convenable pour rendre le terme allemand.

** Ces „Sicherheitslangschwellen" sont des longrines en bois suivant le sens usuel admis pour cette expression; le mot „Schiene" par contre, n'implique pas nécessairement ce que l'on entend par rail et s'applique aussi à toute autre fer laminé. On emploie bien généralement de vieux rails pour le but considéré, mais l'emploi de cornières ou d'autres fers laminés, n'est pas exclu. Les rails de protection diffèrent essentiellement des contre rails pour les motifs expliqués ci-dessus. En France des contre-rails de protection sont usités; ils sont disposés à l'intérieur de la voie plus près des rails (5 à 6^{cm}) de façon que le boudin seul puisse s'engager dans l'ornière. C'est un système préventif contre le déraillement, tandis que le système (mentionné et non prescrit) des longrines, est préventif contre les conséquences du déraillement. Le platelage résistant en fer disposé en contrebas des bandes supérieures des maîtresses-poutres, constitue un système préventif inspiré de la même pensée et qui quoique plus couteux est employé en France comme en Autriche et satisfait (ainsique celui des longrines) aux exigences du § 5 lit. *a* de l'ordonnance autrichienne.

*** En pratique ce n'est pas la pointe même de l'aiguille mais l'extrémité de rail très-voisine, limitant le changement de voie, laquelle sert d'origine pour la mesure des longueurs spécifiées dans le texte.

b) Pour les matériaux tels que la pierre, la brique, le plomb etc. dont il n'est pas fait mention au § 4, ainsi que pour les parties de construction (consoles, colonnes etc.) non comprises dans les maîtresses-poutres, poutres transversales et longerons, on admettra des conditions de résistance basées le plus possible sur l'expérience, lesquelles restent assujetties à une approbation spéciale.

§ 7. Contrôle des travaux.

Afin de se convaincre que les ponts sont bien exécutés conformément aux prescriptions en vigueur, l'administration de l'Etat se réserve de surveiller les travaux suivant ses convenances et le cas échéant, de faire essayer aux frais de l'administration du chemin de fer, la résistance des diverses qualités de matériaux à employer.

§ 8. Formalités à remplir en vue de la visite de contrôle et de la surcharge d'épreuve devant une commission spéciale.

a) Les ponts nouvellement construits devront, avant d'être livrés à l'exploitation, être soumis à une visite de contrôle* et à une surcharge d'épreuve, devant une commission spéciale. L'administration de »l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche« déléguera à cet effet un représentant, en qualité de président de la commission.

Pour provoquer cet acte administratif une demande écrite devra être présentée par l'administration de chemins de fer; on y désignera les ouvrages à soumettre à l'épreuve, en rappelant les décisions et pièces approbatives et on y joindra les mémoires et documents suivants:

1. Le croquis conventionnel** des trains à employer pour la surcharge d'épreuve, lesquels doivent produire autant que possible les mêmes moments de flexion que les charges mobiles prescrites au § 3 (le cas échéant § 6).

Ces trains devront pour chaque voie et pour des portées allant jusqu'à 15^m, 25^m et au delà, être composés avec au moins une, deux ou trois locomotives en charge complète et de la catégorie la plus lourde qui soit admise pour la ligne en question; ils seront complétés avec autant de wagons en charge complète qu'il sera nécessaire pour couvrir la plus grande travée.

2. Les rapports calculés en centièmes, entre les charges d'épreuve obtenues à l'aide du train et celles qui sont prescrites, ainsi que le tableau des plus grandes déformations élastiques déterminées par le calcul en vue du train d'épreuve.

b) Pour la visite de contrôle et la surcharge d'épreuve, l'administration de chemin de fer aura à déléguer un représentant compétent qui devra produire les dessins d'exécution authentiques approuvés et les pièces concernant cette approbation.

L'administration de chemin de fer devra en outre mettre à la disposition de la commission, les trains de surcharge et les instruments de mesure nécessaires; elle devra pourvoir aussi à l'installation des repères dont il est parlé au § 11.

§ 9. Manière d'effectuer les surcharges d'épreuve.

a) L'épreuve de chaque travée de pont doit être effectuée par charge morte et par charge roulante.

Lorsque plusieurs ponts de construction identique et de même portée inférieure à 10^m, devront être éprouvés, il sera loisible de ne pas étendre les épreuves à tous ces ponts si d'après l'avis préalable exprimé par le représentant de l'Inspection I. R. générale des chemins de fer, les résultats déjà obtenus peuvent être considérés comme suffisamment décisifs.

b) Pour l'épreuve par charge morte on amènera les trains de surcharge mentionnés au § 8 lit. *a*, successivement dans les positions qui impliqueront pour la construction considérée la surcharge la plus défavorable, et on les y maintiendra jusqu'à ce que l'on ne puisse plus constater aucun accroissement de la déformation.

Pour les ponts usuels à travées indépendantes, il suffira d'observer chaque travée surchargée successivement sur la moitié et sur la longueur entière de la portée.

---

* Par „commissionelle Prüfung" on entend l'examen détaillé de l'ouvrage tant au point de vue de la conformité aux projets approuvés, qu'au point de vue de l'exécution même. La réception définitive se fait plus tard après une visite bien plus détaillée nommée: „Collaudirung" (récitement).

** Croquis contenant les charges d'essieu ainsi que leurs espacements et servant de base au calcul des charges uniformément réparties équivalentes.

Pour les ponts en arc de grande portée on procédera en outre à deux autres épreuves faisant porter successivement la surcharge, d'abord sur la partie médiane de l'arc, les reins restant non chargés, puis ensuite sur l'ensemble des reins, la partie médiane restant déchargée.

Pour les ponts à poutres continues deux trains par voie sont nécessaires, de manière que l'on puisse surcharger deux travées simultanément.

Pour faire l'épreuve d'une pile et des parties de poutres situées au-dessus, on surchargera simultanément les deux travées adjacentes sur le total de leur portée.

Pour faire l'épreuve de la région médiane d'une travée, on surchargera celle-ci successivement sur la moitié et sur le total de sa portée, en tenant simultanément en charge la plus grande des deux travées voisines ou des deux suivantes, sur le total de sa portée*.

c) Pour l'épreuve par surcharge roulante on fera d'abord passer le train d'épreuve sur chaque voie avec une vitesse d'environ 20^{km} à l'heure, ce train devant être formé d'après les prescriptions du § 8 lit. *a* N° 1 tout en ne comportant toutefois que deux locomotives au plus.

On fera ensuite passer sur chaque voie le même train avec une vitesse plus grande d'environ 40 à 50^{km} à l'heure; ces épreuves à grande vitesse pourront toutefois être remises à une époque ultérieure, si la maçonnerie ou la voie aux abords, ne sont pas encore suffisament consolidées.

d) Pour les ponts à deux ou plusieurs voies supportées par un système de poutres communes, les surcharges d'épreuve précisées ci-dessus, devront être effectuées en tout cas sur toutes les voies simultanément et le cas échéant aussi d'abord sur chaque voie séparément.

e) Pour les lignes d'intérêt local et les lignes industrielles, on pourra se dispenser d'effectuer les épreuves à grande vitesse (lit. *c*, alin. 2).

§ 10. Procès-verbal.

Il sera dressé procès-verbal des résultats de la visite de contrôle et de la surcharge d'épreuve devant la commission spéciale, on y annexera les mémoires et documents mentionnés au § 8 lit. *a*.

Le procès-verbal doit contenir en particulier un tableau des déformations permanentes et élastiques mesurées et les résultats des lectures faites aux repères (§ 11); il devra constater aussi jusqu'à quel point l'ouvrage construit se trouve bien conforme aux plans d'exécution approuvés.

Enfin le représentant de l'Inspection I. R. des chemins de fer de l'Autriche devra y déclarer avec ou sans réserves, s'il y a lieu de livrer à la circulation les ponts examinés ou si la circulation y doit être interdite jusqu'à ce que décision en ait été prise en plus haut lieu.

§ 11. Révisions périodiques.

a) Les administrations de chemin de fer devront, indépendamment de la surveillance permanente qui leur incombe, pourvoir au moins tous les 6 ans à des révisions et surcharges d'épreuve des ponts, conformément aux prescriptions du § 9 lit. *b* et *d*.

Il sera permis à cet effet de mesurer la déformation élastique par flexion dans les ponts à poutres continues, en se bornant à surcharger la travée que l'on considère, et d'utiliser les trains en service comme surcharge mobile, pour les ponts de tout système dont la portée ne surpasse pas 25^{m}.

b) Les observations faites et les résultats des épreuves, devront être tenus à jour pour chaque pont séparément, de façon que le service de l'autorité de contrôle puisse en prendre connaissance.

Pour faciliter ces recherches tous les ponts de plus de 20^{m} de portée devront être munis déjà avant la première épreuve, de repères spéciaux fixés en permanence sur le milieu et au-dessus des appuis de chaque maîtresse-poutre et permettant de constater les déformations permanentes produites dans la suite des années.

---

* <. . travée . .> … et … <. . travée . .>

1. Charge pour les efforts tranchants. 2. Charge pour les moments de flexion.

c) Les ouvrages soumis aux révisions et épreuves, devront faire l'objet d'un rapport adressé à l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche et mentionnant les défectuosités constatées; ce rapport devra être présenté de suite dans le cas où une diminution du pouvoir résistant aurait été constatée; dans tout autre cas il sera présenté à la fin de chaque année.

§ 12. Restrictions dans l'emploi du matériel roulant.

Il n'est pas permis de laisser passer sur les ponts, sans autorisation de l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche, un matériel roulant susceptible d'y provoquer des effets de surcharge plus défavorables que ceux qui résultent des charges prescrites au § 3 (le cas échéant § 6), ou bien qui ne répondrait pas aux prescriptions d'espace du § 2.

B. Ponts par-dessus les chemins de fer et ponts de routes d'accès à construire.

§ 13. Observations préliminaires sur l'application des prescriptions qui suivent.

Pour l'étude et l'approbation des projets de ponts par-dessus les chemins de fer ou ponts de route d'accès à construire, que les compagnies de chemins de fer établissent à leurs frais, ainsi que pour la visite, la surcharge d'épreuve et le maintien en service de ces ouvrages, le Ministère du commerce s'en tiendra aux prescriptions données ci-après (§§ 14—17) en conformité desquelles devront s'effectuer également tous les actes administratifs de l'Inspection générale des chemins de fer qui s'y rapportent.

§ 14. Présentation des projets.

Pour les dossiers de projets à présenter on se conformera aux prescriptions des §§ 1 et 19 concernant les ponts de chemins de fer.

§ 15. Charges.

Dans les calculs de résistance on aura en général à considérer en outre de la charge permanente propre à la construction, deux alternatives de surcharge:

a) La réunion de charrettes en aussi grand nombre que possible sur la chaussée, et en même temps un rassemblement de piétons sur les trottoirs et la partie de la chaussée restée libre.

b) Un rassemblement de piétons couvrant la chaussée et les trottoirs.

On choisira dans chaque cas particulier et pour chaque pièce de la construction, celle des deux hypothèses de surcharge qui donnera les résultats les plus défavorables.

Dans le but d'obtenir un classement méthodique des charges de piétons par m^2, ou des plus lourdes charrettes à admettre dans chaque cas, on a rangé tous les ponts-routes dans trois classes, pour lesquelles à moins de dispositions réglementaires toutes spéciales, on aura à s'en tenir aux charges types suivantes*:

1re Classe.

1. Une charge de piétons de 460^{kg} par m^2.
2. Une charrette à 4 roues avec 12^t de charge totale, 7^m80 de longueur (sans timon), 2^m50 de largeur, 3^m80 d'écartement d'essieux, 1^m60 de largeur de voie et avec un attelage de 4 chevaux du poids total de 3^t sur une longueur de 7^m20.

2me Classe.

1. Une charge de piétons de 400^{kg} par m^2.
2. Une charrette à 4 roues avec 6^t de charge totale, 5^m40 de longueur (sans timon), 2^m40 de largeur, 2^m80 d'écartement d'essieux, 1^m50 de largeur de voie et avec un attelage de deux chevaux du poids total de 1^t5 sur une longueur de 3^m60.

3me Classe.

1. Une charge de piétons de 340^{kg} par m^2.
2. Une charrette à 4 roues avec 3^t de charge totale, 4^m80 de longueur (sans timon), 2^m30 de largeur, 2^m40 d'écartement d'essieux, 1^m40 de largeur de voie et avec un attelage de deux chevaux du poids total de 1^t sur une longueur de 3^m20.

* La charge de piétons de 460^{kg} par m^2 est considérée en Autriche comme un maximum, que l'on ne peut obtenir que lorsque les hommes sont tellement serrés qu'ils ne peuvent plus se mouvoir.

Tout pont-route à construire soumis à „l'enquête du parcours de la ligne de chemin de fer, provoquée par l'autorité politique" (politische Begehungscommission)* ou à toute autre enquête devant une commission spéciale sera rangé à cette occasion dans l'une des classes définies ci-dessus et les demandes et réserves plus impérieuses qui pourraient être présentées exceptionnellement seront discutées en même temps.

c) On tiendra compte des effets du vent conformément à ce qui a été fixé au § 3 lit. *f* et en assimilant la réunion accidentelle de piétons ou de charrettes à un rectangle plein mobile de 2^m de hauteur.

d) On aura à tenir compte enfin des changements de température, suivant que le système de construction l'exige, soit au moyen des calculs qui s'y rapportent, soit au moyen des dispositions prescrites au § 5 lit. *b*.

§ 16. Travail intérieur.

Le travail maximum des matériaux provoqué par les charges et effets précisés au § 15 lit. *a, b* et *d* ainsi que par le poids propre de la construction et calculé par cm^2 de la surface de section effective (c. a. d. déduction faite des trous de rivets et des parties pleines ne participant pas au travail) ne devra pas excéder les limites suivantes:

a) Pour du fer sondé (fer forgé, puddlé) specifié au § 4 lit. *a* N° 5: 750^{kg} avec une augmentation de 2^{kg} par *m* de portée jusqu'à concurrence de 900^{kg} au plus, étant entendu que pour les poutres-transversales les longerons et les pièces intermédiaires on s'en tiendra également au travail qui correspond à leur portée.

b) Pour la fonte de fer on admettra les limites du travail intérieur fixées au § 4 lit. *b*.

c) Enfin les dispositions prises pour les ponts de chemins de fer au § 4 lit. *a* N° 3 et 4, lit. *c, d* et *e* (le cas échéant § 6 lit. *b*) seront aussi applicables aux ponts-routes.

§ 17. Visites, charges d'épreuve et restrictions concernant la circulation des véhicules.

a) Les ponts par-dessus les chemins de fer et les ponts de route d'accès, devront dans tous les cas être soumis avant leur mise en circulation, à une visite de contrôle devant une commission spéciale, pour constater que les travaux ont été exécutés suivant les règles de l'art et conformément aux plans approuvés.

L'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche aura, sur la production d'une demande accompagnée des documents annexes nécessaires, et sans préjudice des demandes et réserves plus impérieuses qui pourraient être faites par d'autres autorités ou services compétents, à décider dans chaque cas particulier, si en outre de la visite de contrôle susmentionnée il y a lieu de procéder également à une surcharge d'épreuve**.

b) Les ponts construits doivent être soumis périodiquement au moins tous les 6 ans, à des visites de contrôle et le cas échéant à la surcharge d'épreuve; on procédera à cet effet ainsi qu'il a été spécifié, au § 11 lit. *b* et *c*.

c) La circulation sur les ponts avec des véhicules susceptibles d'y provoquer des efforts plus défavorables que ceux qui ont servi de base aux calculs de résistance, devra être interdite.

Pour que le public puisse se rendre compte facilement de la plus grande charge admise, cette dernière devra être indiquée sur un écriteau placé aux abords de chaque pont.

C. Ponts déjà existants.

§ 18.

a) Ponts de chemin de fer.

1. On fera le recensement de tous les ponts de chemin de fer en les rangeant par lignes dans un tableau dont les colonnes indiqueront au moins l'emplacement***, l'année de la construction, le nombre des voies, la portée, l'angle entre l'axe de l'ouvrage et celui de la ligne, le

* Sur la base du tracé en plan et des profils en long et en travers ainsi que des dessins à petite échelle des ouvrages d'art, la commission présidée par un délégué de l'Inspection générale I. R. des chemins de fer et accompagnée des intéressés parcourt la ligne discutant toutes les questions concernant les voies de communication, les cours d'eau et même les expropriations.

** Les ponts dits „passages par-dessus" qui forment la majorité des ponts dont il est ici question, ont presque toujours des travées construites d'une manière identique pour des portées différant très-peu. Il serait oiseux de soumettre tous ces ponts à des surcharges conteuses et on se contente en général des les visiter. Par contre les ponts-route de grande portée, les passerelles pardessus les gares, les ouvrages de construction anormale etc. sont toujours soumis à la surcharge d'épreuve.

*** En kilomètres, suivant la division adoptée par le service de l'exploitation, ainsi que cela résulte d'une circulaire ministérielle publiée ultérieurement.

système de construction adopté, la position en hauteur de la voie (en dessus, en dessous), la qualité et la provenance des matériaux de construction, la plus grande charge à supporter actuellement et le travail intérieur qui en résulte . . . etc. enfin les données relatives à l'approbation des projets.

Ce tableau devra être présenté dans un délai de trois mois comptés à partir du jour de la publication de la présente ordonnance, à l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche. Cette autorité se basant sur les observations faites lors de la vérification des pièces présentées et au besoin des pièces et renseignements complémentaires qu'elle demandera, devra ensuite dans le plus bref délai prendre dans son propre ressort, ou, s'il y a lieu, provoquer de la part du Ministère du commerce, toutes les mesures exigées par la sécurité de la circulation.

2. Indépendamment du recensement et de la présentation des pièces mentionnés ci-dessus, les administrations de chemins de fer devront — en tant que cela n'est pas déjà fait, soumettre tous leurs ponts à une vérification par le calcul et à une surcharge d'épreuve en admettant à cet effet des trains composés chacun de deux des plus lourdes locomotives de la ligne considérée ainsi que des plus lourds wagons et procédant pour tout le reste exactement d'après les indications du § 11 de la présente ordonnance; les résultats trouvés seront tenus à jour. On commencera à recueillir les premiers renseignements immédiatement après le jour de la publication de la présente ordonnance.

Dans le cas où la surcharge d'épreuve aura donné un résultat défavorable ou lorsque la vérification par le calcul aura fait constater un travail intérieur par cm^2 de la section effective, dépassant les limites maxima fixés ci-dessous, l'administration de chemins de fer devra en réferer immédiatement à l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche en lui soumettant des propositions appropriées aux circonstances; ces limites de tolérance sont:

1. Pour le fer sondé (fer puddlé) résistant à l'extension à la compression ou au cisaillement 950^{kg}
2. Pour les rivets résistant au cisaillement . . . . 750^{kg}
3. Pour le bois résistant à l'extension ou à la compression dans le sens des fibres 80^{kg}

Pour le travail intérieur combiné résultant des effets du vent précisés au § 3 lit. *f* et des effets de charge susmentionnés, suivant les pièces que l'on considère, ces limites seront étendues:

ad 1 jusqu'à concurrence de 1050^{kg}
„ 2 „ „ „ 800^{kg}
„ 3 „ „ „ 90^{kg}

b) Ponts par-dessus les chemins de fer, ponts de routes d'accès.

Pour les ponts par-dessus les chemins de fer et les ponts de routes d'accès (§ 13) les administrations de chemins de fer auront également à présenter le tableau de recensement spécifié précédemment lit. *a* N° 1; il y devra être fait spécialement mention de la disposition et de la largeur de la chaussée et des trottoirs.

Dans le rapport présenté on devra désigner en même temps que les ouvrages cités, les autorités compétentes pour le contrôle et l'entretien des routes et chemins concernant ces ouvrages.

Indépendamment de ces dispositions, les administrations de chemins de fer auront à s'assurer, d'une manière appropriée aux circonstances, de la résistance des ponts en égard aux charges à supporter effectivement; elles devront aussi s'adresser aux autorités de contrôle et d'entretien compétentes, afin que les mesures de précaution prescrites au § 17 lit. *b* et *c* soient appliquées également pour ces ouvrages.

c) Contrôle de l'Inspection générale des chemins de fer de l'Autriche.

Il est réservé à l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche, de soumettre à la visite de contrôle et à la surcharge d'épreuve conformément aux prescriptions qui précèdent et comme elle le jugera convenable, tous les ponts de chemins de fer mentionnés au lit. *a* et tous les ponts par-dessus chemins de fer et ponts de routes d'accès mentionnés au lit. *b*, en tant, pour ces derniers, qu'ils relèvent de sa compétence (§ 13).

D. Conditions de forme à observer pour les pièces à présenter et les procès-verbaux.

§ 19.

a) Toutes les pièces à présenter conformément aux §§ 1, 14 et le cas échéant 6, 12, 17 lit. *a, b, c* et 18 lit. *a, b* de la présente ordonnance, ainsi que les mémoires et documents à produire et les procès-verbaux à dresser conformément aux §§ 8 et 10 devront être du format de 21×34^{cm}.

b) Les plans et calculs annéxés seront pliés ou réunis en cahier suivant le même format et présentés en double expédition; pour l'exemplaire original au moins, qui est destiné à l'usage de l'Administration, le papier ou tissu employé ainsi que les matières colorantes servant aux dessins écritures ou procédés de reproduction, devront présenter des garanties de durée suffisantes*.

c) Après approbation des pièces soumises, conformément aux §§ 1, 14, le cas échéant 6, 12, 17 lit. *a*, *b*, *c* et 18 lit. *a*, *b*, et après l'accomplissement des actes administratifs mentionnés aux §§ 8, 9 et 10, 17 lit. *a*, 18 lit. *c*, les exemplaires en double seront remis regulièrement visés à l'expéditeur ou au représentant de l'administration de chemins de fer.

E. Dispositions finales.

§ 20.

Les prescriptions de la présente ordonnance seront applicables sans restriction aucune à toutes les lignes de chemins de fer relevant d'administrations privées et avec les modifications suivantes aux lignes relevant de la »Direction générale I. R. des chemins de fer de l'Etat en Autriche«:

a) En tant que d'après le statut sur l'organisation de l'administration des chemins de fer de l'Etat dans les royaumes et pays représentés au »Reichsrath«, statut approuvé en très-haut lieu et publié par l'ordonnance du Ministre du commerce en date du 23 Juin 1884, R.-G.-Bl. 103, ou bien encore d'après une autorisation spéciale du Ministre du commerce, la »Direction générale I. R. des chemins de fer de l'Etat en Autriche« sera compétente pour approuver les projets pour la construction, l'agrandissement et la reconstruction de lignes de chemin de fer considérées, elle aura également à approuver les projets pour la construction ou reconstruction des ponts de chemins de fer, des ponts par-dessus les chemins de fer et des ponts de routes d'accès; on se dispensera alors de présenter les projets comme il est prescrit au § 1 ou au § 14 et le cas échéant au § 6.

b) Dans le même cas (lit. *a*) la »Direction générale I. R. des chemins de fer de l'Etat en Autriche« aura à préparer également tous les actes d'instruction administrative nécessaires en vertu des §§ 8, 9, 10 et 17 lit. *a*; toutefois l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche y devra être convoquée en temps utile, communication lui étant faite en même temps d'un exemplaire des mémoires et documents prescrits par la présente ordonnance. Le représentant de cette autorité de contrôle, aura à intervenir dans les instructions administratives en question, avec les attributions fixées par les paragraphes susmentionnés.

c) Dans le cas ou l'Inspection générale I. R. des chemins de fer de l'Autriche à la quelle une copie des tableaux de recensement prévus aux §§ 11 et 18 doit être communiquée, aurait jugé que d'après l'examen de ces tableaux, une mesure est devenue nécessaire dans l'intérêt de la sécurité de l'exploitation, elle devra aussitôt adresser ses propositions à la »Direction générale I. R. des chemins de fer de l'Etat en Autriche« et en référer en même temps au Ministère du commerce.

§ 21.

La présente ordonnance entre en vigueur le jour de sa publication. L'ordonnance du Ministère du commerce du 30 Août 1870 (R.-G.-Bl. Nr. 114) et les prescriptions du § 21 alinéa 3 et 4 de l'ordonnance du Ministère du commerce, du 25 Janvier 1879 (R.-G.-Bl. Nr. 19) sont abrogées en même temps.

Bacquehem m. p.

---

* Les reproductions héliographiques, les hectographies violettes ou multicolores aux couleurs d'aniline . . . etc. ne sont admis qu'après certains éssais spéciaux.

B. Commentaires à l'appui des prescriptions les plus importantes de l'ordonnance autrichienne.

a) Nomenclature uniforme pour la construction des ponts.

I. Introduction.

Les constructions métalliques généralement usitées pour ponts de chemins de fer, ponts-routes et passerelles, ne sont plus exécutées maintenant, qu'à la suite d'une étude attentive des sections à donner à toutes leurs parties, étude qui depuis plus d'une trentaine d'années résulte de considérations purement théoriques*.

Les calculs de résistance** dont on fait usage ne peuvent toutefois, même avec tous les perfectionnements actuels, nous fournir qu'un aperçu approché des lois suivant lesquelles s'effectue la répartition des forces intérieures dans les constructions, et suivant lesquelles il faudrait reellement calculer les diverses pièces. Dans la plupart des cas la véritable distribution des forces intérieures nous est même fort peu connue, mais les calculs de résistance nous permettent de fixer avec une certaine approximation une limite supérieure des efforts intérieurs considérés, dans les circonstances les plus défavorables, ce qui suffit en pratique.

Les calculs de résistance dont il vient d'être parlé, concernant les poutres de ponts et leurs diverses parties, reposent dans la plupart des cas les plus usuels, sur des hypothèses qui dérivent toujours soit de la théorie des pièces prismatiques en flexion, soit de la théorie des poutres articulées*** (à triangles articulés).

Dans le premier cas on assimile la poutre considérée à une pièce prismatique formée par une sorte de faisceau de fibres, tel que l'exige la théorie de l'extension simple ou de la flexion simple Dans le deuxième cas on assimile la poutre dont il s'agit, à une poutre théorique articulée, c. a. d. à une ferme fictive composée de triangles réunis par des articulations aux sommets et constituant un système idéalisé dans lequel les barres ou „éléments“ (côtés de triangle) sont des droites matérielles tendues ou comprimées dans le sens de leur longueur seulement, et dans lequel tous les poids et charges sont appliqués aux „nœuds“ exclusivement, ces derniers étant alors considerés comme points matériels, comme de véritables charnières.

II. Bases des calculs de résistance.

Les calculs de résistance effectués suivant la „théorie de la flexion“ sont de beaucoup les plus anciens et ont été appliqués aux poutres à âme pleine ou à treillis à mailles très-serrées, telles qu'elles ont été construites tout d'abord.

Pour la manière d'effectuer ce genre de calculs, et pour la nomenclature technique qui s'y rapporte, il y a un accord si complet entre les constructeurs des ponts métalliques, que des explications ou propositions ultérieures, quant aux dénominations à accepter uniformément, paraîtraient superflues.

Les calculs de résistance suivant la théorie des poutres articulées tout au contraire, qui doivent leur naissance à la tendance des constructeurs de ponts, de faire exécuter des constructions à mailles de plus en plus larges†, ont fait surgir un grand nombre de dé-

---

* Pour les premiers ponts à grande ouverture en Angleterre:

Conwaybridge	1847 à 1848	avec 122^m
Britanniabridge	1847 à 1850	„ 140^m

ces méthodes théoriques étaient encore si peu développées, que l'on fut obligé de déterminer les dimensions des pièces par des procédés purement empiriques, en soumettant à la flexion des modèles construits à petite échelle.

** Ces calculs sont réglementés en France par la circulaire ministérielle N° 15 du 9 Juillet 1877; ils l'étaient en Autriche par l'ordonnance ministérielle du 30 Août 1870.

*** Collignon: Cours de mécanique app. aux constructions, 1869, pages 508 puis etc. à 591. — Ces intéressantes études ne concernant que des systèmes spéciaux, se remplacent comme on le verra par la seule considération du moment de flexion et de l'effort tranchant qui suffisent pour tous les systèmes et donnent toujours la solution la plus simple.

† De pareilles constructions ont été également exécutées en Angleterre bien avant que les calculs de résistance qui s'y rapportent, n'aient été développées:

Pont de Chepstow . .	1850 à 1852 . .	avec 90^m
Pont de Saltash . . .	1854 à 1858 . .	„ 139^m

tous deux avec une notable économie du métal comparativement aux constructions à âme pleine citées précédemment.

nominations techniques, pour l'emploi des quelles un désaccord complet règne parmi les ingénieurs, ensorte qu'il serait très-désirable de les classer en une nomenclature uniforme, tant en ce qui concerne les dimensions et fonctions à faire entrer dans les calculs, qu'en ce qui concerne les constructions elles même et leurs parties principales.

Remarquons tout d'abord que la théorie de la poutre articulée se saurait réellement être invoquée que pour le calcul d'une poutre simple formée de triangles juxtaposés. Une pareille poutre, sera dans cet ordre d'idées susceptible d'être calculée par la statique seule (parallélogramme des forces) elle constitue un système statique bien déterminé*.

La conception d'une poutre articulée, avec plusieurs systèmes de croisillons, par contre n'amène, même avec la fiction des „nœuds" et „barres" théoriques (dans le sens des définitions ci-dessus) à aucun système statique déterminé et une nouvelle hypothèse devient nécessaire pour que l'on puisse préciser les dimensions à donner à toutes les pièces du système.

La difficulté en question, s'élude, comme on le sait, au moyen d'un expédient consistant à considérer une pareille poutre composée comme formée d'autant de poutres simples élémentaires, qu'il y a de systèmes de croisillons, et en supposant en outre que l'ensemble des charges permanentes et mobiles se répartisse d'une manière uniforme entre ces poutres simples fictives**.

Le calcul d'une poutre composée (à systèmes multiples) se trouve de cette manière toujours ramené à celui d'une poutre simple, pour la quelle, comme nous l'avons déjà dit, la statique pure suffit.

Il est donc bien clair que tandis que pour les calculs suivant la théorie de la flexion ont est conduit à invoquer toutes les hypothèses faites sur la constitution physique des corps solides prismatiques qui s'y rapportent — on n'aura pour les calculs effectués suivant la théorie des poutres articulées qu'à décomposer la poutre considérée en poutres simples avec répartion égale des charges — et à faire usage de la statique pure. . . .

III. Bases d'une nomenclature exacte.

Les hypothèses et conceptions à introduire dans les calculs de résistance, que nous venons de préciser ci-dessus, se trouvent souvent confondues en pratique; on est parfois obligé également de les combiner ensemble***.

Dans les divers cas qui se présentent, il est toutefois de la plus haute importance pour l'approximation des résultats obtenus à l'aide de toutes ces déductions et spéculations tirées des calculs, que l'on prenne grand soin de se rappeler toujours les hypothèses primitivement admises pour entrer en matière.

C'est aussi par de pareilles considérations que la plupart des constructeurs des ponts ont été conduits à choisir tel ou tel autre système répondant le mieux à leur manière de voir et l'on peut dire que la plupart des ouvrages mis à exécution, considérés tant au point de vue de leur forme extérieure qu'au point de rue des sections attribuées à toutes leurs parties — représentent en quelque sorte, les idées théoriques des ingénieurs qui en ont dressé les projets.

C'est pour toutes ces raisons également, qu'une nomenclature convenable appliquable aux ponts métalliques et à leurs parties principales, doit être basée de préférence sur les principes théoriques que ces constructions représentent et lorsqu'il sera, par exemple, question d'une poutre avec deux systèmes de croisillons de telle ou telle espèce, ce sera bien moins la forme extérieure de la construction, que celle des deux poutres à système simple composantes, que l'on aura en vue, puisque ce sont ces dernières qui servent à fixer les sections de toutes les pièces.

* Ces considérations sont comme nous le verrons tout à fait générales et ne supposent nullement des triangles égaux, isocelles, rectangles . . . etc. tels qu'ils se présentent le plus souvent en France. La condition toutefois que les nœuds se trouvent articulés comme l'exigerait la théorie, ne se trouve presque jamais remplie en pratique.

** Cette façon pratique d'arranger les choses, constitue du reste une hypothèse entièrement arbitraire. Une poutre composée avec deux systèmes de croisillons par exemple, dont les deux poutres fictives composantes devraient supporter chacune la moitié des charges, pourrait tout aussi bien être supposée décomposée en deux poutres fictives analogues supportant l'une $^2/_5$ et l'autre $^3/_5$ des charges totales et la poutre résultante ainsi calculée ne serait guère moins solide, que la première. Ajoutons qu'en Autriche il y a même des exemples effectifs d'une pareille répartition inégale.

*** La bande supérieure p. ex. d'une poutre à mailles larges, calculée d'après la théorie des poutres articulées et recevant directement les traverses de la voie, sera soumise non seulement à la compression résultant de la flexion de la poutre entière, mais encore à une flexion locale résultant des charges directement transmises par les traverses. Il faudra du reste en général, lorsqu'il s'agira de limiter le travail du fer, en revenir toujours aux hypothèses faites dans la théorie de l'extension ou de la flexion des corps solides.

La nomenclature uniforme que nous allons proposer* est fondée sur cette manière de voir même pour les parties principales à distinguer dans les constructions (maîtresses-poutres, poutres transversales etc.) dont le rôle théorique devra avant tout être pris en considération. Pour celles des dénominations seulement, qui se rapportent exclusivement à des considérations de profil ou d'espacement (voie en dessus ou en dessous) on a fait abstraction de la statique.

Nous ajouterons enfin ici que la conception si connue de tous les constructeurs de ponts, et si commode pour les calculs, qui consiste à rassembler toutes les forces extérieures agissant sur une section de poutre, en un „moment de flexion“ et un „effort tranchant“, lesquels effets réunis, peuvent remplacer l'une des deux parties de la poutre supposée coupée à l'endroit de la section considérée — a été maintenue et utilisée par nous dans tous les cas (en particulier pour les „poutres articulées“) comme fournissant toujours dans tous les calculs de résistance d'une ou de l'autre espèce, la solution la plus simple pour déterminer les dimensions de toutes les pièces.

IV. Liste d'expressions usuelles uniformes qui ne devraient exiger aucune explication pour les ingénieurs.

	Dénominations uniformes en allemand	Dénominations uniformes en français.	Expressions françaises à peu près synonymes.
1.	Hauptträger . . .	. Maîtresses-poutres .	. Poutres principales, fermes.
2.	Querträger . . .	. Poutres transversales	. Pièces de pont (souvent entretoises).
3.	Längsträger . . .	. Longerons**	. Poutrelles en long.
4.	Bahn	. Tablier de voie . . .	. Tablier, voie (chaussée, trottoirs).
5.	Einzellast	. Charge isolée	. Charge concentrée, force etc.
6.	Gleichförmige Last	. Charge uniforme . . .	. Charge uniformément répartie.
7.	Knotenlast . . .	. Charge sur nœud . .	. Charge concentrée en une articulation ou en un centre d'assemblage.
8.	Bleibende Last .	. Charge permanente .	. Charge morte, charge propre.
9.	Bewegliche Last	. Charge mobile . . .	. Surcharge, charge vive, charge roulante, charge accidentelle.
10.	Aequivalente Last für die Scherkräfte . .	Charge équivalente pr. l'effort tranchant . .	Charge uniforme équivalente pour calculer les efforts tranchants (croisillons).
11.	Aequivalente Last für die Momente . . .	Charge équivalente pr. les moments . . .	Charge uniforme équivalente pour calculer les moments de flexion (bandes).
12.	Menschenlast . .	. Charge de piétons .	. Charge uniforme d'un rassemblement humain.
13.	Wagenlast . . .	. Charge de charrettes	. Charge uniforme produite par le stationnement de charrettes.
14.	Raddruck	. Charge de roue . . .	. Demie charge d'essieu.
15.	Auflagerdruck .	. Charge d'appui . . .	. Réaction sur appui.
16.	Biegungsmoment	. Moment de flexion .	. Moment fléchissant.
17.	Scherkraft . . .	. Effort tranchant . . .	. Effort transversal.
18.	Schubkraft . . .	. Cisaillement longitudinal	Effort de glissement longitudinal des fibres.
19.	Statisches Moment	. Moment statique . .	. Moment d'un système de forces ou d'éléments matériels.
20.	Schwerpunkt . .	. Centre de gravité . .	. Centre de forces parallèles ou d'éléments matériels.
21.	Trägheitsmoment	. Moment d'inertie . .	. Moment d'inertie par rapport à l'axe neutre.
22.	Trägheitsellipse .	. Ellipse d'inertie . . .	. Ellipse centrale d'inertie (rapp. au centre de gr.)
23.	Trägheitsmodul .	. Module d'inertie . . .	. Quotient du moment d'inertie par la distance de l'axe neutre à la fibre la plus fatiguée.
24.	Trägheitsradius .	. Rayon de gyration . .	. Distance de l'axe neutre aux fibres en lesquelles on peut supposer concentrée toute la surface de section.
25.	Stützweite . . .	. Portée***	. Portée théorique mesurée entre les résultantes des réactions d'appuis.

* Il va sans dire que les auteurs n'ont nullement la prétention de vouloir ici remanier le vocabulaire technique des ingénieurs; il s'agit tout simplement d'interpréter le mieux possible le texte allemand au moyen de la terminologie française déjà existante. Cette dernière en profitera peut-être.

** Ne pas confondre avec „longrines“ qui tout comme les „traverses“ sont des pièces du tablier de voie (Bahnbestandtheile).

*** L'ouverture libre se nomme en allemand: Lichtweite.

V. Parties principales des Constructions.

On distingue principalement dans un pont: les maîtresses-poutres, les poutres-transversales, les longerons, le tablier de voie et les contreventements:

1. Les maîtresses-poutres (allemand „Hauptträger“, anglais „main girders“) sont les poutres du pont qui reportent leur poids propre ainsi que toutes les charges permanentes et accidentelles (mobiles) sur les piles*.

Ces poutres qui sont les plus importantes et qui tant pour l'aspect extérieur, que pour le système de construction adopté se présentent sous les formes les plus variées, justifient en premier lieu la recherche d'une nomenclature uniforme.

On distingue avant tout:

a) les constructions indépendantes (Balkenträger) qui n'exercent sur les piles que des réactions verticales et dont les plus répandues sont les poutres reposant librement sur deux appuis, les poutres droites continues, les poutres en porte à faux et contre-poids, les poutres-consoles etc.

b) les constructions dépendantes (systèmes aboutés ou suspendus) qui utilisent le poids des piles pour résister à la flexion, en exerçant sur elles aussi des réactions horizontales — et parmi lesquelles on peut citer les ponts suspendus à peu près abandonnés maintenant et les ponts en arc dont l'usage tend à se répandre.

Les maîtresses-poutres des divers systèmes dont nous venons de parler, donnent encore lieu dans tous les pays et toutes les langues, à la distinction suivante:

α) Poutres à âme pleine pour petites ouvertures, telles que poutrelles laminées, poutres en tôle, arcs en tôle (allemand: Walzträger, Blechträger, Blechbögen; anglais: rolled beams, plate girders, webarches).

β) Poutres à croisillons pour de plus grandes ouvertures, telles que poutres à triangles, arcs triangulés, poutres en treillis (allemand: Fachwerkträger und Bögen, Gitterträger; anglais: braced girders, braced arches, lattice girders).

Les constructions métalliques actuellement usitées pour ponts de chemins de fer, ont presque toutes des maîtresses-poutres reposant librement sur deux appuis, ou continues citées plus haut (*a*), ou bien encore des poutres en arcs également déjà cités (*b*). Il est par suite possible de distinguer toutes ces constructions: dans le cas *α* suivant la disposition de l'âme pleine et des bandes, dans le cas *β* suivant la disposition des croisillons — et de les caractériser par des dénominations simples.

Cette nomenclature pouvant toutefois concerner aussi d'autres poutres que les maîtresses-poutres nous aurons occasion de l'établir plus loin.

2. Les poutres transversales** (allemand: Querträger; anglais: transverse girders) sont les poutres qui ont à transporter leur poids propre et toutes les autres charges permanentes et mobiles sur les maîtresses-poutres, en tant que ces dernières ne les reçoivent pas déjà directement. Ces pièces relient donc en général les maîtresses-poutres et reçoivent les charges intermédiaires.

Les poutres transversales étant considérées comme poutres secondaires reposant sur les poutres principales, on pourra leur appliquer les distinctions faites ci-dessus, quoiqu'ici elles ne puissent presque jamais paraître aussi concluantes.

On nomme entretoises ou entretoisements (allemand: Querverbindungen) des poutres transversales qui supportent leur poids propre, le poids relativement faible de quelques autres pièces de construction et dans certains cas une faible partie des charges mobiles, mais qui ne sont pas soumises à la surcharge proprement dite, inhérente à la voie. Ces pièces sont donc bien plutôt destinées à relier entre elles les maîtresses-poutres qu'à porter des charges.

On distingue dans les grands ponts les entretoises inférieures et supérieures.

On nomme entrecroisements (allemand: Querversteifungen) les entretoisements qui vu leur hauteur et rigidité propre (croix de St. André) sont aptes à s'opposer à toute déformation du profil de section du pont.

3. Les longerons (allemand: Längsträger; anglais: sleeper girders) sont les poutrelles parallèles aux maîtresses-poutres qui ont à supporter leur poids propre ainsi que toutes les

---

* D'après cette définition les poutres dites de rive ou de garde-corps, de plancher ... etc. sont également des maîtresses-poutres. Une classification plus précise serait du reste difficile pour bien des constructions usitées en France ou les poutres de rive ont à supporter souvent une partie des charges mobiles. Les maîtresses-poutres étaient appelées anciennement fermes; cette dénomination est actuellement réservée à l'architecture.

** Dans la littérature technique ces poutres étaient appelées anciennement pièces de pont et entretoises, expressions qui conviennent pour le cas de poutrelles laminées en fer ou pièces de bois suffisant en même temps pour l'entretoisement.

charges permanentes et mobiles ne reposant pas directement sur les maîtresses-poutres et poutres transversales, et qui les transmettant à ces dernières.

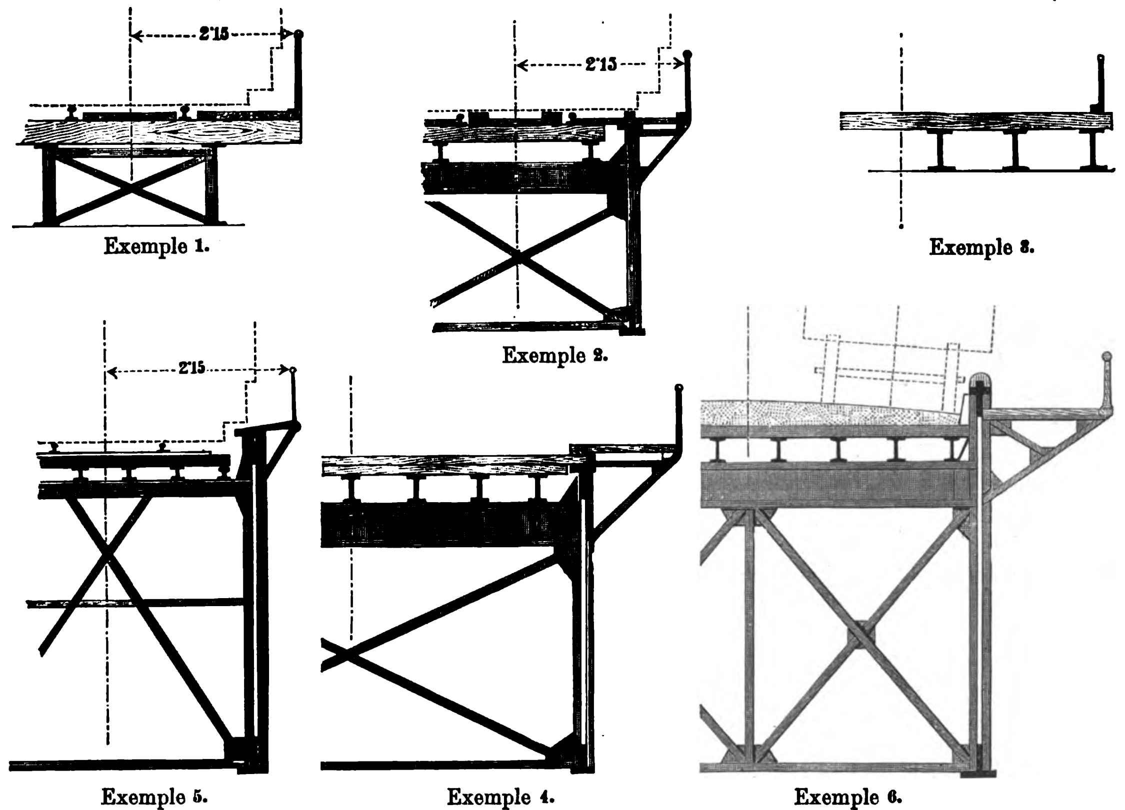
La portée des longerons n'excédant généralement par 5 à 6^m on les trouve presque toujours représentés par des poutrelles laminées ou poutres en tôle. Au point de vue théorique les longerons pourraient être considérés comme maîtresses-poutres de second ordre admettant les poutres transversales comme appuis et c'est pour cette raison qu'on applique également le dénomination: d'entretoises aux pièces qui les rélient directement.

4. Le tablier de voie est pour les ponts de chemin de fer l'ensemble de toutes les pièces constituant la voie proprement dite (Oberbau) et le plancher (Bedielung) — pour les ponts-routes et les passerelles celui des menues pièces destinées à constituer la voie* (chaussée et trottoirs) et à la soutenir sur le canevas formé par les maîtresses-poutres, poutres transversales et longerons définis plus haut.

5. Le contreventement est formé par les croisillons spéciaux disposés en général horizontalement (ou à très-peu près) entre les maîtresses-poutres (dans le cas de longerons à grande portée également entre ceux-ci) en guise de diagonales, qui de concert avec les entretoises s'opposent à toute flexion horizontale du pont.

*VI. Ponts à voie en dessus***.*

1. On nomme ponts à voie en dessus (Constructionen mit oben liegender Bahn) les ponts dans lesquels le niveau de la voie (Bahnplanum) se trouve situé au-dessus des bandes supérieures (Obergurten) des maîtresses-poutres ou tellement peu en contre-bas de celles-ci, que la dénivellation légère et facilement franchissable qui en résulte sur le tablier du pont (Bahn-



Exemple 1. Exemple 2. Exemple 3. Exemple 5. Exemple 4. Exemple 6.

* Dans les ouvrages techniques allemands ont trouve souvent le mot „Fahrbahn“ employé collectivement pour toutes les pièces décrites (2) (3) (4) qui pour le constructeur doivent cependant être traitées séparément (voir Collignon déjà cité page 555).

Les expressions „Bahn“, „Bahnbestandtheile“ (voie, tablier de voie) sont parmi les nombreuses expressions usuelles, celles qui ont paru à l'auteur convenir le mieux et elles s'appliquent également bien aux ponts de chemins de fer, aux ponts-route et aux passerelles. En France le mot tablier tout seul est usité pour désigner la construction métallique toute entière.

** On avait essayé d'abord de trouver quatre définitions pour voie en dessus, voie contrebaissée, voie intermédiaire et voie en dessous. On a acquis la conviction toutefois que l'on ne peut distinguer d'une façon précise que la voie en dessus et la voie en dessous, au moyen des conditions d'écartement des maîtresses-poutres, se rapportant à la largeur maximum du gabarit de libre passage.

planum) ne force pas le constructeur à adopter de ce chef le grand écartement des maîtresses-poutres, que réclamerait la largeur maximum du gabarit de libre passage (Lichtraumprofil) prescrit pour chemins de fer* — ou bien du profil des plus larges voitures de roulage —; ce plus grand écartement des maîtresses-poutres peut du reste être adopté de fait, pour d'autres raisons concernant la stabilité et la rigidité du pont.

Dans cette définition le niveau de la voie (Bahnplanum) et précisé par le dessous du rail en tant qu'il s'agit de chemins de fer, et il coïncide en général à peu de chose près avec le plancher du pont:

Exemples:

1. Pont de chemin de fer à voie en dessus à traverses de bois posées sur maîtresses-poutres.

2. Pont de chemin de fer à voie en dessus, avec traverses de bois posées sur longerons et poutres transversales en fer et avec plancher de bois latéral sur consoles en fer.

3. Pont-route à voie en dessus avec traverses en bois posées sur maîtresses-poutres.

4. Pont-route à voie en dessus avec double rang de traverses en bois posées sur longerons et poutres transversales en fer et avec trottoirs sur élevés portés latéralement sur consoles de fer.

2. On nomme en particulier constructions à voie contrebaissée (Constructionen mit versenkter Bahn) celles des constructions à voie en dessus, dans lesquelles le tablier de voie se trouve placé entre les maîtresses-poutres en contrebas des bandes supérieures, de telle façon que ces dernières atteignent ou dépassent même un peu le niveau de la voie.

Pour ce genre de ponts on peut citer outre les exemples 2 et 4 déjà décrits sous le N° 1, encore plus spécialement les suivants:

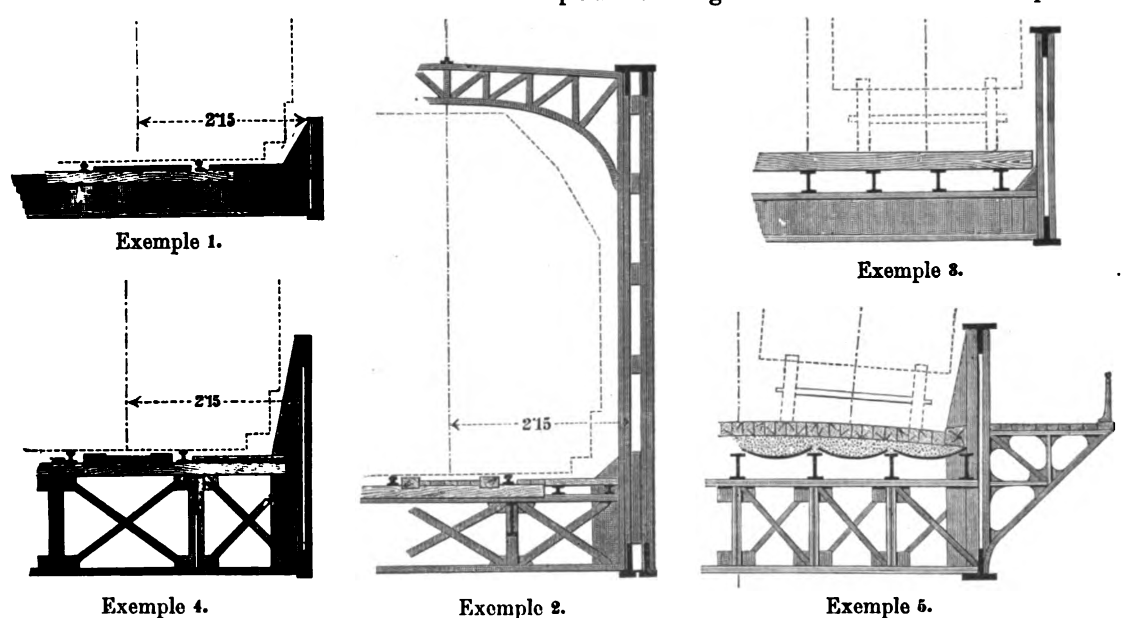
Exemples:

5. Pont de chemin de fer à voie en dessus contrebaissée, avec traverses de bois et traverses en fers Zorès, reposant sur longerons et poutres transversales en fer, avec trottoirs surélevés portés latéralement sur consoles en fer*.

6. Pont-route à voie en dessus contrebaissée avec chaussée empierrée et fers Zorès posés sur longerons et poutres transversales en fer, et avec trottoirs extérieurs portés sur consoles en fer.

VII. Ponts à voie en dessous.

1. On nomme ponts à voie en dessous (Constructionen mit unten liegender Bahn) les ponts dans lesquels le tablier de voie se trouve situé entre les maîtresses-poutres et tellement en contrebas des bandes supérieures, que le constructeur se trouve obligé de ce chef, de donner en tout cas aux maîtresses-poutres le grand écartement correspondant



Exemple 1. Exemple 3. Exemple 4. Exemple 2. Exemple 5.

* Type des viaducs de la Cie d'Orléans (Bouble, Cère, Busseau d'Ahun).

à la largeur maxima du gabarit de libre passage (Lichtraumprofil), ou bien au profil des plus larges voitures de roulage et cela même dans le cas où ce plus grand écartement n'eût pas été nécessaire pour d'autres raisons concernant la stabilité et la rigidité du pont.

Exemples:

1. Pont de chemin de fer à voie en dessous avec traverses de bois, et avec plancher latéral formé de solives reposant sur les poutres transversales.

2. Pont de chemin de fer à voie en dessous, avec entretoises supérieures et avec plancher latéral sur longrines de fer, posées sur les poutres transversales.

3. Pont-route à voie en dessous avec platelage en bois porté sur longerons et poutres transversales en fer.

2. On nomme en particulier, ponts à voie intermédiaire (Constructionen mit zwischenliegender Bahn) les ponts à voie en dessous, pour lesquelles le niveau de la voie se trouve situé encore à une hauteur suffisante au-dessus des semelles inférieures des maîtresses-poutres, pour laisser reconnaître de suite que cet écart se trouve motivé bien plutôt par les données de hauteurs ou la nécessité de bien „entrecroiser" les maîtresses-poutres, que par des considérations ayant trait à la résistance à la flexion*.

Pour ce genre de ponts nous pouvons citer outre l'exemple (2) du N° 1, encore plus spécialement les suivants:

Exemples:

4. Pont de chemin de fer avec voie intermédiaire posée sur longerons de fer.

5. Pont-route avec voie intermédiaire, chaussée pavée sur tôles embouties rivées aux longerons et poutres transversales, et trottoirs extérieurs avec solives sur consoles en fer.

VIII. Notions de hauteurs.

1. Les définitions que l'on vient de donner pour les ponts à voie en dessus ou à voie en dessous dérivent de considérations de profil et d'espacement et sont indépendantes du rôle statique des pièces considérées, que l'on a parfois mis en cause à ce propos, et qui ne peut tout au plus être regardé que comme une conséquence des dispositions adoptées.

Il est bien connu, que les ponts à voie en dessous ne sont en général usités que là où par suite des données de hauteur, les types plus avantageux à voie en dessus ne sont pas admissibles, ou ne pourraient être employés qu'avec des poutres de hauteur insuffisante. On aura à considérer à cet égard ce qui suit.

2. On nomme hauteur disponible (Verfügbare Constructionshöhe), la hauteur comprise entre le dessous du rail (Schwellenhöhe). et le contour inférieur des parties les plus basses de la construction.

C'est cette dimension très-importante qui ordinairement détermine le choix entre l'un ou l'autre des types définis plus haut (*VI* et *VII*); elle devra en général, comporter pour les ponts de plus de 10^m de portée même s'ils sont à voie en dessous, au moins un demi mètre, pour peu que l'on veuille éviter l'emploi de poutres transversales d'une hauteur insuffisante, et pour des ponts d'ouverture moindre elle ne devra jamais descendre au-dessous de $^1/_{20}$ de la portée ou de vingt centimètres en valeur absolue.

3. On nomme hauteur théorique d'une poutre (Theoretische Trägerhöhe) dans une section donnée la distance des deux résultantes idéales en lesquelles on peut supposer concentrés tous les efforts intérieurs de tension et de compression de la poutre, qui font équilibre au moment de flexion des forces extérieures.

Cette hauteur théorique des poutres joue un rôle important notamment pour la théorie des constructions dites indépendantes (*V*) (Balkenträger) comme on va le voir:

4. Pour les poutres à âme pleine ou à treillis avec petites mailles, la hauteur théorique résulte des règles concernant la théorie de la flexion simple; elle s'obtient en recherchant l'axe neutre de la section et en faisant ensuite la somme des longueurs de pendule simple correspondant aux deux parties de la section.

La hauteur théorique ainsi obtenue, est utilisée pour le calcul de la résistance de l'âme au glissement longitudinal des fibres (épaisseur à donner aux tôles verticales de poutres

* On voit qu'ici, comme pour les ponts à voie en dessus contrebaissée, il ne s'agit pas d'une définition absolument précise. C'est l'appréciation des ingénieurs qui doit décider dans chaque cas particulier s'il convient de s'en tenir aux locutions en dessus ou en dessous ou s'il y a lieu de détailler davantage.

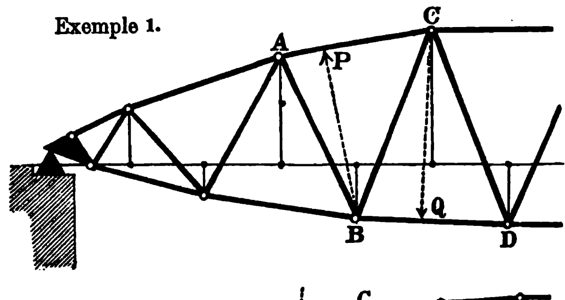


surbaissées) ainsi que pour le calcul de l'espacement admissible pour les rivets reliant les bandes à l'âme de pareilles poutres; la hauteur théorique étant dans ces deux sortes de calculs (à très-peu près) un facteur de résistance.

Dans les ponts à mailles larges par contre, usités maintenant, lesquels comme on le sait, se calculent suivant la théorie des poutres articulées, la hauteur théorique de la poutre à l'endroit d'un nœud considéré sur une bande, est égale à la distance de ce nœud au côté opposé (du triangle) situé sur l'autre bande*.

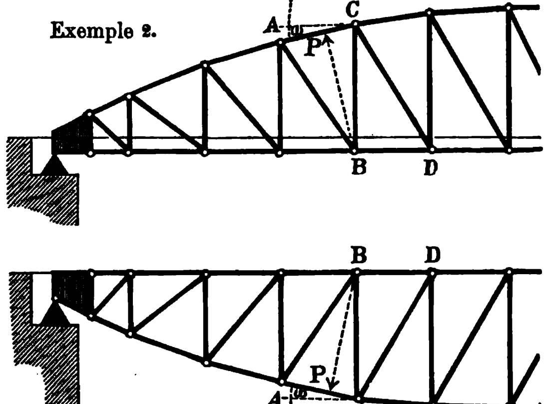
5. La définition qui vient d'être donnée n'est naturellement applicable qu'aux poutres à système simple (à système unique de croisillons ou composées de triangles juxtaposés) lesquelles seules constituent un système statique bien déterminé.

Pour toute poutre de ce genre par contre, la définition est tout à fait générale et l'effort auquel doit résister un élément quelconque d'une bande est toujours le quotient du moment de flexion calculé pour le sommet opposé de l'autre bande par la hauteur théorique correspondante**.



Exemples:

1. Hauteur au nœud B . . . . = BP
Hauteur au nœud C . . . . = CQ
Effort (AC) = Mom. (B) : BP
Effort (BD) = Mom. (C) : CQ



2. Hauteur au nœud B . . . . = BP
Hauteur au nœud C . . . . = CB

$$\text{Effort (AC)} = \frac{\text{Mom. (B)}}{\text{BP}} = \frac{\text{Mom. (C)}}{\text{CB}.\cos\omega}$$

$$\text{Effort (BD)} = \frac{\text{Mom. (C)}}{\text{CB}} = \text{Effort (AC)} \cos\omega$$

ω . . . représentant l'angle de la bande AC avec l'horizon.

On s'est habitué pour de pareils ponts à bandes droite et courbe, dans lesquelles les nœuds successifs . . . . A, B, C, D . . . . du système, se trouvent deux à deux sur une même verticale, à ne considérer que les valeurs

Mom. (C) = Mom. (B) Hauteur (C) = CB

qui se rapportent plus spécialement à la bande courbe. On traite alors communément la hauteur CB comme hauteur de la poutre à l'endroit de ce croisillon, sans spécifier si cette hauteur doit être prise pour l'un ou l'autre des sommets C, B. L'effort (BD) calculé par la dernière formule se trouve être en même temps la composante horizontale de l'effort (AC) . . . etc.

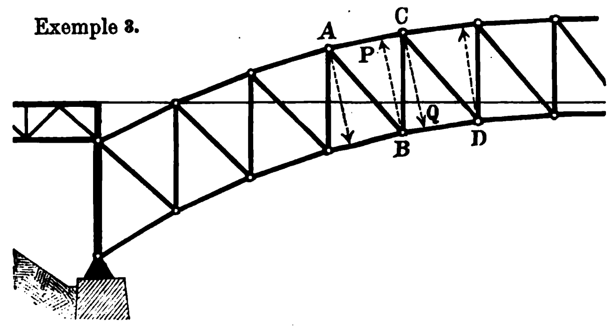
---

* Nous traduisons en général par bande le mot allemand Gurt (anglais chord), ce terme étant usuel à l'Ecole des Ponts et Chaussées (Collignon p. 529, 532 et 540). Pour les bandes des poutres en I nous admettrons l'expression également usitée: tables de préférence au terme semelles qui quoique très-employé convient moins bien.

** Cette règle très-générale pour calculer les bandes d'une poutre simple, de concert avec la décomposition des poutres composées en poutres simples expliquée plus haut (*II*) fournit une solution beaucoup plus simple et rapide que toutes les théories exposées précédemment (voir entre autres Collignon pag. 508 à 591).

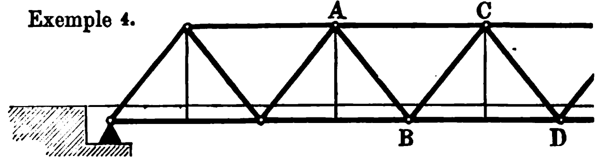
Cette manière de procéder, les dénominations qu'on y admet et le calcul simplifié qui s'y rapporte, ne sont plus admissibles dès que les nœuds B et C ne se trouvent plus sur la même verticale et il faut alors en revenir à la règle générale.

Exemple 3.



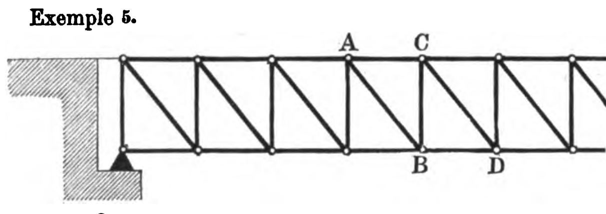
3. Formules comme pour l'exemple 1. Les sommets des polygones formés par ces deux bandes se trouvent sur deux courbes parallèles. Les hauteurs théoriques à l'endroit des nœuds successifs ont alors à très-peu près (c. a. d. abstraction faite des légères différences provenant des cordes et arcs partiels) une valeur constante, représentée par la distance des courbes des bandes.

Exemple 4.



4. Formules comme pour l'exemple 1. Bandes droites parallèles. La hauteur théorique est constante et égale à la distance des bandes.

Exemple 5.



5. Formules comme pour l'exemple 2 — bandes parallèles droites et nœuds deux à deux sur une même verticale. La hauteur théorique est constante et égale à la distance des bandes.

6. Remarque. Tous les exemples de poutres à système simple qui viennent d'être cités, n'ont été choisis ici que pour bien préciser la définition de la hauteur théorique.

En pratique, on construit le plus souvent des poutres combinées (à systèmes multiples) que l'on suppose décomposées en poutres fictives à système simple pour effectuer les calculs.

Pour chacune de ces poutres à système simple, les règles détaillées ci-dessus sont applicables, et permettent de déterminer immédiatement les efforts sur les bandes.

On détermine ensuite l'effort que doit supporter une barre quelconque, en remarquant que toute section faite au travers de la poutre et qui coupe la barre considérée, rencontre trois membres du système et que les projections verticales des trois efforts intérieurs correspondants (dont les deux des bandes sont déjà calculables par le procédé ci-dessus*) doivent faire équilibre à l'effort tranchant résultant des forces extérieures.

Cette méthode générale se simplifie encore, pour le cas des poutres de l'exemple (2).

7. Autre remarque: La hauteur théorique des poutres a non seulement sa grande utilité pour les calculs, mais elle entre encore en ligne de compte comme facteur de résistance (à la deuxième puissance) dans l'estimation du moment d'inertie des sections de poutres considérées, et constitue par conséquent un caractère essentiel de leur résistance à la flexion.

IX. Classification des poutres dites indépendantes (V) à âme pleine (et bandes droites parallèles), d'après leur composition.

1. Les poutres laminées (gewalzte Träger) sont désignées en général selon la forme de leur Profil comme »Poutres en fers double T«, »Poutres en fer en U« .... etc.

On distingue dans ces poutres les deux tables** (semelles, Gurten) et l'âme (Steg) qui les relie, quoique ces diverses parties ne donnent évidemment pas lieu à une délimitation bien précise.

---

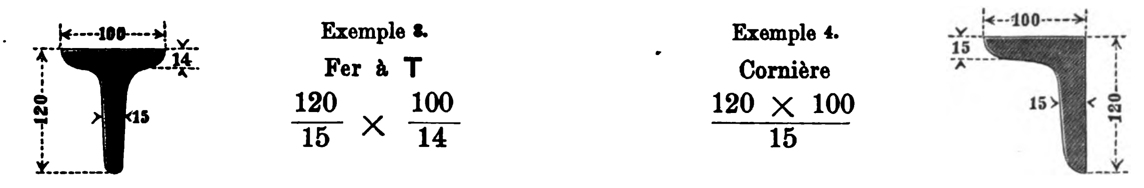
* Ce procédé étant appliqué, comme il va de soi, non pas à la surcharge totale que l'on considère pour le calcul des bandes, mais à la surcharge partielle servant à calculer les barres.

** Les tables (ou semelles) constituent un cas particulier de ce que nous avons appelé les bandes (Gurten), ce dernier terme n'impliquant ni la forme plate ni l'idée du haut ou bas. On nomme plates-bandes (Gurtbleche) les tôles dont l'ensemble constitue une bande ou table qui n'est plus d'une pièce, comme on le verra plus loin.

2. La manière usuelle de désigner les dimensions par des cotes de convention (en *mm*) est mise en evidence comme suit*:



Les mêmes cotes de convention, pour lesquelles chaque dimension principale écrite en guise de numérateur admet toujours comme dénominateur l'épaisseur moyenne correspondante, sont devenues usuelles pour désigner des pièces de calibre moindre, lesquelles ne figurent plus dans les constructions métalliques que comme pièces composantes des poutres, comme croisillons ou comme pièces d'attache et d'entretoisement:



3. On nomme **p o u t r e s e n t ô l e** (Blechträger, genietete Träger) des poutres formées d'âmes pleines en tôle sur lesquelles se trouvent rivées des cornières, fers en **U** ou à **T**, semelles . . . . etc. (Winkel, **U**- und **T**-Eisen, Lamellen . . . .).

On distingue généralement dans les poutres en tôle, l'**â m e** (Stehblech) et les **t a b l e s** (Gurten) Certaines poutres toute fois comportent plus d'une âme et plus de deux tables.

4. **L a s e c t i o n d e s p o u t r e s e n t ô l e** s'indique habituellement, au moyen des cotes conventionelles concernant les fers laminés qui les composent, à savoir**:

E x e m p l e s :

1. **P o u t r e s à d o u b l e T d u c o m m e r c e a v e c o u s a n s p l a t e s b a n d e s** et à section symétrique.

$\frac{100 \times 100}{12}$ 18 $\frac{250}{11}$ $\frac{530}{10}$ 18 18 $\frac{80 \times 80}{10}$ $\frac{220}{10}$ 18

Exemple 1.

$\frac{90 \times 90}{11}$ $\frac{300}{10}$ 18 $\frac{100 \times 100}{12}$ 18 $\frac{100}{12}$ $\frac{300}{11}$

Exemple 2.

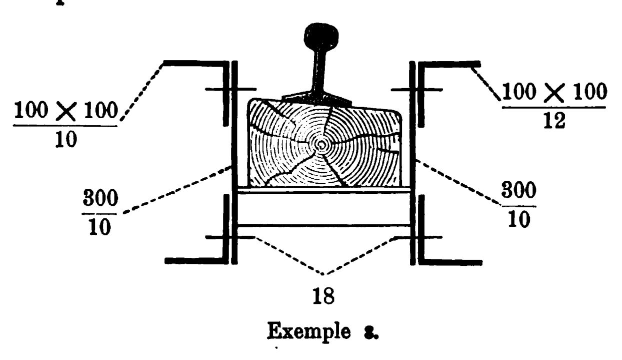
2. **P o u t r e s e n U a v e c e t s a n s p l a t e s b a n d e s** disposées verticalement et à section symétrique.

* Les profils ayant des raccordements arrondis, on les assimile à des profils composés d'éléments rectangulaires dont les épaisseurs cotées sont des moyennes donnant les mêmes surfaces de sections (Voir au No *XXXVII*).

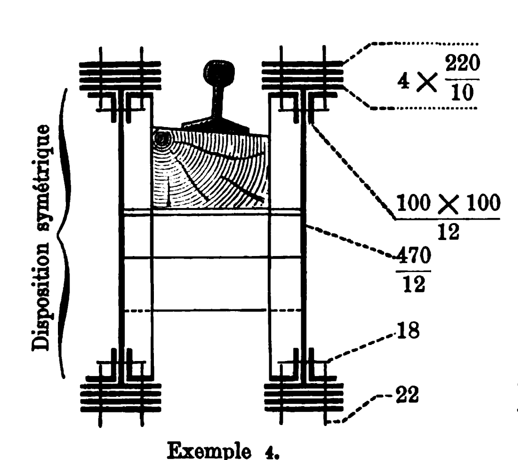
** C'est à dessein que nous présentons ces croquis avec les indications grossières usitées partout.

Exemples:

3. Poutres jumelles en U (appelées parfois par erreur: poutres en caisson, Kastenträger *) avec longrine de bois.



Exemple 3.



Exemple 4.

4. Poutres jumelles en double T à section symétrique, avec longrine de bois (construction usitée uniquement lorsque la hauteur disponible est très-faible.

5. On nomme en général ponts en tôle tous les ponts admettant des fermes à âme pleine, semblables à celles citées, sans distinction aucune. Ces constructions ne sont usitées pour ponts de chemin de fer que pour des portées n'excédant pas 15^{m} (plus exactement pour des tôles verticales dont la largeur n'excède par 1^{m}20 ou 1^{m}40 au plus).

Pour des portées plus grandes on fait usage de maîtresses-poutres à croisillons.

X. *Classification des poutres dites indépendantes (Balkenträger) en poutres à triangles simples ou composées, poutres à petites mailles et poutres en treillis** (Fachwerkträger, Netzwerkträger, Gitterwerkträger).*

1. On nomme poutres à triangles (Fachwerkträger) une poutre formeé de triangles juxtaposés, dans laquelle les sommets sont regardés comme des articulations et appelés nœuds.

L'ensemble des croisillons** ou barres constitue ce que l'on nomme une triangulation (Fachwerk).

Dans une semblable poutre à triangles simple, dans laquelle (les charges étant données) on suppose toutes les forces extérieures appliquées aux nœuds et toutes les résistances intérieures des éléments (côtés qui relient les nœuds) dirigées dans le sens de leur longueur, — on distingue essentiellement les barres du treillis, et les bandes (Fachwerkglieder, Gurtglieder, voir les exemples cités sous le N° *VIII*, 4).

Une poutre effectivement construite avec un système simple de croisillons et avec des nœuds rigides (rivés) peut en quelque sorte être assimilée à une poutre théorique à triangles simple, les calculs étant effectués conformément à cette hypothèse.

Il est bien évident que la rigidité des assemblages, dont le calcul ne tient pas compte, mais qui existe de fait, doit encore augmenter la résistance de la poutre à la flexion***.

---

* L'expression „Kastenträger" (poutre en caisson) assez répandue en Autriche ne serait justifiée que dans le cas où une semelle pleine fermerait le profil par le bas constituant ainsi un véritable caisson, construction à éviter en pratique.

** Cette expression „treillis" est la plus ancienne, parmi toutes celles que les ingénieurs français ont successivement admises dans le langage technique. Elle sera employée dans la suite pour traduire le terme allemand: „Verstrebung" dans le sens le plus général c. a. d. pour désigner l'ensemble des pièces reliant les bandes quel que soit le système de construction adopté, pièces que nous nommerons, comme dans l'origine: croisillons pour traduire le terme allemand „Streben" le plus généralement possible. Nous réserverons toutefois plus spécialement l'emploi des mots treillis et croisillons pour traduire les termes allemands „Gitterwerk" et „Gitterstäbe" concernant les poutres en treillis dans le sens actuellement consacré défini plus loin.

*** Ajoutons toutefois qu'inversement cette rigidité des nœuds et les moments locaux de résistance qui en résultent à l'endroit des assemblages entre croisillons et bandes, — altèrent quelque peu la distribution des forces intérieures, et que les ingénieurs français ont bien raison de consacrer aux rivures en question plus de sollicitude qu'on ne le fait souvent en Autriche et Allemagne.

2. Une poutre construite avec 2, 3 . . . . systèmes de croisillons peut en quelque sorte être supposée décomposée en 2, 3 . . . . poutres fictives à triangulation simple supportant chacune $^1/_2$, $^1/_3$ . . . . de l'ensemble des charges, de telle manière qu'en considérant ces poutres à système simple comme superposées à nouveau, les efforts des bandes viennent généralement à s'ajouter; tandis que ceux de la triangulation, se conservent intégralement ou se combinent en majeure partie suivant qu'ils concernent des barres restées distinctes ou devenues communes à plusieurs triangulations simples.

On dit aussi qu'une semblable poutre composée se trouve construite c. a. d. calculée en triangulation double, triple . . . . etc.

3. Une poutre comportant 5, 6, 7 . . . . c. a. d. tant de triangulations simples (systèmes de croisillons), que l'hypothèse d'une décomposition en poutres simples ne paraît plus admissible, l'âme croisillonée pouvant alors bien plutôt être regardée comme remplacant l'âme pleine, — se nomme poutre à petites mailles (Netzwerkträger) et beaucoup d'ingénieurs en font les calculs de résistance comme celui des poutres à âme pleine (Moment d'inertie de la section formée par l'ensemble des bandes).

XI. Poutres à triangles usuelles.

1. On construit actuellement presque exclusivement des poutres ayant leurs deux bandes ou l'une d'elles au moins, de forme rectiligne. Pour ce genre de constructions qui comprend la grande majorité des ponts exécutés, on pourra admettre les dénominations suivantes:

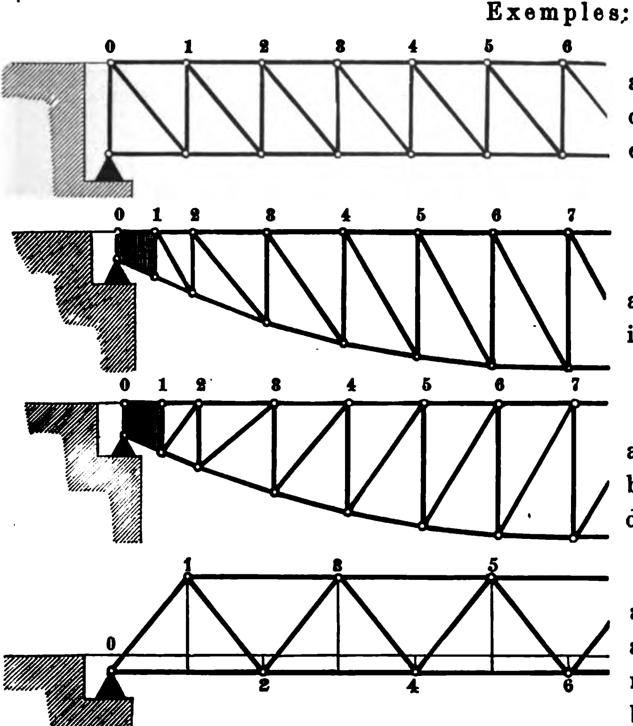
On nomme montants verticaux ou montants (Verticalständer, Ständer) les croisillons verticaux du treillis, les quels sont parconséquent perpendiculaires à la bande rectiligne de la poutre.

On nomme diagonales (Diagonale, Diagonalstreben) les croisillons du treillis, qui sont inclinés sur la bande rectiligne de la poutre.

On nomme montants de renfort ou renforts (Verticalsteifen, Steifen) les montants qui dans les treillis proprement dits ou dans les treillis à petites mailles ne sont pas des croisillons effectifs de la poutre, et pourraient disparaître sans créer de lacune, dans les divers treillis simples composants; — ces pièces parsuite ne fonctionnent que comme attaches se reliant aux bandes et raidissant la paroi de l'âme toute entière.

2. Les explications qui précédent conduisent aux dénominations adoptées dans les exemples suivants de poutres reposant librement sur deux appuis et ayant au moins une bande rectiligne:

Exemples:



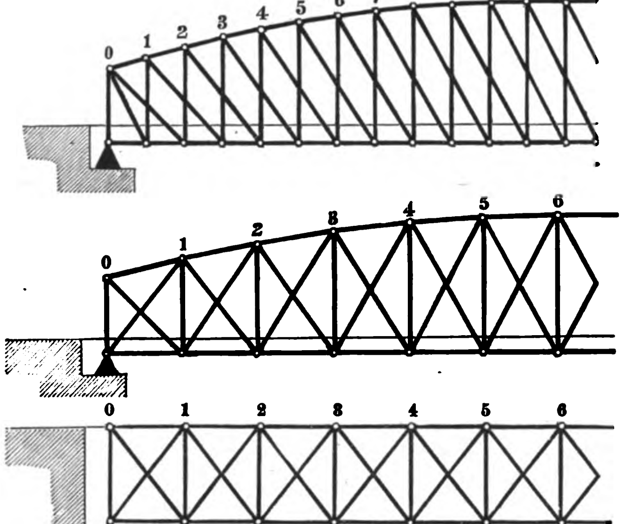
1. Poutre à triangles simple, avec diagonales tendues, avec bandes parallèles rectilignes, et avec voie en dessus.

2. Poutre à triangles simple avec diagonales tendues, avec bande inférieure courbe et avec voie en dessus.

3. Poutre à triangles simple avec diagonales comprimées, avec bande inférieure courbe et avec voie en dessus.

4. Poutre à triangles simple avec diagonales (tendues et comprimées) avec voie en dessous portée sur tirants de renfort dans le milieu des mailles, et avec bandes parallèles rectilignes.

Exemples:



5. Poutre à double triangulation avec diagonales tendues, et bande supérieure courbe, avec voie en dessous*.

6. Poutre avec deux triangulations disposées symétriquement à montants communs, avec bande supérieure courbe et avec voie en dessous.

7. Poutres à deux triangulations symétriques à montants communs, avec bandes parallèles rectilignes et avec voie en dessus**.

3. Les poutres à triangulation double des derniers exemples (5, 6, 7) sont devenues actuellement avec raison les types les plus employés dans la construction de ponts***, tandis que les poutres en treillis simple se construisent très-rarement et ne constituent plus que des types fictifs servant à faire les calculs.

Ce sont donc les poutres à double triangulation avec diagonales tendues† (5) et les poutres à double triangulation symétrique avec montants communs (6, 7) qui sont actuellement recommandées. Ces deux systèmes combinés sont caractérisés d'une façon très-précise tant par leur disposition extérieure, que par leurs propriétés statiques par lesquelles ils se distinguent en principe l'un de l'autre.

Sans entrer ici à ce propos dans des détails concernant plus particulièrement la théorie des calculs de résistance à faire pour ces constructions il convient cependant de faire remarquer que pour les triangulations doubles symétriques mentionnées en dernier lieu, on n'a pas de barres dites à effet contraire†† (Gegenstreben) à considérer, et que dans les montants communs aux deux treillis simples, les efforts de tension et de compression qui en dérivent se neutralisent à très-peu près, et que de ce fait et pour d'autres raisons encore, les calculs à faire sont très-simples.

XII. Treillis.

1. On nomme en particulier poutres en treillis (Gitterwerkträger) les poutres combinées à bandes droites parallèles qui résultent de 2, 4, 6 . . . . poutres à triangles constituées avec diagonales seules (voir *XI*, 2, 4) et deux à deux symétriques.

Les poutres en treillis d'après cette définition, n'admettent pas de montants verticaux effectifs, mais seulement des montants de renfort suivant les besoins; ces pièces qui leur donnent un certain surplus de rigidité servent en même temps pour l'attache des poutres transversales.

2. Les poutres en treillis sont caractérisées par la rigidité de leur âme de croisillons, et la symétrie des pièces composantes; elles s'appliquent très-bien aux ponts à voie en dessus, et paraissent particulièrement recherchées pour les viaducs élevés, pour lesquels le montage s'effectue au moyen d'un lancage.

---

* Les ponts (1, 2, 3, 5) sont aussi désignées collectivement comme poutres à triangulation non symétrique; en France, elles portent plus habituellement le nom de poutres à montants et diagonales, poutres en N . . . . etc.

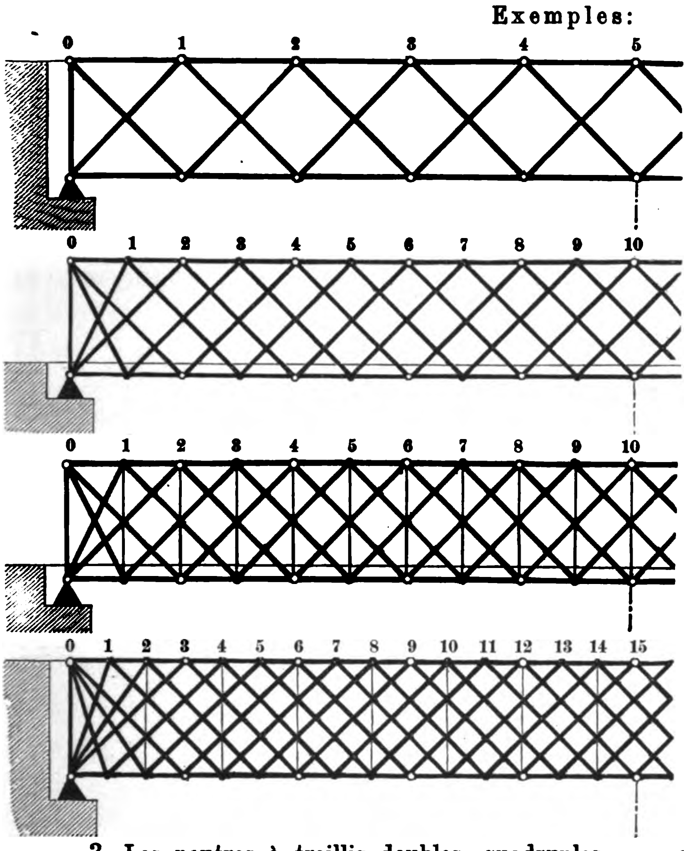
** En France, les poutres (6) et (7) sont connues sous le nom de poutres à croix de St. André.

*** En Autriche et Allemagne surtout; on y recherche actuellement les barres rigides.

† Une double triangulation à diagonales comprimées, n'a pas encore été construite en Autriche.

†† L'idée de cette catégorie spéciale de croisillons, découle de l'habitude des ingénieurs allemands de construire les diagonales des triangulations non symétriques en fers plats, ne pouvant résister qu'à l'extension. En France où l'on ne construit en général que des triangulations symétriques on y adopte (comme en Autriche et Allemagne) pour le moins dans toute la partie médiane de la poutre (Zône des changements de signe de l'effort tranchant) des barres rigides résistant aussi à la compression.

Exemples:



1. Poutre à treillis double sans renforts verticaux, et à voie en dessus.

2. Poutre à treillis quadruple sans renforts verticaux et à voie en dessous*.

3. Poutre à treillis quadruple avec renfort vertical à chaque sommet et avec voie en dessous**.

4. Poutres à treillis sextuple avec renfort vertical à chaque sommet d'ordre pair et avec voie en dessus***.

3. Les poutres à treillis doubles, quadruples .... etc. se calculent en général d'une façon extrêmement simple. Pour ce qui concerne les bandes on applique avec avantage le principe de la hauteur théorique définie sous le N° *VIII*, 4, et la considération d'une triangulation à diagonales seules, multiple amène à cette conclusion: qu'un élément quelconque d'une bande doit se calculer en prenant la moyenne arithmétique des 2, 4 .... moments de flexion des nœuds adjacents, laquelle moyenne peut très-bien être remplacée par le moment de flexion au point milieu de l'élément de la bande considéré†.

Pour le calcul des croisillons on applique dans tous les cas le procédé spécial aux treillis à petites mailles, consistant à répartir l'effort tranchant propre à une section de la poutre, en autant de parties égales qu'il y a de croisillons rencontrés dans cette section.

XIII. Spécification plus précise de l'idée des treillis.

Le caractère essentiel des treillis, conformément aux explications ci-dessus, c'est leur symétrie dans le sens vertical, et c'est sur elle que sont fondés les procédés fort simples dont on fait usage pour le calcul de ces constructions.

Ces calculs, toutefois, ne sont admissibles que si les deux bandes sont suffisament reliées entre elles dans le sens vertical pour que les poids et charges à supporter se trouvent directement appliqués aux nœuds les plus proches, comme nous le montrons p. 26 et 27.

On ne construit plus guère de poutres à double treillis sans y adjoindre des montants de renfort; de pareilles poutres sans renforts ne sont tout au plus employées que pour des ponts à voie en dessus, dont les maîtresses-poutres sont alors solidement entre-croisées (croix de St. André) en sorte que le profil en travers rigide qui en résulte établit une répartition convenable des poids et charges entre les deux bandes.

---

* Pont sur le Danube à Vienne construit par la Cie du Nord-ouest autrichien avec $83^{m}17$ de portée théorique.

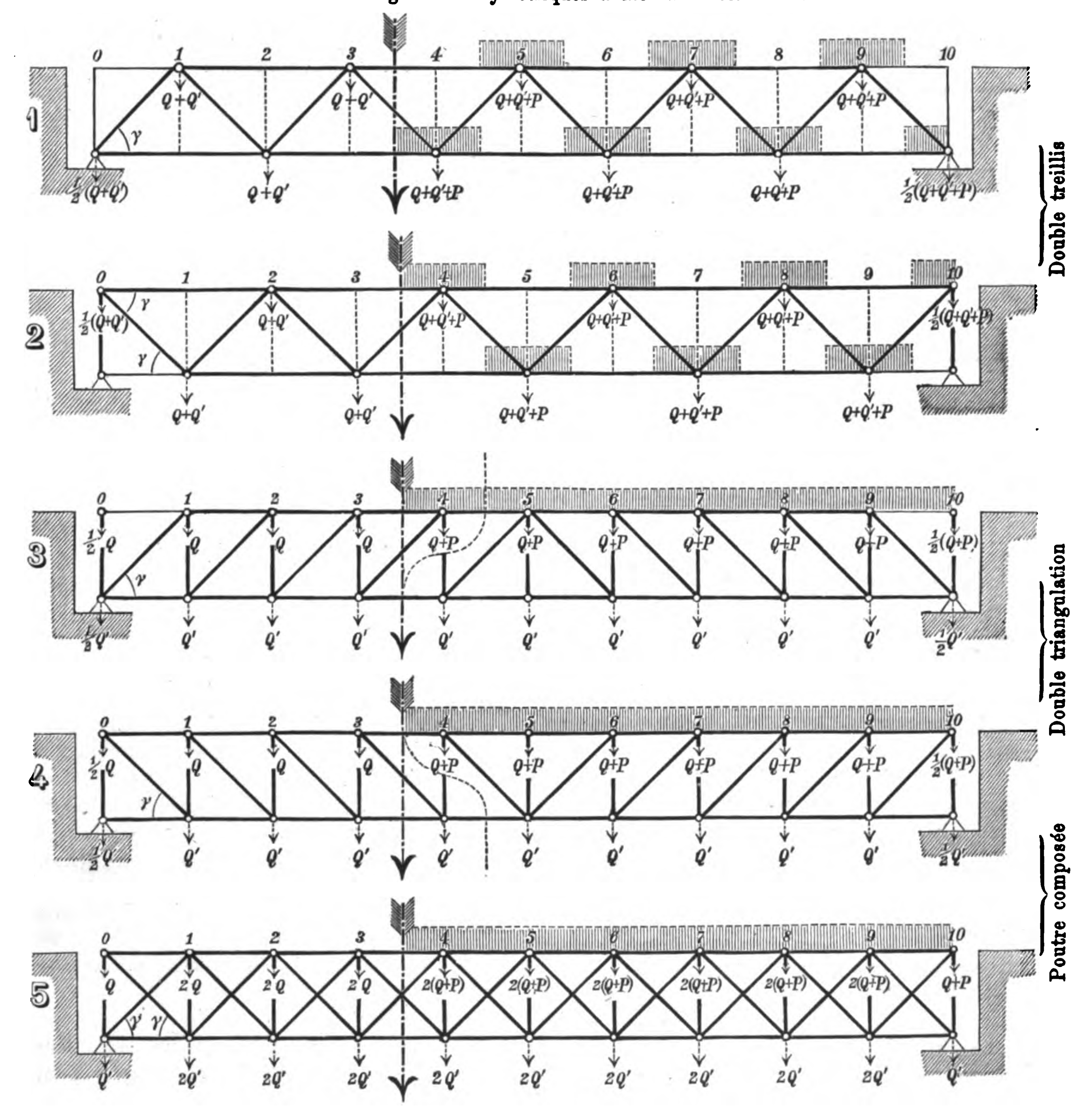
** Type des poutres admises pour les viaducs à voie en dessus contrebaissée, construits par la Cie d'Orléans; les barres du treillis y ont sur l'appui (âme pleine) l'inclinaison normale.

*** Type des poutres admises pour un grand nombre de viaducs français notamment de la Cie P. L. M.

† Cela revient à prendre l'ordonnée de l'arc au lieu de celle de la corde, dans la parabole représentative des moments de flexion.

Calculs comparatifs

pour la décomposition d'un double treillis avec montants de renfort, en deux triangulations à diagonales et deux triangulations symétriques à montants communs.

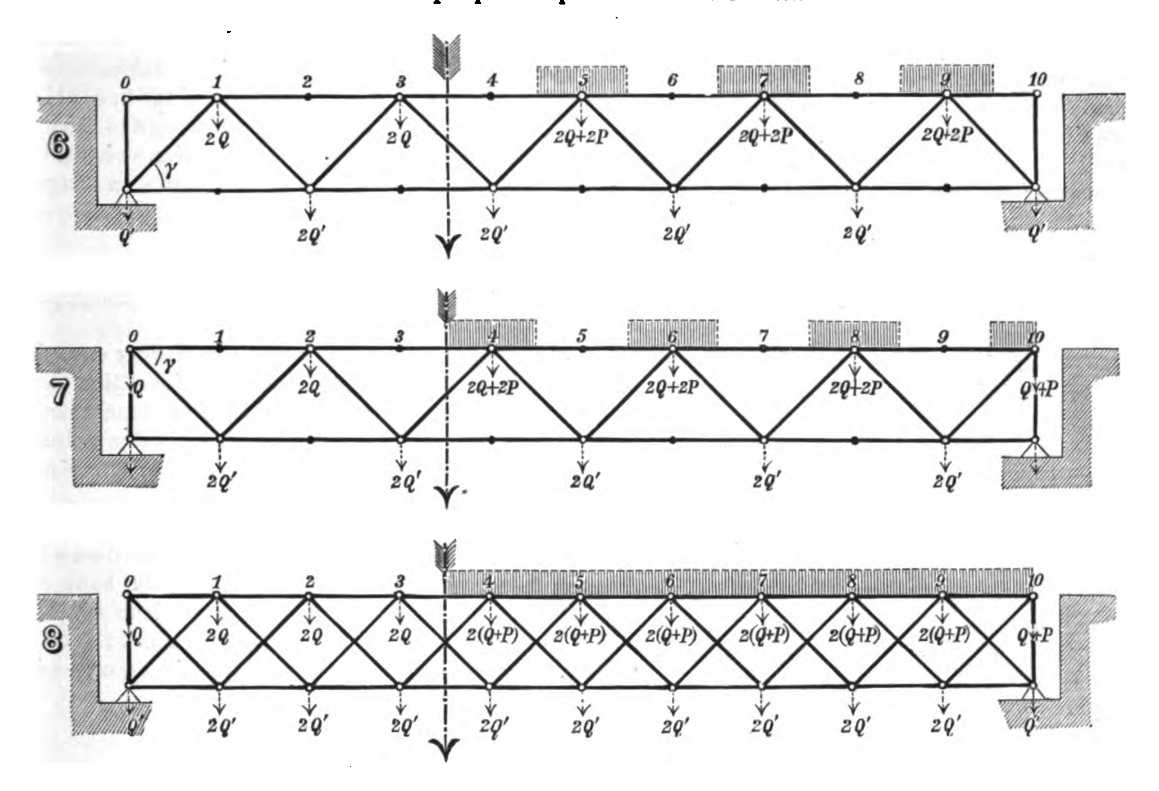


Résultats des calculs (1, 2, 3, 4, 5).

Fonctions	Double treillis		Double triangulation symétrique		Poutre composée 5
	poutre 1	poutre 2	poutre 3	poutre 4	
Charge permanente { Bande sup. / Bande inf.	{ 10 . Q / 10 . Q'	{ 10 . Q / 10 . Q'	{ 10 . Q / 10 . Q'	{ 10 . Q / 10 . Q'	{ 20 . Q / 20 . Q'
Charge mobile . . .	$6\frac{1}{2}\,P$	$6\frac{1}{2}\,P$	$6\frac{1}{2}\,P$	$6\frac{1}{2}\,P$	$13\,P$
Effort trch. $_{(3..4)} = \mathcal{V}$	$+\frac{3}{2}+(Q+Q')\,\frac{21}{10}P$	$+\frac{3}{2}(Q+Q')+\frac{21}{10}P$	$+\frac{3}{2}(Q+Q')+\frac{21}{10}P$	$+\frac{3}{2}(Q+Q')+\frac{21}{10}P$	$3\,(Q+Q')+\frac{21}{5}\,P$
Diagonale (3..4) . .	$+\frac{3}{2\sin\gamma}\left[Q+Q'+\frac{7}{5}P\right]$	$-\frac{3}{2\sin\gamma}\left[Q+Q'+\frac{7}{5}P\right]$	$-\frac{3}{2\sin\gamma}\left[Q+Q'+\frac{7}{5}P\right]$	$+\frac{3}{2\sin\gamma}\left[Q+Q'+\frac{7}{5}P\right]$	$\mp\frac{1}{2\sin\gamma}+\mathcal{V}$
Moment vertical (4) .	$-(Q+P)$	$+\,Q'$	$+\frac{1}{2}\left(Q+3Q'+\frac{11}{5}P\right)$	$-\frac{1}{2}\left(3Q+Q'+\frac{21}{5}P\right)$	$-(P+Q-Q')$
Element de bande (3..4)	$\text{Mom}_{(4)}$: Hauteur	$\text{Mom}_{(3)}$: Hauteur	$\text{Mom}_{(3)}$: Hauteur	$\text{Mom}_{(4)}$: Hauteur	$\frac{1}{2}\,\frac{\text{Mom}(3)+\text{Mom}(4)}{\text{Hauteur}}$

Calculs comparatifs

pour la décomposition d'un double treillis sans montants de renforts, en deux triangulations à diagonales ainsi que pour le procédé de calcul usuel.



Résultats des calculs (6, 7, 8).

Fonctions	Triangulation à diagonales		Poutre composée 8	Valeurs moyennes entre poutres 6 et 7
	poutre 6	poutre 7		
Charge permanente { Bande sup. / Bande inf.	{ $10 . Q$ / $10 . Q'$	{ $10 . Q$ / $10 . Q'$	{ $20 . Q$ / $20 . Q'$	{ $10 . Q$ / $10 . Q'$
Charge mobile	$6 . P$	$7 . P$	$13 . P$	$6\frac{1}{2} . P$
Effort tranch. $_{(3...4)} = \mathcal{V}$	$Q + 2\,Q' + \frac{9}{5}\,P$	$2\,Q + Q' + \frac{12}{5}\,P$	$3\,(Q + Q') + \frac{21}{5}\,P$	$\frac{3}{2}\,(Q + Q') + \frac{21}{10}\,P$
Diagonale (3 . . . 4). . .	$\frac{+1}{\sin\gamma}\left(Q + 2\,Q' + \frac{9}{5}\,P\right)$	$\frac{-1}{\sin\gamma}\left(2\,Q + Q' + \frac{12}{5}\,P\right)$	{ Efforts inégaux inscrits ci-contre }	$\frac{\pm 1}{2\sin\gamma}\left[3\,(Q + Q') + \frac{21}{5}\,P\right]$
Montant de renfort (4) .	. . . . néant	. . . . néant	. . . . néant	. . . . néant . . . .
Element de bande (3 . . . 4)	$\mathrm{Mom}_{(4)}$: Hauteur	$\mathrm{Mom}_{(3)}$: Hauteur	$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Mom}(3) + \mathrm{Mom}(4)}{\mathrm{Hauteur}}$	comme ci-contre

Comparaison avec le mode de calcul usuel.

La décomposition en deux poutres à triangles indiquée ci-dessus, conduit comme on le voit, à donner aux diagonales comprimées des dimensions plus fortes qu'aux diagonales tendues. La valeur moyenne des efforts supportés par les diagonales dans un panneau (3 . . . 4) serait exactement celle trouvée précédemment en supposant ajoutés les montants de renfort. Il en resulte encore plus clairement que les montants n'ont qu'à répartir les charges entre les nœuds supérieurs et inférieurs. Le procédé usité pour le calcul d'une de ces diagonales (3 . . . 4) d'après l'hypothèse d'une charge uniformément répartie sur la poutre 8, donne la valeur légèrement plus grande:

$$\text{Effort de diagonale} = \frac{\pm 1}{2\sin\gamma}\left[3\,(Q + Q') + \left(\frac{21}{5} + \frac{1}{40}\right)P\right]$$

Dans les treillis quadruples et sextuples on admet aussi généralement un nombre suffisant de renforts verticaux; du reste la rivure d'usage dans les constructions, à l'endroit des points de croisement des croisillons entre eux, est déjà appelée à donner à l'âme de la poutre la solidité et la rigidité nécessaires.

Pour faire voir que dans le cas où les conditions requises se trouvent remplies, le calcul usuel des poutres en treillis est bien entièrement exact, nous avons dressé les tableaux de calculs comparatifs qui précédent et qui démontrent que, soit avec l'hypothèse d'un treillis double (poutres simple 1 et 2), soit avec l'autre hypothèse de deux triangulations symétriques à montants communs (poutre 3 et 4), on obtient absolument les mêmes résultats de calculs; ce sont aussi à très-peu près ceux que donnent les calculs plus expéditifs en usage, détaillés plus haut, pour lesquels on évalue les moments de fléxion et les efforts tranchants au moyen de charges uniformément réparties.

La poutre combinée (5) étudiée à l'aide de tous ces calculs d'une ou de l'autre espèce se trouvera toujours composée d'une même manière, mettant en évidence sa structure symétrique dans le sens vertical.

Si maintenant au contraire on venait à supprimer entièrement les renforts verticaux c. a. d. si l'on considérait un double treillis sans renforts (poutres 6, 7, 8) la répartition des efforts intérieurs ne resterait la même que dans les bandes et on serait amené à donner aux diagonales comprimées des dimensions un peu plus fortes — aux diagonales tendues des dimensions un peu moins fortes, la moyenne dans chaque panneau (3 . . 4) conservant toutefois encore la même valeur que précédemment.

De toutes ces comparaisons il résulte bien clairement que les montants verticaux de renfort ne font point partie du treillis proprement dit, dans cette „poutre en double treillis" mais que leur rôle consiste uniquement à répartir les poids et charges du haut en bas (ou inversement) et que l'on devra aussi déterminer en conséquence $(P + Q - Q')$ leur section.

Ce qui vient d'être démontré pour le treillis double peut s'étendre de suite aux treillis quadruple ou sextuple, ces derniers treillis plus complexes pouvant être supposés décomposés en plusieurs treillis doubles.

b) Charges mobiles d'après le § 3 l'ordonnance autrichienne.

XIV. Introduction.

1. Prescriptions de surcharge publiées antérieurement.

Lorsqu'il s'agit d'établir des prescriptions de surcharge pour ponts de chemins de fer, il y a lieu de rechercher d'abord le poids du matériel roulant le plus lourd et la composition des trains les plus défavorables à prévoir. Les surcharges à admettre une fois fixées et tous les ponts étant calculés en conséquence, on doit être ensuite conduit forcément à restreindre aussi la circulation des véhicules lourds dans les limites correspondant aux hypothèses admises tout d'abord, car si ces limites étaient dépassées, les ponts en service pourraient se trouver encore exposés à supporter des efforts non prévus.

Dans les prescriptions publiées précédemment on n'a malheureusement pas toujours tenu compte de ce double point de vue de la question, et l'historique de la construction des ponts dans tous les pays et sous tous les régimes, fait voir qui si les gouvernements et les administrateurs des grandes compagnies de chemins de fer ont été amenés à adopter des constructions plus solides et des prescriptions plus sevères, ils y ont été conduits plutôt par des accidents survenus effectivement, que par des déductions scientifiques.

En Angleterre, pour les questions de ce genre, que les travaux de ponts importants exécutés de 1847 à 1850 par Stephenson et Brunnel avaient soulevées, on s'en rapporta d'abord exclusivement au talent et à l'expérience des ingénieurs; ce n'est qu'à la suite de l'accident du pont sur la Tay que le „board-of-trade" en Juillet 1881, publia une sorte de cahier des charges général un peu plus détaillé contenant un certain nombre de principes à observer pour la construction et l'exploitation des chemins de fer, et fixant au moins quelques normes en chiffres pour les ponts métalliques, sans toutefois leur imposer une limite de surcharge bien précise*.

---

* „Memorandum of important requirements", signé: Board of trade (Railway dept.) July 1881. Henry G. Calcraft. On y lit:

§ 17. La charge capable d'amener la rupture d'un pont en fonte de fer doit être égale au moins au triple de la charge permanente augmenté du sextuple de la charge mobile. Pour les ponts en fer

Sur le „continent“ comme disent les Anglais on a éprouvé bien plus tôt le besoin de prescrire d'une manière plus précise les charges à admettre pour les calculs de ponts; les premières prescriptions toutefois se ressentent trop de la préoccupation fort louable du législateur, de rester clair et bref. On estimait simplement le poids des locomotives par mètre de longueur totale, en choisissant les plus lourdes parmi celles qui étaient en service à ce moment et les poids par *m* ainsi obtenus, considérés comme surcharge uniformément répartie, étaient donnés comme limite inférieure de la charge mobile à admettre dans les calculs.

C'est ainsi que l'on arriva en France à publier les circulaires du Ministère des travaux publics en date du 26 Fevrier 1858 et du 15 Juin 1869* qui fixaient pour les petites portées des limites de charges tout à fait insuffisantes auxquelles les ingénieurs ont eu la sagesse de ne pas s'en tenir.

L'ordonnance autrichienne pour la construction des ponts publiée le 30 Août 1870 et qui avait été provoquée par l'écroulement d'un pont sur le Pruth près de Czernowitz, survenu en 1868, marque un progrès reel en matière de prescriptions de surcharge; on y a tenu compte des moments de flexion produits par les locomotives sur les ponts de faible portée, et la charge mobile alors fixée à l'aide d'une seule échelle pourrait presque suffire aujourd'hui encore pour des portées ne dépassant pas 15^{m}.**

---

et acier le travail du métal résultant des charges permanentes et mobiles ne doit pas dépasser 787^{kg} pr. cm^2 dans le cas du fer et 1024^{kg} par cm^2 dans le cas de l'acier.

§ 18. On prendra pour charge mobile dans les calculs les locomotives les plus lourdes circulant sur les chemins de fer.

§ 19. Les constructions de ponts de grande portée, devront aussi être calculées en vue d'une pression du vent de 273^{kg} par m^2.

Ces prescriptions très-libérales, données en des termes très-généraux ne renferment au moins rien d'inexact, et pourraient être considérées comme suffisantes au point de vue anglais, si l'on ne savait pas avec quelle nonchalance les administrateurs des chemins de fer anglais traitent souvent les questions de calculs de résistance. Encore en 1882 l'auteur remarquant dans les bureaux de construction d'une grande compagnie à Londres que l'on allait utiliser à nouveau pour un viaduc élevé a ouvertures d'environ 20^{m} un vieux projet de construction avec voie en dessous et poutres à âme pleine, n'obtint pour toute réponse à ses objections bien motivées que la remarque laconique: „We have no time for such studies, as You have it on the continent.“

* Ces circulaires sont tout à fait insuffisantes pour des ponts de moins de 15^{m} de portée. On y prescrivait entre autres pour la surcharge d'épreuve:

1. Une charge morte de 5000^{kg} par *m* de voie pour des portées allant jusqu'à 20^{m}, et de 4000^{kg} par *m* de voie pour des portées plus grandes, cette charge devant rester 8 heures en place.

2. Une charge mobile composée d'au moins 2 locomotives pesant avec leur tender 60^{t} chacune et de wagons chargés de 12^{t} chacun en nombre suffisant pour couvrir toute la portée, la vitesse devant être de 20 à 35^{km} par heure.

** On ne tenait pas encore compte à cette époque d'une charge équivalente quant aux efforts tranchants. Voir l'ouvrage excellent d'ailleurs: „Beiträge zum Brückenbaue“ de Heinrich Schmidt (1866, 1867 et 1869, Wien, R. v. Förster. Sep.-Ausg.) — ainsi que le projet d'ordonnance soumis le 8 Mai 1869 à l'association des ingénieurs et architectes de l'Autriche et dont les surcharges par *m* proposées se trouvent comparées (arrondies en *m* et *t*) ci-après à celles de l'ordonnance:

(4)

Portée	Charge mobile		Portée	Charge mobile		Portée	Charge mobile	
	Projet de l'association	Ordonnance du 30 Août 1870		Projet de l'association	Ordonnance du 30 Août 1870		Projet de l'association	Ordonnance du 30 Août 1870
m	t	t	m	t	t	m	t	t
1·0	26·0	26·0*	5	11·0	10·0	30	5·4	4·0
1·5	17·3	17·5	10	7·7	8·3	40	5·0	4·0
2·0	13·5	15·0	15	6·2	6·7	50	4·6	4·0
2·5	11·0	14·2	20	5·8	5·0	60	4·3	4·0

* **Complété au moyen de la considération des 13^{t} sur un essieu devant pouvoir circuler partout.**

Comme on peut le voir en comparant avec les charges de l'échelle a de la nouvelle ordonnance autrichienne du 15 Sept. 1887 ou mieux encore avec celles du tableau *XIX* des charges équivalentes quant aux moments de flexion résultant du „train type de surcharge“, il est regrettable qu'on n'ait pas adopté en 1869 l'échelle du projet de l'association; elle convenait bien pour un train de 2 locomotives-Semmering de 56^{t} chacune et de wagons en charge pesant 15^{t}6 chacun, et aurait permis de calculer bien mieux qu'on ne l'a fait, les dimensions de beaucoup de ponts avec des portées de 20 à 60^{m}.

La circulaire française du 9 Juillet 1877 qui est encore en vigueur actuellement, ne contient également qu'une seule échelle de charges mobiles*; celle-ci est calculée, au milieu du pont, d'après les moments de flexion provoqués par des trains attelés d'une seule locomotive à quatre essieux pesant avec son tender 72^t ou de deux locomotives à trois essieux pesant avec leur tender 60^t chacune. Les moments produits par ces charges restent en certains points du pont, notablement au-dessous de ceux qui correspondent aux machines à quatre essieux actuellement en service; l'adoption d'une échelle unique de surcharges déterminées par la considération des moments de flexion (efforts sur les bandes) conduit d'ailleurs forcément à des résultats entièrement inexacts dans le calcul des efforts tranchants (efforts sur les croisillons) **.

La circulaire française de 1877 renferme une prescription qui, quoique encore incomplète, constitue une innovation importante: L'article V (A) interdit la circulation, sans autorisation préalable du Ministre des travaux publics, des machines pesant plus de 72^t. On peut considérer ces dispositions prohibitives, comme complément indispensable de toute réglementation des surcharges, car elles peuvent seules l'empêcher de devenir illusoire.

La circulaire russe du 5 (17) Janvier 1884 N° 60, publiée dans le „Journal du Ministère des voies publiques du 10 Fevrier 1884 à l'adresse des Inspecteurs, Directions et Directeurs de chemins de fer", et concernant „les conditions techniques à observer dans les constructions métalliques pour ponts de chemins de fer", contient les prescriptions de surcharge les plus complètes, parmi toutes les normes de ce genre publiées jusqu'à ce moment. On y a fixé les charges équivalentes tant pour les moments de flexion que pour les efforts tranchants, pour les parties des ponts voisines des supports et pour celles

---

* On peut comparer cette échelle à celle de l'ordonnance autrichienne de 1870 comme suit:

(5)

Portée	Charges mobiles pour		Portée	Charges mobiles pour		Portée	Charges mobiles pour	
	la circulaire de 1877	l'ordonnance de 1870		la circulaire de 1877	l'ordonnance de 1870		la circulaire de 1877	l'ordonnance de 1870
m	t	t	m	t	t	m	t	t
1·0	24·0*	26·0	5	9·8	10·0	30	4·3	4·0
1·5	16·0*	17·5	10	7·3	8·3	40	4·1	4·0
2·0	12·0	15·0	15	5·7	6·7	50	3·9	4·0
2·5	11·0	14·2	20	4·9	5·0	60	3·7	4·0

* Complété pour une charge sur essieu de 12 tonnes.

Nous ferons voir toutefois au N° *XXXVI* que la circulaire française est en réalité bien plus rigoureuse que l'ordonnance de 1870, par ce que le travail du fer y est limité à 600^{kg} par cm^2 tandis que l'ordonnance admettait une limite de 800^{kg} au cm^2.

** Dans son ouvrage publié en 1880 („Eisenbahnwesen in Frankreich", Wien. C. Gerold's Sohn) l'auteur discutant (p. 81 à 99) cette circulaire à fait ressortir au moyen de calculs précis, la nécessité d'adopter pour toute réglementation de ce genre deux échelles de surcharge distinctes. Les charges proposées alors (p. 94 et 97 et pl. V) suffisaient pour un train composé de trois locomotives (N° 1021 à 1040) de la Cie du Midi pesant 74^t chacune avec son tender, et d'une suite de wagons pesant 15^t4 chacun; les effets de ce train sur les ponts ne sont pas dépassés actuellement. Les charges proposées seraient en nombres ronds:

(6)

Portée	Charges mobiles pour les		Portée	Charges mobiles pour les		Portée	Charges mobiles pour les		Portée	Charges mobiles pour les	
	moments a	eff. tranch. b		moments a	eff. tranch. b		moments a	eff. tranch. b		moments a	eff. tranch. b
m	t	t	m	t	t	m	t	t	m	t	t
1·0	27·6	27·6	5	10·7	13·3	30	5·5	6·6	80	4·3	4·6
1·5	18·4	20·6	10	8·0	9·0	40	5·3	6·1	100	4·0	4·2
2·0	13·5	18·0	15	6·3	8·0	50	5·1	5·6	120	3·8	4·0
2·5	12·5	16·0	20	6·0	7·3	60	4·9	5·2	160	3·4	3·5

La nouvelle ordonnance autrichienne du 15 Sept. 1887 a admis ces chiffres sans changement pour les grandes portées, et des chiffres un peu supérieurs pour des portées moindres, afin de tenir compte des locomotives-Arlberg.

qui sont voisines du milieu de la portée, en prescrivant de procéder par interpolation pour les parties de pont intermédiaires *.

On doit d'autre part, comme pour toutes les prescriptions de surcharge antérieures, effectuer toutes les interpolations nécessaires en ce qui concerne la portée du pont, lorsque celle-ci se trouve comprise entre deux portées de l'échelle prescrite. La complication qui en résulte pour l'application pratique de ces prescriptions très-étudiées, en fait oublier la valeur scientifique, car les constructeurs préféreront le plus souvent faire directement leurs calculs au moyen des trains equivalents de surcharge qui sont également indiqués par la circulaire russe **, plutôt que de recourir à toutes les interpolations que nous venons d'indiquer.

2. Forme à donner aux prescriptions de surcharge.

En établissant les prescriptions de surcharge de l'ordonnance autrichienne on a voulu avant tout qu'elles soient d'une application pratique facile tout en conservant la plus grande exactitude possible. On se représentait bien que les charges mobiles pouvaient être fixées dans tous les cas soit sous la forme de „trains types de surcharge“ indiqués par les écartements et les charges des essieux (ou bien encore seulement par les locomotives, tenders et wagons qui les composent, sans ordre fixé à l'avance) soit sous la forme de „charges uniformément reparties“ équivalentes.

Le premier système semblerait préférable au premier abord: une seule esquisse des „trains types de surcharge“ ou des locomotives tenders et wagons à considérer, suffit en pareil cas pour tous les ponts et leurs parties composantes, et l'ordonnance ou circulaire à établir se trouve ainsi toute faite d'une manière satisfaisante.

En examinant les choses de plus près on reconnaît cependant bien vite qu'un pareil système tourne la difficulté au lieu de la résoudre.

Les prescriptions de surcharge à établir devaient avoir pour base un système de charges mobiles suffisant dans tous les cas pour les effets de surcharge de tout le matériel roulant circulant

* Les ingénieurs russes ont choisi les trains de surcharge exactement comme l'auteur l'avait fait en 1880 (page 95 de l'„Eisenbahnwesen in Frankreich“) en les définissant comme „Gurtbelastungszug“ et „Strebenbelastungszug“ que nous traduirons par „train fléchissant“ et „train tranchant“ et les composant chacun de trois locomotives à quatre essieux, de leurs tenders et d'une suite de wagons. On paraît avoir omis toutefois d'appliquer aussi le „train fléchissant“ au calcul des efforts tranchants pour des portées de moyenne grandeur. Une même échelle de charges commune sert au calcul des moments et des efforts tranchants pour les parties situées à moins de 2 *m* (1 sagène) des appuis. Avec des valeurs arrondies en *m* et *t* les trois échelles de charges de la circulaire russe correspondent environ aux suivantes:

(7)

Portée	Charge mobile a: pour M_x si $x = \frac{l}{2}$	Charge mobile b: pour M_x et V_x si $x < 2^m$	pour V_x si $x = \frac{l}{2}$	Portée	Charge mobile a: pour M_x si $x = \frac{l}{2}$	Charge mobile b: pour M_x et V_x si $x < 2^m$	pour V_x si $x = \frac{l}{2}$	Portée	Charge mobile a: pour M_x si $x = \frac{l}{2}$	Charge mobile b: pour M_x et V_x si $x < 2^m$	pour V_x si $x = \frac{l}{2}$	Portée	Charge mobile a: pour M_x si $x = \frac{l}{2}$	Charge mobile b: pour M_x et V_x si $x < 2^m$	pour V_x si $x = \frac{l}{2}$
m	t	t	t	m	t	t	t	m	t	t	t	m	t	t	t
1·0	30·0*	30·0*	60·0*	5	12·0	14·5	18·6	30	5·5	6·3	7·3	80	4·6	4·8	5·8
1·5	20·0*	22·5*	40·0*	10	7·5	8·5	12·4	40	5·3	5·9	6·6	100	4·3	4·5	5·6
2·0	15·0	20·0	30·0	15	6·0	7·3	9·8	50	5·2	5·6	6·3	120	4·0	4·2	5·4
2·5	13·7	18·7	26·7	20	5·6	6·8	8·4	60	5·0	5·3	6·1	160	3·7	3·8	4·9

* Valeurs ajoutées en conformité de la charge sur essieu de 15 *t* d'après l'Art. II et de l'écartement des essieux de 1 *m* 32, tant pour Mx au milieu de la portée que pour Vx dans les deux dernières colonnes.

Les deux premières colonnes de charges correspondent à peu près aux échelles a et b de l'ordonnance autrichienne, la troisième est en réalité superflue ainsi que nous le ferons voir plus tard. Nous devons du reste faire remarquer expressément que les échelles de charges mobiles citées ici (7) et précédemment (6) (5) (4) ne doivent nullement être considérées comme reproduisant les chiffres mêmes des documents originaux mais bien plutôt comme donnant des contours polygonaux qui, formés avec les abscisses d'entrée de l'ordonnance autrichienne remplacent le mieux possible les contours analogues qu'on obtiendrait comme expressions graphiques des prescriptions citées; on peut ainsi faire facilement la comparaison avec les échelles a et b admises en Autriche.

** L'écartement total des essieux de locomotives $= 3 \times 1^m32 = 3^m96$, leur longueur totale $= 9^m58$. La charge sur un essieu et de 15^t jusqu'à $l = 6^m4$, de 13^t75 jusqu'à $l = 8^m54$ et 12^t5 pour $l > 8^m54$. La longueur d'un tender $= 6^m58$, son poids $= 3 \times 10^t67 = 32^t01$. La longueur d'un wagon $= 7^m52$, son poids $= 16^t40$.

sur les chemins de fer de l'Autriche, avec toutes les combinaisons de trains usuelles. Or celles-ci ne peuvent être représentées par un seul „train type de surcharge" ni même remplacées par l'indication seule d'une locomotive-type, d'un tender-type et d'un wagon-type, quoique dans la dernière hypothèse, celle des véhicules définis isolément, on puisse former en réalité un certain nombre de trains-types. Dans chaque cas spécial où il s'agirait avec ce système d'examiner si un train proposé peut ou non circuler sur une ligne donnée, il faudrait toujours en revenir à calculer à nouveau les efforts que produisent et le train donné et le train-type de surcharge sur tous les ponts de différentes ouvertures de la ligne considérée, ainsi que sur toutes les pièces qui les composent, et à examiner ensuite si les efforts produits par le train donné surpassent ou non ceux du train-type.

S'il est prouvé alors que le train donné est admissible pour une portée de pont il ne le sera plus pour une autre, si'l l'est pour les bandes d'un pont il ne le sera pas pour les croisillons, enfin même — pour suivre les ingénieurs russes — un train donné qui serait équivalent au train-type pour un élément de bande ou croisillon d'une maille, ne le serait peut être pas pour ceux des mailles suivantes . . . etc.

En effectuant toutes ces recherches et comparaisons par le calcul, il faudrait sans cesse recommencer à examiner de nouveau, pour chaque pièce de construction de chaque pont, quelle est la position la plus désavantageuse de chacun des trains à comparer etc. . . .

Ce sont ces objections et difficultés insurmontables résultant de l'application du système des trains-types qui ont déterminé pour l'ordonnance autrichienne du 15 Sept. 1887 comme pour toutes les ordonnances ou circulaires antérieures, l'adoption du système des prescriptions par charges uniformément reparties équivalentes; on a du en conséquence faire une fois pour toutes l'étude approfondie des moments de flexion et efforts tranchants résultant dans tous les cas possibles de la circulation du matériel roulant.

La conception des surcharges uniformément réparties fournit le moyen le plus simple d'évaluer les charges mobiles. Veut-on comparer p. e. les effets de deux trains sur une pièce de construction quelconque, il suffit de mettre en regard les surcharges par *m* équivalentes, pour obtenir de suite un résultat clair pour tous et d'où l'on déduit aussi de suite au besoin, l'excédant de surcharge estimé en centièmes.

3. Généralités sur les surcharges prescrites en Autriche.

D'après les études très-détaillées, qui ont été faites à ce sujet et que nous discutons plus loin, on est parvenu à mettre les prescriptions autrichiennes de surcharge sous la forme très-simple de deux échelles de charges mobiles avec une douzaine de nombres chacune; et nous prouverons qu'en procédant de cette manière on a pu réussir, au moins aussi bien que les savants auteurs de la circulaire russe, à tenir compte des effets exacts qu'il s'agit de représenter.

Le train-type de surcharge considéré tout d'abord se compose de trois locomotives à quatre essieux avec leurs tenders et le nombre de wagons nécessaires, ainsi que cela est indiqué au § 3 lit. *d* de l'ordonnance. Les échelles de surcharge obtenues à l'aide de ce train* ont été légèrement déplacées ensuite; il s'agissait de les mettre d'accord avec d'autres exigences concernant les petites ouvertures et de modérer leurs indications pour les grandes. Le système de prescription par charges équivalentes uniformes facilitait ce genre de corrections. En étendant ces calculs à toutes les sections des ponts considérés on est arrivé non seulement à améliorer très-sensiblement l'échelle **a** pour les bandes, mais encore à donner à l'échelle **b** pour les croisillons, une forme entièrement nouvelle où l'on admet comme valeurs d'entrée les longueurs surchargées.

Pour les lignes d'intérêt local on a procédé tout d'abord de la même manière que pour les lignes d'intérêt général, mais en prenant pour point de départ les trains plus légers indiqués au § 3 lit. *h* de l'ordonnance. C'est en comparant tous les résultats ainsi obtenus, qu'on est arrivé ensuite à ranger toutes les échelles de surcharge suivant le système définitivement adopté.

Ainsi que cela ressort surtout des explications données sur le § 12 de l'ordonnance, les échelles de surcharge **a** et **b** définitivement admises au § 3, doivent être en réalité considérées comme des contours polygonaux aussi simples que possible ** enveloppant à très-peu près tous les

* C'est-à-dire les 2 polygones obtenus avec le „train fléchissant" et le „train tranchant" qui en dérivent.

** Les sommets de polygone mentionnés par les échelles, ont leurs coordonnées exprimées en nombres ronds, et les côtés rectilignes à pentes simples également arrondies, facilitent les interpolations qui ne donnent jamais lieu à l'emploi des fractions périodiques. Les prescriptions antérieures citées plus haut sont indiquées de la même manière.

contours représentatifs des moments de flexion et efforts tranchants qui résultent de tous les trains reconnus de fait admissibles sur les chemins de fer, de manière que les écarts entre ces contours et l'enveloppe réelle, ne dépassent généralement pas 3 à 6%, et dans les cas exceptionnels d'un ensemble de circonstances défavorables, environ 10%.

On a en tout consideré (voir N° *XXXV* Tome I) plus de 40 Trains de surcharge, et les nombreux calculs comparatifs qui s'y rapportent ont prouvé que l'erreur de tolérance indiquée ci-dessus ne pouvait guère être diminuée sans restreindre inutilement la composition des trains en service ou sans rendre la construction des ponts coûteuse outre mesure. Les calculs en question en ce qui concerne les véhicules indiqués dans l'ordonnance, se trouvent reproduits aux N°s *XIX* à *XXV*. Le tableau graphique *XXVI* donne l'ensemble des résultats obtenus.

En se contentant de l'exactitude définie par les limites de tolérance indiquées ci-dessus, on a pu d'autre part étendre l'usage des échelles **a** et **b** au calcul des ponts sur les lignes d'intérêt local (au moyen des coefficients de réduction 80% et 60%) et même utiliser ces échelles de surcharges pour le calcul des poutres transversales et des longerons de ponts quelconques. Les prescriptions autrichiennes ont pu de cette manière être encore notablement simplifiées sans perdre leur caractère de généralité.

Nous expliquerons plus loin les considérations qui ont conduit aux trois classes de surcharges adoptées ainsi que les nouvelles méthodes de calcul qui s'y rapportent, mais nous devons exposer ici d'abord les procédés de calcul et résultats numériques qui ont servi à déterminer les charges uniformes équivalentes.

XV. Définition des surcharges uniformes équivalentes.

1. Charges équivalentes pour une pièce considérée.

Lorsqu'il s'agit de déterminer les dimensions d'une pièce quelconque d'un pont, en vue d'un train de surcharge donné, on devra rechercher, parmi toutes les positions possibles du train, celle qui dans la pièce considérée donne le plus grand effort possible en valeur absolue. On nomme alors „charge équivalente uniforme" (ou uniformément répartie) celle qui, comparée au train de surcharge couvre environ les mêmes parties du tablier de voie, et provoque les mêmes efforts dans la pièce considérée.

Toutefois comme la charge uniformément répartie, qui couvre une partie du pont, peut varier en étendue et en valeur par m^2 ou m courant, il semble devoir en résulter qu'à chaque train de surcharge on peut faire correspondre un grand nombre de charges uniformes équivalentes répondant à la définition donnée. On est convenu de limites l'étendue de la charge uniforme à toutes les parties du tablier de voie où elle a pour effet d'augmenter l'effort supporté par la pièce considérée. De cette manière pour chaque pont et pour chaque pièce la partie du tablier de voie qu'il y a lieu de surcharger se trouve pour ainsi dire fixée à l'avance suivant le système de construction adopté, et la définition donnée de la charge équivalente concerne uniquement la charge par m^2 ou m courant à admettre.

On sait par exemple que pour un pont à travées indépendantes avec poutres à âme pleine, on détermine les dimensions des bandes en supposant que la surcharge s'étende sur toute la portée, que pour un pont en arc analogue, au contraire, il faut supposer qu'une ou deux parties seulement de la portée se trouvent en charge, suivant la région des bandes que l'on considère*. De même pour les ponts que nous venons de mentionner, l'âme pleine ou un treillis à petites mailles qui la remplacerait, doit être determiné en supposant que la surcharge couvre une partie du pont bien connue à l'avance.

Même dans le cas de nos constructions modernes à grandes mailles dites à treillis ou à triangles, que l'on calcule, comme on sait, d'après la théorie des systèmes articulés, c. a. d. en supposant que tous les poids et charges se trouvent concentrés dans les articulations ou nœuds, la conception des charges uniformes équivalentes peut encore toujours être nettement précisée; il suffit d'admettre que chaque nœud reçoit toutes les charges agissant de milieu en milieu des mailles adjacentes et de s'en tenir du reste pour chaque pièce de la construction, aux nœuds connus à l'avance comme devant être chargés, ou aux milieux de mailles qui d'après cela doivant former les limites de la charge uniforme équivalente.

Lorsque par conséquent il sera question de déterminer les dimensions d'une pièce quelconque d'une construction en vue d'un train de surcharge donné ou

* Voir la théorie de M. Albaret. — Annales des Ponts et Chaussées 1862. 2me semestre p. 305 puis 1870 p. 463 à 573, pour les tympans rigides.

de la charge uniforme équivalente à admettre pour les calculs il sera toujours bien entendu que l'etendue de la partie du tablier de voie à surcharger, se trouve déterminée d'avance par le système de construction adopté, tandis que la charge équivalente par *m* est réellement l'inconnue dépendant uniquement du train qu'il s'agit de remplacer.

Cette charge que nous désignons par *p* dans cet ouvrage (par *m* courant de voie) désigne généralement dans le langage technique ordinaire la charge équivalente cherchée; cela est d'autant plus usité que pour les types de pont les plus répandus à travées indépendantes ou continues, l'étendue des charges uniformes à admettre dans chaque cas est déterminée par des règles simples bien connues, qui excluent d'avance toute recherche ultérieure.

Pour les pièces qui peuvent être alternativement tendues et comprimées, on distingue une charge uniforme équivalente pour la tension et une charge uniforme équivalente pour la compression; ce sont dans tous les cas possibles deux surcharges complémentaires qui, réunies, couvriraient ensemble tout le tablier de voie du pont. Les deux valeurs des charges unitaires par *m* ne sont toutefois généralement pas égales.

2. Charges équivalentes quant aux moments de flexion et quant aux efforts tranchants.

Nous sommes accoutumés dans la pratique des calculs de ponts, à composer toutes les forces extérieures qui agissent sur une section de pont (y compris les réactions d'appuis) en un couple unique représentant le moment de flexion et une force unique représentant l'effort tranchant. Ces forces résultantes étant supposées appliquées à la section, y peuvent remplacer l'ensemble des réactions exercées sur l'une des deux parties de la construction par l'autre partie, censée supprimée.

Pour les ponts à constructions indépendantes* (à poutres reposant sur les appuis) usuelles on se sert des moments pour le calcul des bandes et des efforts tranchants pour le calcul des croisillons. On confond en pareil cas les charges équivalentes pour un élément de bande ou un croisillon avec celles qui donnent le moment de flexion ou l'effort tranchant correspondant, et l'on dit: „charge uniforme équivalente quant au moment de flexion ou quant à l'effort tranchant, car c'est à ces deux grandeurs statiques qu'on est toujours ramené dans toutes les recherches faites en pareille matière.

Les charges équivalentes quant aux moments de flexion ou aux efforts tranchants ont en réalité une valeur spéciale pour chaque élément de bande ou croisillon; il était toutefois jusqu'ici d'usage chez les ingénieurs d'accepter pour le calcul des bandes entières la charge équivalente quant aux moments pour le milieu de la portée, et pour le calcul de tous les croisillons la charge équivalente quant à l'effort tranchant près d'un appui**.

Nous ferons voir dans la suite, comment, dans l'ordonnance autrichienne, on est parvenu à déterminer les charges quant aux moments, de façon qu'elles s'adaptent le mieux possible aux moments de toutes les sections, et les charges quant aux efforts tranchants de façon qu'elles s'adaptent d'une façon théoriquement parfaite à tous les efforts tranchants. Nous remarquons toutefois ici expressément que tous les calculs antérieurs et présents, faits pour déterminer les charges uniformes équivalentes pouvant remplacer un train de surcharge donné, concernent exclusivement les ponts à poutres reposant librement sur deux appuis placés à leurs extremités***.

---

* Pour toutes les constructions indépendantes ou poutres, l'effort tranchant est dirigé suivant la verticale. Pour les ponts en arc par contre, l'effort unique qui le remplace affecte pour chaque section une direction spéciale, en sorte que l'on décompose chacun de ces efforts en une force normale à la section (effort de compression) et une force normale à l'arc c. a. d. contenue dans la section (effort tranchant proprement dit).

** Pour le calcul des bandes cet usage a été presque exclusivement adopté. Pour le calcul des croisillons par contre, on s'est souvent servi du train de surcharge lui même en employant des procédés (souvent graphiques) conduisant à une estimation plus exacte des efforts que subissent les croisillons.

*** Voir à ce sujet les publications suivantes:

1. Annales des Ponts et Chaussées No 3 ex 1877 (Janvier). Deuxième Note sur les calculs de Stabilité des poutres longitudinales .... par C. H. Kleitz. 13 Mai 1876. (La 1re Note du 15 Oct. 1855 n'avait paru qu'en autographie.) L'auteur ne s'occupe que des moments de flexion, et arrive comme conclusion à des propositions, dans lesquelles on ne peut guère trouver une expression suffisante de son travail très-soigné et instructif.

2. Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereines. II. Heft. 1870. p. 29. Dr. E. Winkler. Contient un exposé théorique fondé sur la considération des polygones funiculaires et des polygones des forces.

Pour les ponts avec poutres continues, les ponts en arcs, les ponts suspendus . . . etc., les résultats obtenus ne devraient donc en toute rigueur point être appliqués. La pratique des calculs de résistance a toutefois prouvé que pour la plupart de ces types moins répandus, on peut encore en toute sécurité faire usage des charges uniformes équivalentes trouvées comme il est expliqué ci-dessus. Pour les ponts à poutres droites continues que l'on adopte plus souvent, le calcul montre même que les hypothèses de surcharge en question sont parfaitement admissibles; elles le sont d'autant mieux que les constructions de ce genre n'ont, comme l'on sait, presque jamais à subir les combinaisons de surcharge, que la théorie (voir *XLVIII* à *LIX* du I volume) impose pour les calculs de résistance. C'est pour ces raisons aussi que ces ponts ont pu être compris parmi les constructions aux quelles s'appliquent directement les échelles **a** et **b** de l'ordonnance.

La théorie suivante des charges uniformes équivalentes* quant aux moments de flexion et aux efforts tranchants, suscités dans les constructions usuelles à travées indépendantes reposant librement sur deux appuis, fera voir de quelle manière on peut satisfaire avec une exactitude suffisante aux exigences de la pratique des constructeurs.

*XVI. Recherche de la charge équivalente quant aux moments de flexion**.

1. L'enveloppe des polygones des moments doit être cherchée vers le milieu de la portée.

Pour produire sur une construction de pont les flexions les plus défavorables à l'aide d'un train à composer avec des véhicules donnés, il faut en général placer ces véhicules de façon à concentrer les essieux les plus chargés vers le milieu de la portée. Si l'on dispose pour ce train (ainsi que cela est indiqué au N° *XIV* : 3) de 3 locomotives accompagnées de leurs tenders, on devra les disposer ensemble vers le milieu du train de telle façon que deux machines soient accouplées face à face, la troisième venant à la suite et les wagons complétant le train des deux côtés.

Si maintenant, au droit d'un certain nombre de sections d'un pont de portée donnée, on porte des ordonnées équivalentes aux moments de flexion correspondant aux diverses positions désavantageuse du train de surcharge, il en résultera pour chacune de ces positions, un polygone des moments de flexion, qui se fermera à zéro sur chacun des appuis. C'est le contour enveloppe de tous ces polygones que l'on devrait, pour opérer d'une manière exacte, renfermer dans la parabole représentative des moments de flexion, provenant de la surcharge uniforme équivalente.

En continuant ces recherches on pourra toutefois se convaincre bien vite que, surtout pour des portées inférieures à 30^{m}, le contour enveloppe des polygones a une forme plus bombée près des appuis et plus aplatie vers le milieu, se rapprochant plus de l'anse de panier que de la parabole dont le courbure va en croissant depuis les appuis jusqu'à son sommet.

Si donc, dans ces conditions, on voulait admettre une charge uniforme suffisamment grande, pour que la parabole représentative qui en dérive renferme entièrement le contour enveloppe des polygones, même dans le voisinage des appuis, on serait amené à une valeur de surcharge tout à fait exagérée; le sommet de la parabole représentative serait bien au-dessus du contour des polygones, et l'inspection seule de l'épure montrerait que cette solution est inadmissible. On est donc conduit à revenir au principe pratique accepté depuis longtemps par les ingénieurs, qui indique que c'est vers le milieu de la portée et non dans le voisinage des appuis qu'il faut chercher à couvrir les polygones des moments de flexion, à l'aide de la parabole de la charge uniforme; il est d'autant plus logique d'opérer ainsi, que les différences entre les ordonnées de la parabole ainsi déterminée et celles du contour des polygones sont relativement petites, et que la pratique des constructeurs les conduit à donner près des appuis aux bandes des poutres des dimensions notablement plus fortes que ne l'indiquerait la théorie.

La charge uniforme équivalente, quant aux moments de flexion, à un train donné sera donc, pratiquement parlant, celle qui produit dans le voisinage du milieu de la portée le même moment de flexion maximum que le train; en supposant qu'on ait choisi pour chaque section la position du train la plus défavorable, et que parmi toutes les sections voisines on ait pris ensuite celle qui a fourni le maximum le plus élevé.

---

* Traduit presque exactement d'après le mémoire du même auteur publié en 1880: Eisenbahnwesen in Frankreich, page 87 à 91 et planche V.

2. Maximum au milieu de la portée.

Le maximum maximorum des moments de flexion pour une portée et un train de surcharge donnés, ne se produit pas exactement au milieu de la portée, mais en un point qui en est très-peu éloigné *; l'écart est d'autant moindre que la portée est plus grande et que par conséquent la répartition des essieux a moins d'influence.

Comme d'autre part pour faire les calculs de résistance servant à déterminer les dimensions des bandes, on doit tenir compte non seulement des moments de flexion provenant de la charge mobile et représentés par le contour enveloppe dont nous avons parlé plus haut, mais encore des moments provenant de la charge permanente, qui sont toujours représentés par une parabole, il en résulte que le maximum maximorum des moments pour l'ensemble des charges à considérer se rapprochera encore d'avantage du milieu de la portée. On pourra donc en pratique, admettre avec toute sécurité, que généralement et surtout pour des ponts de grandes portées, le maximum maximorum, peut être remplacé par le maximum au milieu de la portée.

3. Force médiane d'un train relativement court.

Le problème de la charge uniforme équivalente quant aux moments tel qu'il vient d'être précisé se trouve maintenant notablement simplifié et ramené à l'étude des moments au milieu de la portée. Toutefois il faudrait encore un travail considérable et pénible pour calculer les moments de flexion correspondant à chaque portée de pont et à toutes les positions du train et pour déduire ensuite des résultats ainsi obtenus le moment maximum qui fournit la valeur cherchée p de la charge uniforme équivalente par mètre de voie. Ce procédé ne donnerait d'ailleurs que des valeurs isolées de p pour certaines portées de pont, et non la courbe continue des valeurs de p considérées comme ordonnées pour la suite continue des portées croissantes considérées comme abscisses, courbe qu'il importe évidemment d'obtenir.

Le procédé de calcul expliqué ci-après ** élimine les difficultés que nous venons de mentionner ***.

Considérons d'abord le cas d'un pont de grande portée, et d'un train de longueur très-notablement moindre, pouvant se déplacer suffisamment sur le pont sans que des essieux d'avant ou d'arrière viennent à quitter de la portée. Désignons par:

(9)
- $l = 2a$ . . . . la portée donnée du pont,
- $P_1\,P_2\,P_3 \ldots P_n$ . . . les forces formant la charge mobile sur le pont,
- $a_1\,a_2\,a_3 \ldots a_n$ . . . leurs distances au milieu de la portée, comptées positivement sur la gauche et sur la droite indifféremment,
- $b_1\,b_2\,b_3 \ldots b_n$ . . . les distances de chacune d'elles à l'appui le plus proche, comptées de la même manière.

---

* L'exemple extrême suivant d'une locomotive à deux essieux chargés de P_1, P_2 et écartés de m, placée à volonté sur un pont de portée $l = 2a$, en fournira le preuve. On a sur la figure à l'endroit de l'essieu P_1:

(8)

$$\text{Moment de flexion} = \frac{l-x}{l}\left[x\,(P_1 + P_2) - m\,P_2\right]$$

Ce moment dans la section où se trouve P_1 est un maximum pour cette section, eu égard à toutes les positions possibles de la locomotive, en tant que $P_1 > P_2$. Le maximum maximorum s'obtient immédiatement en différentiant par rapport à la variable x, ce qui donne:

$$x = a + \frac{1}{2}\,m\,\frac{P_2}{P_1 + P_2} \quad \text{et} \quad \text{Mom. max.} = \frac{1}{2}\,\frac{P_1 + P_2}{a}\left[a - \frac{1}{2}\,m\,\frac{P_2}{P_1 + P_2}\right]^2$$

Ce maximum maximorum ne diffère du moment obtenu avec $x = a$, que de la quantité $= \frac{1}{8a}\;\frac{m^2\,P_2^2}{P_1 + P_2}$

Même dans le cas le plus absolument défavorable ou $P_2 = P_1$ et $m = a$, la différence trouvée ne serait que de $^1/_{16}\,a\,P_1$ ou $^1/_8$ du moment $^1/_2\,a\,P_1$ produit alors au milieu de la portée. Cet exemple est du reste exceptionnel. Nous montrons plus loin (22) comment on trouve toujours assez simplement le maximum maximorum et nous prouvons en même temps qu'il se produit généralement très-près du milieu de la portée.

** Ces calculs ainsi que tous les calculs analogues, supposent que les charges mobiles reposent directement sur les maîtresses-poutres, et ne tiennent donc pas compte de la répartition des charges résultant de la présence des traverses de la voie ainsi que des poutres transversales et des longerons. L'usage pratique des ingénieurs de négliger ces influences secondaires est du reste justifié théoriquement par les propriétés connues des forces parallèles (résultantes et composantes) à la condition que l'on fasse abstraction de la continuïté des rails sur les traverses et des longerons sur les poutres transversales.

*** Ce procédé a été mis en pratique avec succès par l'auteur à partir de 1873 pour les calculs annexés aux procès verbaux d'épreuves de ponts sur les lignes nouvelles à ouvrir.

On trouve alors pour la charge p par mètre uniformément répartie sur le total de la portée qui provoque au milieu, le même moment que le train*:

(10) $p = \frac{P_1 + P_2 + .. P_n}{a} - \frac{a_1 P_1 + a_2 P_2 + .. a_n P_n}{a^2}$ $\qquad p = \frac{b_1 P_1 + b_2 P_2 + .. b_n P_n}{a^2}$,

(11) . . $p = \frac{\Sigma P_n}{a} - \frac{\Sigma a_n P_n}{a^2}$ ou encore (12) . . . $p = \frac{\Sigma b_n P_n}{a^2}$

Cette valeur de p pour une portée donnée, devient évidemment maximum pour la position du train qui rend $\Sigma a_n P_n$ minimum. La recherche de cette position du train sur le pont ou inversement de la position qu'occupe alors le milieu de la portée par rapport au train, se réduit par suite au problème suivant:

Un certain nombre de forces parallèles $P_1 P_2 P_3 \ldots P_n'$ étant données en grandeur et position dans un plan, trouver un point sur une droite normale commune, donnée dans le plan, pour lequel la somme $\Sigma a_n P_n$ des moments de toutes les forces pris en valeur absolue, soit minimum.

Il est aisé de reconnaître tout d'abord que le point cherché doit se trouver situé à l'intérieur du faisceau de forces données, car si l'on choisissait un point extérieur X quelconque, la somme $\Sigma a_n P_n$ rapportée à ce point, serait plus grande que la même somme rapportée à tout autre point X_1 compris entre X et le faisceau, et pour lequel tous les moments sont moindres.

Considérons donc un point X quelconque à l'intérieur du faisceau et cherchons de quel côté il faut déplacer ce point pour que la domme $\Sigma a_n P_n$ qui s'y rapporte diminue encore. Désignons à cet effet par $\Sigma a_n' P_n'$ et $\Sigma a_n'' P_n''$ les sommes partielles de moments obtenus sur la droite et sur la gauche du Point X des façon que:

(13) . . . . $(\Sigma a_n P_n) = \Sigma a_n' P_n' + \Sigma a'' P_n''$.

Prenons maintenant par exemple sur la droite et à une très-petite distance x de X, un autre point X_1; la somme des moments qui s'y rapporte sera:

(14) . . $(\Sigma a_n P_n)_1 = \Sigma (a_n' - x) P_n' + \Sigma (a_n'' + x) P_n'' = \Sigma (a_n P_n) - x [\Sigma P_n' - \Sigma P_n'']$.

On voit d'après cela qu'un déplacement vers la droite de X en X_1 fera diminuer ou augmenter la somme des moments suivant que l'on a:

(15) . . . . $\Sigma P_n' \gtrless \Sigma P_n''$. On en conclut:

La somme $\Sigma a_n P_n$ des moments d'un faisceau de forces parallèles $P_1 P_2 P_3 \ldots P_n$ rapportés à un point X quelconque situé à l'intérieur de ce faisceau, diminue lorsque ce point se déplace légèrement dans le sens du plus grand des deux groupes ($\Sigma P_n'$ ou bien $\Sigma P_n''$) de toutes les forces qu'il sépare.

Si pour diminuer $\Sigma a_n P_n$ on continue à déplacer le point X dans le sens convenable, il finira par se fixer sur une des forces P_m qui divise la somme de toutes les forces du faisceau en deux parties telles (et à peu près égales pour de grandes portées) que tout déplacement nouveau laisse toujours la plus grande fraction du faisceau du côté de P_m. Cette force que nous désignerons par *„force médiane"* (mittlere Kraft) étant placée sur le milieu de la portée, donne le maximum cherché.

La conception très-simple de la force médiane d'un train (ou d'une portion de train sur un pont), peut être expliquée encorè à l'aide d'une construction graphique. Si l'on suppose que toutes les forces ou charges d'essieux du train soient représentées par des longueurs et portées bout à bout sur une ligne droite dans l'ordre même où elles se présentent, le milieu de la longueur totale ainsi obtenue tombera toujours sur la longueur représentative de la force médiane. Ces explications et celles qui les précédent conduisent aux deux règles générales ci-après:

1° Lorsque la portée du pont dépasse suffisamment la longueur du train de surcharge, pour que les déplacements de ce dernier à considérer n'altèrent pas ΣP_n, le maximum de p s'obtient en plaçant la *„force médiane"* sur le milieu de la portée.

2° Si, comme cela se produit par exemple pour toute disposition symétrique de la charge mobile, il n'y a pas de „force médiane", c'est alors *„l'inter-*

* Ces formules se vérifient immédiatement dans le cas d'une seule force P_n:

Moment de flexion $= \frac{a - a_n}{2a} \cdot P_n \times a = \frac{b}{2a} \cdot P_n \times a = \frac{1}{2} p a^2$

et l'effet produit par l'ensemble des forces $P_1 P_2 P_3 \ldots P_n$ s'obtient évidemment en réunissant les effets produits par chacune d'elles.

valle médian des forces" auquel on arrive qui doit contenir le milieu de la portée en un quelconque de ces points, pour que le moment de flexion soit le plus grand possible, ce moment restant le même tant que cette condition est satisfaite*.

4. Les diverses forces médianes d'un long train sur un pont.

Le cas qui se présente le plus souvent est celui où le train de surcharge étant plus long que le pont, ne peut le couvrir qu'avec une partie de ses véhicules.

Si l'on veut alors déplacer le train de façon que la force médiane des essieux situés sur le pont se rapproche du milieu de la portée, il arrive souvent que certains essieux quittent la travée d'un côté tandis que d'autres y entrent de l'autres côté, faisant ainsi à chaque fois varier et l'ensemble ΣP_n des forces qui agissent sur le pont et la position de la force médiane à considérer à chaque instant. On remarquera toutefois que le train se déplaçant d'une manière continue dans le même sens, la disparition à l'avant ou l'apparition à l'arrière, d'un essieu en charge, ne peuvent produire l'une et l'autre qu'un déplacement subit de la force médiane vers l'arrière. On pourra donc continuer toujours à déplacer le train dans le même sens jusqu'à

* Si au lieu de chercher le maximum au milieu du pont on le voulait trouver pour une section quelconque divisant la longueur l de la portée en deux parties inégales a' et a'' détachées à droite et à gauche de cette section, ce serait la „*force médiane proportionnelle*" qu'il faudrait y placer. Nous nommons ainsi une force P_m telle que le léger déplacement considéré ci-dessus laisserait toujours du côté de P_m la partie du faisceau qui est proportionnellement la plus grande: Cette nouvelle conception et la règle qui s'y rapporte, ressortent du calcul suivant analogue à celui du texte. On trouve:

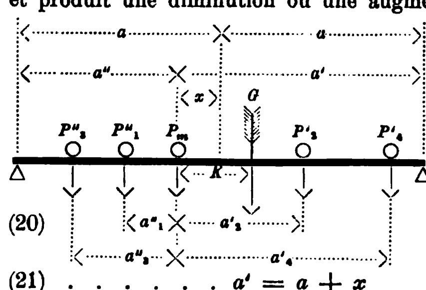
(16) . . . . . Moment de flexion $= \frac{a' a''}{2a} \Sigma P_n - \frac{1}{2a} \left[a'' \Sigma a'_n P'_n + a' \Sigma a''_n P''_n \right] = M$

(17) . . . . $p = \frac{\Sigma P_n}{a} - \frac{1}{a} \left[\frac{\Sigma a'_n P'_n}{a'} + \frac{\Sigma a''_n P''_n}{a''} \right]$

Le maximum de p exige le minimum du facteur entre parenthèses. Un déplacement de l'origine X des moments, d'une quantité très-petite x vers le point X_1 situé à droite, donne pour cette nouvelle origine des moments:

(18) . . $\left(\frac{\Sigma a'_n P'_n}{a'} + \frac{\Sigma a''_n P''_n}{a''} \right)_1 = \left(\frac{\Sigma a'_n P'_n}{a'} + \frac{\Sigma a''_n P''_n}{a''} \right) - x \left(\frac{\Sigma P'_n}{a'} - \frac{\Sigma P''_n}{a''} \right)$

et produit une diminution ou une augmentation du facteur en question, suivant que:



(20)

(19) . . . . $\frac{\Sigma P'_n}{a'} \gtrless \frac{\Sigma P''_n}{a''}$

On en tire comme dans le texte la notion de la „force médiane proportionnelle" qu'il faut placer sur la section pour obtenir le maximum.

Ces considérations conduisent aussi directement au maximum maximorum théorique dans le cas le plus général (voir l'exemple 8 déjà cité). Soit G le centre de gravité (20) de toutes les forces de ΣP_n et K sa distance à la force P_m, soit enfin x la distance de cette dernière au milieu de la portée; on a:

(21) . . . . . . $a' = a + x \qquad a'' = a - x \qquad \Sigma a'_n P'_n - \Sigma a''_n P''_n = K \Sigma P_n$

La substitution dans l'équation (16) donne après réduction:

(22) . $M = \frac{a^2 + Kx - x^2}{2a} \Sigma P_n - \frac{1}{2} \left[\Sigma a'_n P'_n + \Sigma a''_n P''_n \right]$ et $\frac{dM}{dx} = \frac{1}{a} \left(\frac{K}{2} - x \right) \Sigma P_n$

Le maximum obtenu sur une section donnée en y plaçant la force médiane proportionnelle, devient par conséquent un maximum maximorum, eu égard à toutes les sections, lorsqu'on a en même temps $x = K:2$ ou en d'autres termes lorsque le centre de gravité G et la médiane proportionnelle P_m du train se trouvent de part et d'autre et à égale distance du milieu de la portée du pont. D'après cette règle fort simple et connue d'ailleurs depuis longtemps, on voit que lorsqu'on aura obtenu le maximum au milieu du pont, à l'aide de la méthode indiquée dans le texte, il suffira généralement d'un très-léger déplacement pour avoir le maximum maximorum, car, d'après la composition usuelle des trains, G et P_m sont presque toujours deux forces très-voisines l'une de l'autre, et P_m déterminée comme force médiane pour le milieu, ne cesse pas de rester médiane proportionnelle pour les points voisins.

Pour une section quelconque divisant la portée l en deux parties inégales a' et a'' la „*force médiane proportionnelle*" à placer sur la section s'obtiendrait d'une manière simple, en divisant la longueur totale obtenue à l'aide des forces placées bout à bout, dans le rapport $a' : a''$. Si, dans cette construction (ou celle du texte), le point de division vient à tomber exactement sur un point formant le bout commun de deux forces, c'est alors l'intervalle compris entre les essieux correspondants du train, et que nous nommerons „*intervalle médian proportionnel*" qui doit se trouver à cheval sur la section du pont considérée, avec un point quelconque de sa longueur, pour que l'on y obtienne le plus grand moment possible.

Si le pont avait à supporter non des essieux chargés mais une surcharge continue (uniforme ou non) la „force médiane" ou „médiane proportionnelle" devrait être remplacée par une ligne verticale divisant la surcharge en parties égales ou proportionnelles à a' et a''... etc.

ce que les conditions indiquées plus haut se trouvent réalisées et alors p qui est resté constamment croissant, aura atteint une valeur maximum*.

Si maintenant on continue à déplacer le train toujours dans le même sens, et avec lui la force médiane qu'il produit à chaque instant, cette force ayant alors déjà dépassé le milieu du pont s'en éloigne de nouveau et p diminue. Le mouvement continuant, les essieux, disparaissant à l'avant ou apparaissant à l'arrière, font subir à la force médiane une série de ressauts vers l'arrière, entre lesquels cette force possède un mouvement continu vers l'avant qui fait décroître p d'une manière continue. Il en sera ainsi jusqu'à ce que l'un des ressauts rejette la force médiane à l'arrière du milieu du pont, ce qui signifie qu'alors p à atteint un minimum, et ainsi de suite.

Nous pouvons maintenant nous représenter d'une manière générale comment p doit varier lorsqu'on fait passer sur un pont donné un train quelconque de longueur aussi grande que l'on voudra. Dès que le premier essieu apparaît sur le pont, la force médiane s'avance avec lui vers le milieu de la portée et p croit à partir de zéro. L'apparition de chaque essieu suivant peut faire subir à la force médiane un ressaut vers l'arrière; mais malgré ces reculs successifs, cette force, finit par atteindre le milieu de la portée et alors p est maximum. Les essieux les plus chargés de la locomotive en s'éloignant du milieu du pont entraînent avec eux la force médiane; celle-ci faisant diminuer p sans cesse, malgré ses sauts rétrogrades, chemine vers l'avant jusqu'à ce que la locomotive ait quitté le pont.

Si maintenant de nouveaux essieux lourds (une autre locomotive) apparaissent vers l'arrière, il en résultera des ressauts plus intenses qui rejetteront la force médiane derrière le milieu du pont**, et rendront alors p minimum. Mais ces essieux, en s'avançant sur le pont, entraîneront avec eux la force médiane et la rapprocheront du milieu en faisant croître p de nouveau et ainsi de suite . . . .

Si donc le train de surcharge est suffisamment long et formé de locomotives ou de véhicules lourds non contigus, p pourra passer par une série de maxima et de minima, et finira en suite par décroître jusqu'à zéro lorsque le train quittera entièrement le pont. A ce moment la force médiane après avoir franchi une dernière fois le milieu de la portée s'approchera de l'appui d'avant, et l'atteindra en même temps que le dernier essieu du train***. Le problème de la charge uniforme p par mètre de voie, équivalente quant aux moments de flexion, à un train pour une portée de pont donnée se réduit donc à ce qui suit:

1° Recherche des essieux du train qui pour la portée donnée, peuvent constituer une force médiane.

2° Calcul des valeurs de p obtenues en plaçant successivement chacun des essieux trouvés sur le milieu du pont, et choix de la plus grande de ces valeurs†.

Le calcul des valeurs de p s'effectue facilement à l'aide des formules (11) et (12); la première est préférable lorsqu'il s'agit d'un grand nombre des portées, la seconde fournit la solution la plus simple dans le cas d'un calcul isolé. Quant à la recherche des essieux pouvant constituer une force médiane, il serait toujours possible de la faire à l'aide de la construction graphique que nous avons indiquée au N° 3. Toutefois comme dans la plupart de trains en service

---

* Chaque disparition ou apparition d'un essieu P_n occasionne un changement subit et de la somme ΣP_n et de la force médiane; mais malgré cette discontinuité p varie d'une manière continue, car la partie de p qui dépend de P_n et qui est $\frac{P_n}{a} - \frac{a_n P_n}{a^2}$ devient nulle au moment de la disparition ou apparition de P_n. Par contre la derivée de p prise par rapport aux abscisses du déplacement, subit un changement brusque de valeur qui est $= \mp P_n : a^2$.

** Le cas où la force médiane ressaute en une seule fois de l'appui d'avant à l'appui d'arrière, c. a. d. d'une longueur égale à la portée, se produit lorsque deux essieux viennent à passer sur un petit pont dont la portée est égale à leur écartement.

*** Cette discussion n'exclue pas le cas où au lieu d'une force médiane on aurait un intervalle médian de forces à considérer et à déplacer dans le sens du mouvement jusqu'à ce qu'il soit à cheval sur le milieu de la portée, p conservant alors un certain temps la plus grande valeur cherchée. Même un ressaut rétrograde d'un pareil intervalle médian est possible (p. e. une locomotive à 4 essieux de 12^t avec écartements de 1^m2 passant sur un pont de 2^m40 de portée). Ces intervalles médians n'entrent parfois en fonction que pour une partie de leur longueur . . . etc.

† Toute la discussion du texte concernant les variations de p quant aux moments sur le milieu du pont et la force médiane (ou l'intervalle médian) à amener sur ce point, peut être généralisée très-facilement pour le cas d'une section de pont quelconque et de la force médiane proportionnelle (ou de l'intervalle médian proportionnel) qu'il faudrait y faire parvenir. On y aurait évidemment à constater des déplacements vers l'avant et ressauts vers l'arrière tout à fait analogues à ceux mentionnés dans le texte pour le milieu du pont.

ainsi que dans les trains types choisis pour les calculs préparatoires de l'ordonnance, il n'y a qu'un petit nombre d'essieux de cette espèce à choisir, et, comme pour tous les calculs cités plus loin les écartements et charges d'essieux sont toujours des nombres arrondis très-simples, on a trouvé plus commode de se servir d'un procédé numérique spécial, qui indique ces essieux tout en les utilisant en même temps et que nous allons exposer.

5. Courbe enveloppe des plus grandes charges équivalentes p quant aux moments au milieu du pont.

Dans la pratique il ne peut y avoir doute que sur le choix de 3 ou 4 essieux, pouvant donner une force médiane; on dressera à l'avance pour chacun de ces essieux un barême des valeurs de ΣP_n et $\Sigma a_n P_n$ que l'on obtient* en supposant que cet essieu reste placé au milieu de la portée, et que cette dernière croisse de part et d'autre simultanément, depuis zéro jusqu'à une valeur aussi grande que l'on voudra. Les Σ ne varient dans ces conditions que chaque fois qu'un essieu nouveau apparaissant d'un côté ou de l'autre sur la portée, vient ajouter sa part aux Σ déjà calculés précédemment. A l'aide du barême et de la formule (12)

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad p = \frac{\Sigma P_n}{a} - \frac{\Sigma a_n P_n}{a^2} = \frac{1}{a}\left[\Sigma P_n - \frac{\Sigma a_n P_n}{a}\right]$$

on pourra en suite obtenir p, pour une valeur quelconque de la portée $l = 2a$ moyennant deux divisions seulement, pour lesquelles on utilisera les Σ qui dans le barême correspondent à la valeur la plus voisine de a_n telle que

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_n \overline{\overline{<}} a \quad \ldots \text{ soit immédiatement inférieur à } a.$$

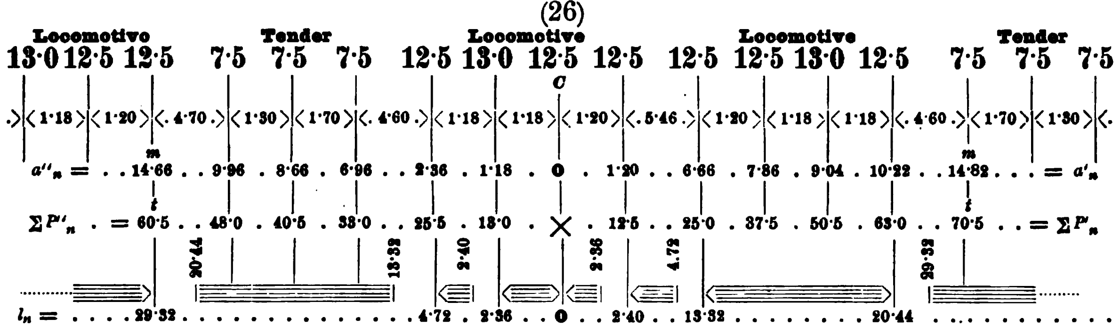
On obtient de cette façon la courbe continue des valeurs de p pour toutes les portées prises comme abscisses, et pour l'essieu considéré comme restant au milieu de la portée. La courbe construite présente une série de points singuliers pour toutes les abscisses $a = a_n$ où par suite de l'apparition d'un nouvel essieu, la loi de formation change. Entre deux points singuliers la courbure est généralement convexe vers le haut et l'on obtient la tangente en différentiant l'équation (23)

$$(25) \quad \ldots \quad \frac{dp}{dl} = \left[-\frac{\Sigma P_n}{a^2} + 2\frac{\Sigma a_n P_n}{a^3}\right]\frac{da}{dl} = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}\Sigma P_n - \frac{\Sigma a_n P_n}{a}\right]$$

On pourra donc tracer cette courbe aussi exactement que l'on voudra; il va sans dire toutefois qu'il n'y a lieu de prolongeur le barême des Σ et la courbe des charges p que pour des abscisses a pour lesquelles l'essieu considéré donne encore une force médiane car pour les autres abscisses c'est forcément un autre essieu qui doit occuper le milieu de la portée.

Pour mieux faire comprendre le procédé employe dans nos calculs au sujet de la dinstinction à faire entre les essieux les plus chargés, nous l'appliquons ci-après à l'exemple du train-Semmering** qui eu égard à ses écartements d'essieux est mieux approprié à une démonstration que les trains-types de composition trop simple, considérés par l'ordonnance. Le croquis schematique du train-Semmering, pour l'essieu C supposé sur le milieu du pont (avec mètres et tonnes) est le suivant:

(26)



La troisième ligne contient les distances a'_n a''_n de l'origine C aux essieux situés à droite et à gauche, et dans la quatrième ligne on a inscrit les Sommes $\Sigma P'_n$ et $\Sigma P''_n$ qui s'y rapportent en ne comptant évidemment ni d'un côté ni de l'autre l'essieu $C = 12^t 5$ qui se trouve sur l'origine. Ces chiffres font voir immédiatement si, pour une portée donnée, l'essieu C constitue ou non, une „force médiane“:

* par voie de simple addition principalement, comme on le verra ci-après.

** On sait que sur la ligne du Semmering où les déclivités atteignent plus de 25^{mm} par mètre, les trains sont remorqués par des machines exceptionnellement lourdes, qui constituaient pendant longtemps en Autriche le type le plus défavorable à considérer en matière de ponts.

Pour $l = 2a = 12^m$ par ex. on a $\Sigma P''_n = 25{\cdot}5 > 12{\cdot}5 = \Sigma P'_n$ et même en ajoutant $C = 12{\cdot}5$ sur la droite, l'inégalité subsisterait encore; donc l'essieu C n'est pas „force médiane" pour $l = 2a = 12^m$.

Pour $l = 2a = 20^m$ au contraire, on a $\Sigma P''_n = 48{\cdot}0 < 50{\cdot}5 = \Sigma P'_n$ et l'addition de $C = 12{\cdot}5$ renverse l'inégalité; donc l'essieu C constitue sûrement une force médiane pour la portée de $l = 2a = 20^m$.

En faisant croître la portée d'une manière continue à partir de zéro, la méthode que nous venons d'indiquer permet de reconnaître entre quelles limites de portée l'essieu C constitue une force médiane, et on trouve que cela aura lieu entre $l = 0$ et $l = 2^m36$, $l = 2^m40$ et $l = 4^m72$, $l = 13^m32$ et $l = 20^m44$, $l = 29^m32$ et .... ainsi de suite. Ces résultats ont été mis en évidence dans les deux dernières lignes de la figure (26); on a pour plus de clarté, indiqué les portées limites en nombres placées debout sur celui des deux côtés ou l'appui du pont se trouve alors situé entre deux essieux (le nouvel essieu apparaissant du côté opposé).

Dans les tableaux de calculs réunis plus loin à l'appui des charges prescrites par l'échelle a du § 3 de l'ordonnance autrichienne, on n'a inscrit sur la figure placée en tête que la partie numérique des indications (26) que nous venons d'expliquer*. Une colonne spéciale intitulée „maximum" montre sur le tableau même, entre quelles limites de portée l'essieu considéré reste une „force médiane".

Il va de soi que, dans le barême de chaque essieu, on ne calculera les valeurs de p que pour des régions dans les quelles l'essieu reste „force médiane", et qu'on aura à comparer ensuite les valeurs ainsi obtenues pour différents essieux et pour une même portée. En réunissant ainsi les résultats numériques trouvés ou les arcs de courbe qui les représentent**, on pourra finalement former le contour enveloppe cherché des courbes représentant les plus grandes valeurs p de la charge uniforme équivalente quant aux moments vers le milieu de la portée.

6. Courbes enveloppe des plus grandes charges p équivalentes quant aux moments sur une partie latérale de la portée.

Les procédés que nous venons d'exposer pour le milieu de la portée peuvent facilement être étendus au cas plus général où l'on aurait à considérer des sections de pont divisant la portée dans un rapport quelconque donnée. Les deux parties inégales de la portée $l = 2a$ étant alors a' (à droite) et a'' (à gauche) on aura (17):

(27) . . $p = \frac{1}{a}\left[\Sigma P_n - \left(\frac{\Sigma a'_n P'_n}{a'} + \frac{\Sigma a''_n P''_n}{a''}\right)\right]$ avec $a' + a'' = l$. En prenant maintenant:

(28) . . $a' = \frac{1}{m} a''$ où m est constant, la formule ci-dessus (27) devient en y introduisant m

(29) . . . . $p = \frac{1}{a}\left[\Sigma P_n - \frac{m+1}{2m}\,\frac{1}{a}\,(m\,\Sigma a'_n P'_n + \Sigma a''_n P''_n)\right]$

Si l'on admet comme précédemment qu'un même essieu reste placé sur la section de pont considérée, pendant que la portée croît des deux côtés simultanément tout en respectant la loi (28), la courbe** des valeurs de p pourra s'obtenir aussi à l'aide d'un barême calculé à l'avance pour les sommes ΣP_n et $(m\,\Sigma a'_n P'_n + \Sigma a''_n P''_n)$ presque aussi facilement*** que s'il s'agissait du milieu de la portée pour le quel $m = 1$.

On aura en suite à examiner entre quelles limites de portée dans le barême des Σ ou dans la courbe de p, l'essieu placé sur la section considérée, constitue une „force médiane proportionnelle"; ce calcul pourra se faire d'une manière commode à l'aide du procédé numérique indiqué (26), en ayant soin d'inscrire sur la droite les valeurs $m\,a'_n$ et $m\,\Sigma P'_n$ (au lieu des valeurs a'_n et $\Sigma P'_n$ employées précédemment). On observera d'ailleurs que pour examiner si les inégalités $\Sigma P''_n \gtrless m\,\Sigma P'_n$ se maintiennent ou se renversent, il faut toujours ajouter la charge originaire C en la multipliant sur la droite par le coefficient m et sur la gauche par le coefficient 1.

---

* Ces indications pouvant être utilisées pour le calcul ou le contrôle des sommes ΣP_n, et $\Sigma a_n P_n$.

** Avec p comme ordonnée et l comme abscisse.

*** On trouvera à cet effet par différentiation pour la tangente:

(30) $\frac{dp}{dl} = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}\Sigma P_n - \left(\frac{\Sigma a'_n P'_n}{a'} + \frac{\Sigma a''_n P''_n}{a''}\right)\right] = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}\Sigma P_n - \frac{m+1}{2m}\,\frac{1}{a}\,(m\,\Sigma a'_n P'_n + \Sigma a''_n P''_n)\right]$

où les mêmes sommes Σ déjà mentionnées dans le texte apparaissent seules.

Remarquons maintenant que, dans la pratique des constructions, on est toujours conduit à mettre dans les bandes près des appuis un excès de métal, car leur section ne peut décroître jusqu'à devenir nulle sur l'appui, comme l'indiquerait la théorie. Il en résulte que la question des charges uniformes équivalentes quant aux moments n'a d'importance pratique que pour des sections placées à une distance suffisante de l'appui le plus voisin. Il y a d'autre part grand intérêt à choisir ces sections le plus loin possible du milieu de la portée, afin que les différences qui en résultent pour les charges équivalentes p ressortent le mieux possible de cette comparaison.

En considérant les poutres à triangles ou treillis les plus usuelles ayant de 9 à 11 mailles simples, et remarquant que la première (souvent les deux premières) maille ne peut pratiquement parlant faire l'objet d'une discussion quant aux moments de flexion, on reconnaît que les sections les plus intéressantes à examiner sont celles qui se trouvent au $^1/_6$ de la portée ou qui divisent cette dernière dans le rapport de $m = 5$. La formule (29) devient alors:

$$(31) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad p = \frac{1}{a}\left[\Sigma P_n - \frac{6}{10}\,\frac{1}{a}\,(5\,\Sigma a'_n P'_n + \Sigma a''_n P''_n)\right]$$

En appliquant cette formule à chacun des 3 ou 4 essieux de locomotive pour toutes les portées pour lesquelles il constitue une force médiane proportionnelle, on obtiendra le contour enveloppe des plus grandes valeurs de la charge uniforme p équivalente quant aux moments provoqués vers le $^1/_6$ de la portée. Ces recherches faites avec des trains entièrements différents ont conduit à quelques résultats intéressants; ce sont les suivants:

1. Les charges p calculées pour un train donné et pour le $^1/_6$ de la portée surpassent généralement celles qui sont calculées pour le milieu de la portée.

2. Pour des portées inférieures a 5^m la manière usuelle de construire les poutres à âme pleine dispense de toute recherche relative aux bandes vers le $^1/_6$ de la portée, et pour des portées supérieures à 50^m de pareilles recherches sont superflues également, car les charges p obtenues alors pour le $^1/_6$ de la portée surpassent de moins $1\,^0/_0$ celles qui sont obtenues pour le milieu de la portée.

3. Les différences en plus pour le $^1/_6$ de la portée n'acquièrent généralement une certaine importance que pour des portées comprises entre des limites assez restreintes. Pour les trains types considérés par l'ordonnance ces différences ne dépassent $6\,^0/_0$ que pour des portées de 12^m à 30^m sur les lignes d'intérêt général, de 10^m à 25^m sur les lignes d'intérêt local avec charges réduites de $20\,^0/_0$ et de 8^m à 20^m sur les lignes d'intérêt local avec charges réduites de $40\,^0/_0$.

4. Pour ces trois genres de lignes on trouve que les plus grandes différences se rapportent aux portées de 17^m, 13^m et 11^m environ, et ne dépassent pas $18\,^0/_0$. On a cherché à tenir compte autant que possible de ces anomalies.

XVII. Recherche de la charge équivalente quant aux efforts tranchants.

1. Trains de surcharge à considérer.

Nous avons déjà exposé, au commencement du numéro *XVI*, que, pour produire les plus grands moments de flexion avec un train composé de véhicules donnés, il faut disposer ces véhicules de façon à concentrer le plus possible les essieux les plus lourds vers le milieu du train.

Si l'on veut au contraire composer le train de façon à obtenir en général les plus grands efforts tranchants, il faudra concentrer les essieux vers la tête du train, qui comme on sait doit se trouver au droit de la section où l'on cherche le plus grand effort tranchant. La définition même des efforts tranchants fait reconnaître l'exactitude de ce principe de surcharge pour les ponts les plus répandus qui sont construits avec poutres reposant librement sur deux appuis; ce sont aussi ces ponts que nous avons spécialement en vue, dans les calculs qui suivront. Pour d'autres constructions comme les ponts à poutres continues, les ponts en arc . . . . etc., il est pour le moins plausible d'admettre que le train de surcharge devra être formé de la même manière.

En supposant comme précédemment que le train de surcharge se compose de trois locomotives avec leurs tenders et des wagons nécessaires, nous appellerons „train fléchissant“ le train composé comme il est expliqué au N° *XVI*: 1 en vue des plus grands moments de flexion (calcul des bandes). Nous appellerons „train tranchant“ le train formé en vue des plus grands efforts tranchants (calcul des croisillons) et ayant en tête les trois locomotives orientées de la même manière (voir le détail au N° *XXI*).

On a admis jusqu'ici que le „train tranchant“ suffit* pour le calcul des croisillons pourvu que sa tête se trouve placée au-dessus de la section où l'on veut estimer l'effort tranchant. Cela est inexact car, pour des portées de moyenne grandeur, le „train fléchissant“ dont on suppose avoir séparé la partie de droite (wagons avec un tender**) produit des efforts tranchants dépassant de 6% ceux que produirait le „train tranchant“ dans les mêmes conditions, ainsi que cela ressort des tableaux de calculs qui suivront.

On a tenu compte de ce surplus de rigueur résultant du choix alternatif du train tranchant ou train fléchissant, pour tous les calculs qui ont servi de base aux prescriptions autrichiennes.

2. L'enveloppe des polygones des efforts tranchants doit être cherchée près d'un appui.

On avait l'habitude jusqu'ici d'admettre pour les calculs de résistance*** concernant les croisillons, toujours une seule et même surcharge par mètre ne dépendant que de la portée du pont, et cette façon de procéder était d'un usage si fréquent jusqu'à la publication de l'ordonnance autrichienne du 15 Septembre 1887 que nous devons tout d'abord la discuter.

Supposons que l'on place l'un ou l'autre des deux trains de surcharge (tranchant ou fléchissant) de telle façon que l'essieu de tête sur la droite se trouve au droit de la section considérée; la partie de droite du pont sera alors non chargée, et l'on aura le plus grand effort tranchant possible.

Si l'on prend ainsi sur un pont donné, pour chaque section, le plus grand effort tranchant V_x produit par le plus désavantageux des deux trains, et si l'on trace la courbe représentative de ces efforts † on obtient une ligne enveloppe qui part de zéro sur l'appui de gauche, monte avec une pente croissante et atteint sur l'appui de droite sa plus grande valeur. C'est ce contour représentant le plus grand effort tranchant sur chaque section qu'il s'agit de couvrir maintenant avec la parabole connue †† résultant de l'hypothèse d'une charge uniforme.

On remarquera toutefois en s'occupant de ces recherches que le contour enveloppe des efforts tranchants obtenus avec le train, a une courbure moins prononcée près de l'appui de gauche, et plus prononcée près de l'appui de droite, tandis que c'est l'inverse qui a lieu pour la parabole.

Par suite si l'on choisissait une charge p' par mètre suffisamment grande pourque la parabole qui en dérive couvre complètement le contour enveloppe des plus grands efforts tranchants, même dans le voisinage de l'appui de gauche, la même parabole s'élèverait près de l'appui de droite bien au-dessus du contour des efforts tranchants et cette charge serait tout à fait inacceptable pour le calcul des croisillons dans cette partie du pont.

C'est donc près de l'appui de droite c. a. d. là où les efforts tranchants produits par le train ont leur plus grande valeur, qu'il faut chercher à couvrir ces efforts avec la parabole provenant de la charge p' par mètre à déterminer. Ce principe est en pratique d'autant mieux fondé que la partie du sommet de la parabole n'a aucune importance, parce que les croisillons dits „à effet contraire“ (Gegenstreben) ne s'étendent que sur une région médiane du pont qui n'atteint jamais le voisinage d'un appui †††, et parce que dans toute cette région on est toujours forcé pour satisfaire aux exigences de la construction elle-même de donner aux croisillons des sections plus fortes que ne l'indiquerait la théorie. Les différences qui résultent de l'emploi de la parabole déterminée comme il vient d'être expliqué, n'ont donc pas bien grande importance pour les constructeurs; elles sont du reste éliminées dans l'ordonnance autrichienne.

La charge uniforme p' par mètre de voie, équivalente au train quant aux efforts tranchants, pourra, d'après ce qui précède, être déterminée approximativement, suivant l'usage établi, en cherchant la valeur de p' qui donne la même réaction d'appui (appui de droite dans les calculs et tableaux qui suivent) que le train composé et placé de la manière la plus désavantageuse.

* Ceci se trouve même affirmé explicitement dans le texte de la circulaire russe de 1884.

** Pour les efforts tranchants dans le voisinage des appuis (appui de droite) cette séparation n'est même pas nécessaire, car alors la partie du train qui serait à séparer se trouve au-dessus de la culée et du remblai.

*** Dans les calculs graphiques (polygone funiculaire) on opérait plus exactement. (N° *XLVIII*.)

† Avec V_x comme ordonnée rapportée à l'abscisse de la section; c'est du reste un contour polygonal.

†† C'est-à-dire avec la parabole $y = \frac{p'}{2l} x^2$ dans laquelle l'abscisse x de la section est comptée à partir de l'appui de gauche, la charge p' étant supposée appliquée depuis cet appui jusqu'à la section.

††† Une seule exception concernerait les poutres bow-string entièrement paraboliques (de hauteur nulle sur les appuis) où les croisillons dits à effet contraire s'étendent sur toute la portée. Ces constructions sont du reste abandonnées depuis longtemps.

3. Formule de la charge uniforme équivalente quant à la réaction d'appui et courbe enveloppe.

Nous désignons dans les calculs et tableaux qui suivent par:

(32)
- p' . . . . la charge uniforme équivalente cherchée par mètre de voie,
- l . . . . la portée du pont,
- $P_1\ P_2\ .\ .\ .\ P_n$ . . . les charges en action sur le pont,
- $l_1\ l_2\ .\ .\ .\ .\ l_n$ . . . leurs distances respectives à l'appui de droite.

On trouve alors par les methodes ordinaires*:

$$(33)\quad .\ .\quad p' = \frac{2}{l}\left(\Sigma P_n - \frac{\Sigma l_n P_n}{l}\right) \qquad \text{et} \qquad (35)\quad .\ .\quad \frac{dp'}{dl} = -\frac{2}{l^2}\left(\Sigma P_n - \frac{\Sigma l_n P_n}{l}\right)$$

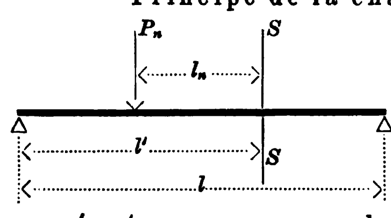
Cette formule a une grande analogie avec la formule (23) établie pour les moments de flexion et peut être utilisée de la même manière, tant pour la courbe que pour la tangente.

Si l'on suppose que l'essieu d'avant d'un train de surcharge déterminé reste placé sur l'appui de droite du pont, et que la portée l croisse d'une manière continue, alors les Sommes ΣP_n et $\Sigma l_n P_n$ ne varieront qu'à chaque fois qu'un nouvel essieu apparaîtra sur la portée croissante. On pourra donc dresser à l'avance un barême des valeurs de ces sommes pour les portées correspondantes**, et ce barême permettra ensuite d'obtenir de suite p' et sa dérivée au moyen des formules (33) et (35) pour une portée l quelconque en effectuant deux divisions seulement, car on utilisera les Σ qui dans le barême correspondent à la valeur immédiatement inférieure $l_n \overline{\overline{<}}\ l$.

Le contour des valeurs de p' obtenu*** en réunissant toutes les valeurs de p' ainsi trouvées, soit avec le „train tranchant" soit avec le „train fléchissant" (suivant la portée) sera le contour-enveloppe cherché, donnant graphiquement les plus grandes valeurs de la charge par mètre équivalente quant à l'effort tranchant sur un appui, valeurs que l'on peut obtenir aussi numériquement à l'aide de la formule (33).

Tous les calculs concernant les efforts tranchants et qui ont servi de base aux prescriptions de l'ordonnance autrichienne, ont été effectués à l'aide des procédés indiqués ci-dessus; nous allons faire voir que les résultats obtenus sont applicables pour les efforts tranchants provoqués sur une section quelconque du pont, conformément au principe des longueurs surchargées.

4. Charge équivalente quant à l'effort tranchant sur une section quelconque. Principe de la charge fixée suivant la longueur surchargée.



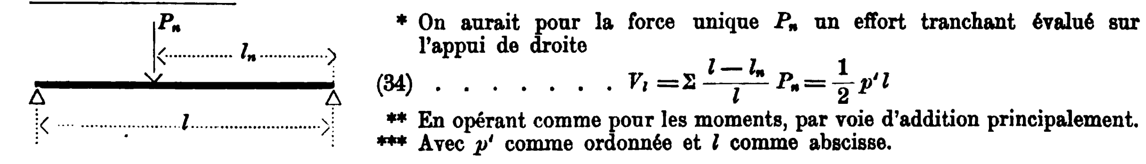
Considérons une section quelconque SS du pont; supposons un des deux trains de surcharge mentionnés précédemment, placé de façon que le premier essieu se trouve au-dessus de la section considérée et laisse la partie de droite non chargée, de manière que l'effort tranchant en SS soit maximum. Désignons par:

(36)
- p' . . . . la charge uniforme par mètre cherchée équivalente en SS;
- l . . . . la portée du pont que l'on considère;
- l' . . . . la partie de cette portée à gauche de SS;
- $P_1\ P_2\ .\ .\ .\ P_n$ . . . les diverses charges d'essieux agissant à gauche de SS;
- $l_1\ l_2\ .\ .\ .\ .\ l_n$ . . . leurs distances respectives à la section SS;
- $V_{l'}$ . . . . l'effort tranchant produit sur la section. On trouve alors:

$$(37)\quad .\ .\ .\ .\quad V_{l'} = \Sigma \frac{l' - l_n}{l} P_n = \frac{1}{2}\frac{p' l'^2}{l} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\quad p' = \frac{2}{l'}\left(\Sigma P_n - \frac{\Sigma l_n P_n}{l'}\right)$$

Le dénominateur l a disparu et la formule ainsi obtenue, donnant p' pour la section quelconque SS ne diffère de la formule analogue (33) donnant p' sur l'appui de droite, qu'en ce que l' est venu remplacer ici la portée l. La formule (33) ne représente donc qu'un cas particulier de la formule (37) pour lequel $l' = l$ et l'on reconnaît plus généralement que:

La charge uniforme p' par mètre équivalente à un train donné, quant à l'effort tranchant sur une section SS d'un pont de portée quelconque, ne



* On aurait pour la force unique P_n un effort tranchant évalué sur l'appui de droite

$$(34)\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad V_l = \Sigma \frac{l - l_n}{l} P_n = \frac{1}{2} p' l$$

** En opérant comme pour les moments, par voie d'addition principalement.
*** Avec p' comme ordonnée et l comme abscisse.

dépend que de la longueur l' surchargée*, comprise entre la section et l'un ou l'autre des appuis suivant le sens de l'effort cherché. Ce principe général justifie sans autres commentaires les titres de l'échelle $\mathfrak{b}$ du § 3 de l'ordonnance autrichienne**.

Inversement la valeur de p' calculée pour une section intermédiaire quelconque d'un pont, située à une distance l' de l'appui du côté du quel arrive la charge, devra être exactement égale à la valeur de p' calculée pour un appui d'un pont de portée l'. Il suffisait d'après cela, de calculer les charges destinées à l'échelle $\mathfrak{b}$ de l'ordonnance, en ne considérant que l'effort tranchant maximum obtenu sur un appui pour toutes les portées, quitte à prescrire ensuite ces valeurs de p' d'après le nouveau principe des longueurs surchargées.

Pour le calcul des efforts tranchants dans chaque pont en particulier, d'après la formule:

$$V_{l'} = \frac{1}{l} \cdot \frac{p' l'^2}{2} = \frac{p'}{2\,l} \cdot l'^2$$

le nouveau principe adopté en Autriche offre encore l'avantage de simplifier les calculs. On pourra en effet dresser une fois pour toutes, une table des moments tournants $\frac{1}{2}\,p' l'^2$ pour toutes les longueurs l' en général. Pour obtenir les efforts tranchants dans un pont donné, il suffira de diviser par la portée du pont les valeurs des moments donnés par cette table.

XVIII. Véhicules et trains types de surcharge considérés par l'ordonnance autrichienne et leurs effets sur les ponts.

On arrive fréquemment dans l'exploitation des chemins de fer à remorquer un train à l'aide de deux locomotives. Sur les lignes de montagne, où comme l'on sait circulent les machines les plus lourdes, il est même d'usage de mettre à la suite l'une de l'autre deux locomotives du type le plus lourd. Ce système de traction est aussi employé sur les lignes à faible pente, mais avec des machines moins lourdes.

On devra donc, pour le calcul des ponts compter dans tous les cas sur la présence de deux locomotives placées à la suite l'une de l'autre comme sur une charge mobile tout à fait courante. Les ingénieurs des services de la traction et de l'exploitation affirment d'autre part qu'il n'y a pas lieu de considérer dans le service ordinaire des trains remorqués par trois locomotives.

Exceptionnellement il pourra arriver qu'en outre des deux machines motrices le train contienne une troisième locomotive remorquée à froid, ou bien encore qu'un train remorqué par deux locomotives en feu ayant subi quelque avarie se rencontre avec une troisième locomotive qui vient à son secours. Dans des cas semblables trois locomotives se trouveront momentanément placées à la suite l'une de l'autre.

Pour ces motifs les ingénieurs des ponts métalliques en Autriche et en Allemagne ont pris depuis longtemps l'habitude de considérer un ensemble de trois locomotives concentrées dans un train de surcharge sur un pont, comme constituant le cas de charge mobile le plus défavorable, que l'on doive encore faire entrer dans les calculs de résistance.

Les locomotives les plus lourdes c. a. d. les plus défavorables au point de vue de la surcharge des ponts, sont les machines à marchandises à quatre essieux couplés, ces essieux étant très-chargés et peu écartés. On a dû en conséquence considérer d'abord un train-type de surcharge composé de trois locomotives de cette espèce avec leurs tenders et des wagons chargés

* La formule donnera par exemple une seule et même valeur de p' pour calculer l'effort tranchant au milieu d'un pont de 40^m ou sur l'appui d'un pont de 20^m de portée.

** Déjà avant 1870 on disposait de la solution très-élégante connue pour déterminer graphiquement les efforts tranchants sur toutes les sections d'un pont, à l'aide du polygone funiculaire, que l'on obtient directement avec les écartements et charges des essieux du train. La possibilité de se servir d'un seul et même polygone ainsi construit, pour trouver les efforts tranchants des ponts de toute portée, équivant en réalité au principe de la „longueur surchargée" démontré dans le texte.

On a en effet entre les efforts tranchants V et V_1 correspondant (pour une même longueur surchargée) aux portées l et l_1 d'après le principe du polygone funiculaire unique (voir notre No *XLVIII*):

$$V l = V_1 l_1$$

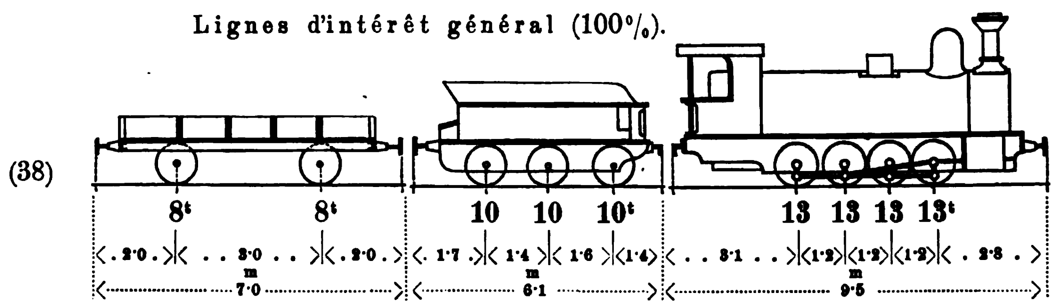
Si d'autre part P et P_1 désignent les résultantes des surcharges équivalentes dans les deux cas, on peut écrire directement pour la même longueur surchargée l':

$$V = \frac{P l'}{2 l} \text{ et } V_1 = \frac{P_1 l'}{2 l_1}, \qquad \text{on en conclut évidemment} \qquad P = P_1 \text{ et } \frac{P}{l'} = \frac{P_1}{l'} = p'$$

Ce principe n'est donc nullement nouveau, mais son application sous la forme de l'échelle $\mathfrak{b}$ du § 3 de l'ordonnance autrichienne, constitue une innovation importante.

en nombre suffisant. On se décida à prendre à cet effet les types de locomotive, tender et wagon indiqués ci-après (38) qui déjà depuis quelque temps en Autriche servaient de base aux calculs de résistance. Les moments fléchissants et efforts tranchants qu'ils produisent sur les ponts sont, sauf de rares exceptions, toujours supérieurs à ceux qu'y provoquent les autres véhicules analogues* du service courant, et pour cette raison ils ont pu servir également au calcul des poutres transversales et des longerons.

Lignes d'intérêt général (100°/₀).

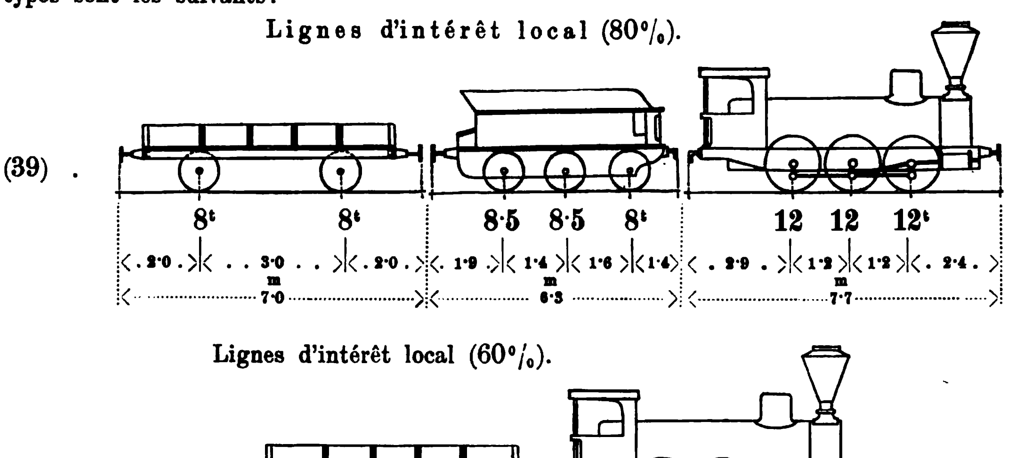
(38) 

Les moments de flexion et efforts tranchants produits par le „train-type normal" (fléchissant ou tranchant) composé avec ces véhicules sont donnés dans les tableaux de calculs N° *XIX* à *XXII*. On avait d'abord décidé en principe que les charges équivalentes qui en résultent seraient prescrites pour tous les ponts à construire sur les lignes d'intérêt général sans distinction.

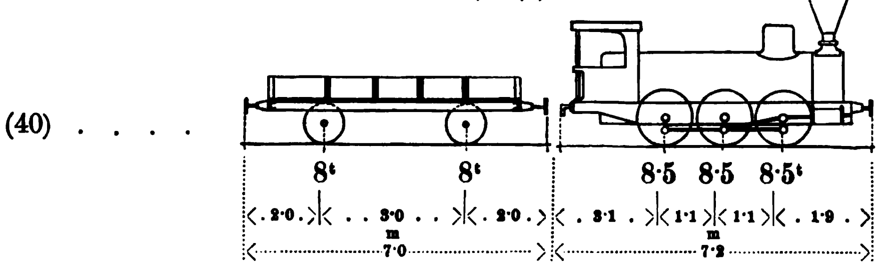
En outre des conditions qui viennent d'être indiquées, on a admis qu'un train remorqué par deux locomotives du type Arlberg, et composé des tenders et wagons déjà admis précédemment devait pouvoir circuler sur toutes les lignes d'intérêt général. Le tableau de calculs N° *XXIII*, permet de reconnaître l'importance de cette condition; il montre que la charge uniforme équivalente au train remorqué par les locomotives-Arlberg est supérieur au-dessous de 40ᵐ et inférieur au-dessus de cette portée à la charge uniforme équivalente au train-type normal.**

Pour les lignes d'intérêt local on a été conduit comme nous l'expliquons plus loin (page 71) à considérer des trains-types composés comme le train-type normal (38) et contenant les mêmes wagons, mais plus légers quant aux moteurs. L'étude des effets de surcharge qui en résultent a conduit aux réductions de 20°/₀ et 40°/₀ autorisées au § 3 lit. h de l'ordonnance. Les moteurs-types sont les suivants:

Lignes d'intérêt local (80°/₀).

(39) 

Lignes d'intérêt local (60°/₀).

(40) . . . . 

Nous donnons maintenant ci-après le détail des tableaux des calculs: N° *XIX* à *XXV*.

---

* Entre autres exceptions nous citerons les locomotives-Arlberg à 4 essieux chargés de 14*t*, les tenders de 35*t*, les wagons à huile minérale . . . etc. sans parler des wagons pr. engins de guerre.

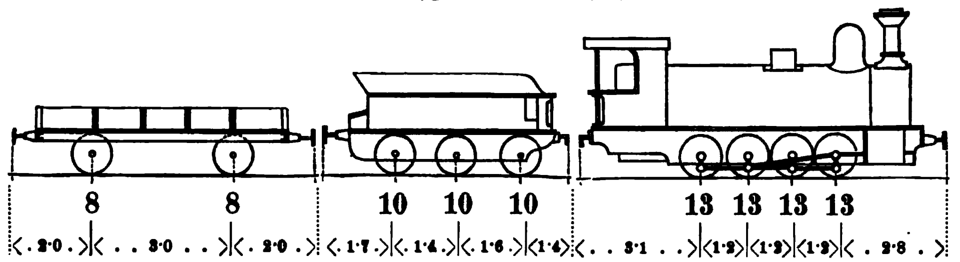
** Avec quatre essieux chargés de 14*t* chacun et les écartement ci-dessus (38).

XIX. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes vers le milieu de la portée

en vue de trains de surcharge formés avec trois locomotives à quatre essieux de 13 tonnes circulant sur les lignes d'intérêt général où l'on appliquera le

100 % des échelles de l'ordonnance.

(Train type de surcharge.)



Scale a : **Surcharges pour les bandes au milieu de la portée.**

Portée du pont *l*	Charge mobile par mètre de voie: d'après l'ordonnance 100 % de l'échelle a **p**	provenant du train: avec l'essieu	provenant du train: en tonnes par mètre *p*	provenant du train: en centièmes de **p** %	Portée du pont *l*	Charge mobile par mètre de voie: d'après l'ordonnance 100 % de l'échelle a **p**	provenant du train: avec l'essieu	provenant du train: en tonnes par mètre *p*	provenant du train: en centièmes de **p** %
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
m	t		t		m	t		t	
1	30·000	*C*	26·000	87	15	7·000	*B*	6·180	88
2	15·000	»	13·000	87	20	6·500	*D*	5·836	90
3	13·100	»	12·133	93	25	6·275	*C*	5·839	93
4	12·300	»	11·700	95	30	6·050	»	5·583	92
5	11·500	»	10·816	94	35	5·825	*B*	5·551	95
6	10·900	»	10·400	95	40	5·600	»	5·555	99
7	10·300	»	9·763	94	45	5·450	»	5·480	101
8	9·700	»	9·100	94	50	5·300	»	5·416	102
9	9·160	»	8·474	93	55	5·150	»	5·333	104
10	8·500	»	7·904	93	60	5·000	»	5·229	105
11	8·200	»	7·392	90	65	4·850	»	5·125	106
12	7·900	*B*	7·016	89	70	4·700	»	5·017	107
13	7·600	»	6·713	88	75	4·550	»	4·911	108
14	7·300	»	6·420	88	80	4·400	»	4·812	109
15	7·000	»	6·180	88	85	4·325	»	4·716	109
16	6·900	»	5·994	87	90	4·250	»	4·623	109
17	6·800	»	5·898	87	95	4·175	»	4·540	109
18	6·700	*C*	5·842	87	100	4·105	»	4·458	109
19	6·600	»	5·829	88	105	4·025	»	4·382	109
20	6·500	*D*	5·836	90	110	3·950	»	4·312	109
21	6·455	*C*	5·845	91	115	3·875	»	4·243	110
22	6·410	»	5·880	92	120	3·800	»	4·181	110
23	6·365	»	5·886	92	125	3·750	»	4·122	110
24	6·320	»	5·856	93	130	3·700	»	4·064	110
25	6·275	»	5·839	93	135	3·650	»	4·012	110
26	6·230	»	5·796	93	140	3·600	»	3·962	110
27	6·185	»	5·742	93	145	3·550	»	3·914	110
28	6·140	»	5·680	93	150	3·500	»	3·869	111
29	6·095	»	5·620	92	155	3·450	»	3·827	111
30	6·050	»	5·583	92	160	3·400	»	3·786	111

NB. Les détails du calcul se trouvent sur les pages 48 et 49.

XIX. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes vers le milieu de la portée.

	Wagen		Wagen		Wagen		Tender			Locomotive				Tender		
	8	8	8	8	8	8	10	10	10	13	13	13	13	10	10	10
Écartements	3·0	. 4·0 .	3·0	. 4·0 .	3·0	. 3·7 .	1·4	1·6	. 4·5 .	1·2	1·2	1·2	. 4·5 .	1·4	1·6	. . 4·5 . .
Pour l'essieu *D*:	183.	175.	167.	159.	151.	141.	131.	121.	108.	95.	82.	69.	59.	49		
	40·4	37·4	33·4	30·4	26·7	25·3	23·7	19·2	18·0	16·8	15·6	11·1	9·7	8·1		
Pour l'essieu *C*:	170.	162.	154.	146.	138.	128.	118.	108.	95.	82.	69.	56.	46.	36		
	39·2	36·2	32·2	29·2	25·5	24·1	22·5	18·0	16·8	15·6	14·4	9·9	8·5	6·9		
Pour l'essieu *B*:	157.	149.	141.	133.	125.	115.	105.	95.	82.	69.	56.	43.	33.	23		
	38·0	35·0	31·0	28·0	24·3	22·9	21·3	16·8	15·6	14·4	13·2	8·7	7·3	5·7		

Barême complet des surcharges pour l'essieu *C* placé sur le milieu.

$l_n = 2a_n$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p
m			m²	t	t	mt	mt	t
0·0	0·0	0·0	0·00	13	13	0·0	0	$+\infty$
2·4	1·2	1·2	1·44	26	39	31·2	31·2	10·833
4·8	2·4		5·76	13	52	31·2	62·4	10·833
13·6		6·8	46·24	13	65	88·4	150·8	6·298
13·8	6·9		47·61	10	75	69·0	219·8	6·253
16·0		8·0	64·00	13	88	104·0	323·8	5·941
17·0	8·5		72·25	10	98	85·0	408·8	5·871
18·4		9·2	84·64	13	111	119·6	528·4	5·822
19·8	9·9		98·01	10	121	99·0	627·4	5·821
20·8		10·4	108·16	13	134	135·2	762·6	5·834
28·8	14·4		207·36	13	147	187·2	949·8	5·628
29·8		14·9	222·01	10	157	149·0	1098·8	5·588
31·2	15·6		243·36	13	170	202·8	1301·6	5·549
33·0		16·5	272·25	10	180	165·0	1466·6	5·522
33·6	16·8		282·24	13	193	218·4	1685·0	5·518
35·8		17·9	320·41	10	203	279·0	1864·0	5·523
36·0	18·0		324·00	13	216	234·0	2098·0	5·525
43·2		21·6	466·56	8	224	172·8	2270·8	5·503
45·0	22·5		506·25	10	234	225·0	2495·8	5·470
48·2	24·1		580·81	10	244	241·0	2736·8	
49·2		24·6	605·16	8	252	196·8	2933·6	
51·0	25·5		650·25	10	262	255·0	3188·6	
57·2		28·6	817·96	8	270	228·8	3417·4	
58·4	29·2		852·64	8	278	233·6	3651·0	
63·2		31·6	998·56	8	286	252·8	3903·8	
64·4	32·2		1036·84	8	294	257·6	4161·4	
71·2		35·6	1267·36	8	302	284·8	4446·2	
72·4	36·2		1310·44	8	310	289·6	4735·8	
77·2		38·6	1489·96	8	318	308·8	5044·6	
78·4	39·2		1536·64	8	326	313·6	5358·2	
85·2		42·6	1814·76	8	334	340·8	5699·0	
86·4	43·2		1866·24	8	342	345·6	6044·6	
91·2		45·6	2079·36	8	350	364·8	6409·4	
92·4	46·2		2134·44	8	358	369·6	6779·0	
99·2		49·6	2460·16	8	366	396·8	7175·8	
100·4	50·2		2520·04	8	374	401·6	7577·4	
105·2		52·6	2766·76	8	382	420·8	7998·2	
106·4	53·2		2830·24	8	390	425·6	8423·8	
113·2		56·6	3203·56	8	398	452·8	8876·6	
114·4	57·2		3271·84	8	406	457·6	9334·2	
119·2		59·6	3552·16	8	414	476·8	9811·0	
120·4	60·2		3624·04	8	422	481·6	10292·6	
127·2		63·6	4044·96	8	430	508·8	10801·4	
128·4	64·2		4121·64	8	438	513·6	11315·0	
133·2		66·6	4435·56	8	446	532·8	11847·8	
134·4	67·2		4515·84	8	454	537·6	12385·4	

Maximum: rows l_n = 2·4 to 45·0.

Exemples m	t	En % de p
3	12·183	93
4	11·700	95
5	10·816	94
6	10·400	95
8	9·100	94
9	8·474	93
10	7·904	93
15	6·093	
18	5·842	87
19	5·829	88
20	5·826	
22	5·830	92
24	5·856	93
25	5·839	93
30	5·583	92
32	5·541	93
34	5·522	
35	5·527	
38	5·557	
40	5·555	99
50	5·386	
60	5·210	
70	4·999	
80	4·801	
90	4·615	
100	4·450	
110	4·306	
120	4·175	
140	3·958	

NB. Le tableau résumé des maxima de p est à la page 47.

XIX. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes vers le milieu de la portée.

	Locomotive				Locomotive				Tender			Wagon		Wagon		Wagon	
	13	13	13	13	13	13	13	13	10	10	10	8	8	8	8	8	8
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*									
	39 (3·6)	26 (2·4)	13 (1·2)	× (0)	13 (5·6)	26 (6·8)	39 (8·0)	52 (9·2)	62 (13·7)	72 (15·8)	82 (16·7)	90 (20·4)	98 (23·4)	106 (27·4)	114 (30·4)	122 (34·4)	130 (37·4)
	26 (2·4)	13 (1·2)	× (0)	13 (1·2)	26 (6·8)	39 (8·0)	52 (9·2)	65 (10·4)	75 (14·9)	85 (16·5)	95 (17·9)	103 (21·6)	111 (24·6)	119 (28·6)	127 (31·6)	135 (35·6)	143 (38·6)
	13 (1·2)	× (0)	13 (1·2)	26 (2·4)	39 (8·0)	52 (9·2)	65 (10·4)	78 (11·6)	88 (16·1)	98 (17·7)	108 (19·1)	116 (22·8)	124 (25·8)	132 (29·8)	140 (32·8)	148 (36·8)	156 (39·8)

Espacements des essieux : . . 4·5 . . × 1·20 × 1·20 × 1·20 × . 5·60 . × 1·2 × 1·2 × 1·2 × . 4 5 . × 1·6 × 1·4 × . 3·7 . × 3·0 × . 4·0 . × 3·0 × . 4·0 . × 3·0 ×

Barême pour l'essieu *B* sur le milieu.

l	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p
m			m²	t	t	mt	mt	t
11·4	5·7		32·49	10	62	57·0	119·4	7·202
14·6	7·3		53·29	10	72	73·0	192·4	6·253
16·0		*8·0*	64·00	13	85	104·0	296·4	5·994
17·4	8·7		75·69	10	95	87·0	383·4	5·854
18·4		*9·2*	84·64	13	108	119·6	503·0	*5·796*
20·8		*10·4*	108·16	13	121	135·2	638·2	*5·734*
23·2		*11·6*	134·56	13	134	150·8	789·0	*5·688*
26·4	13·2		174·24	13	147	171·6	960·6	
28·8	14·4		207·36	13	160	187·2	1147·8	
31·2	15·6		243·36	13	173	202·8	1350·6	
32·2		*16·1*	259·21	10	183	161·0	1511·6	*5·535*
33·6	16·8		282·24	13	196	218·4	1730·0	5·537
35·4		*17·7*	313·29	10	206	177·0	1907·0	5·552
38·2		*19·1*	364·81	10	216	191·0	2098·0	5·558
42·6	21·3		453·69	10	226	213·0	2311·0	5·517
45·6		*22·8*	519·84	8	234	182·4	2493·4	5·467
45·8	22·9		524·41	10	244	229·0	2722·4	5·464
48·6	24·3		590·49	10	254	243·0	2965·4	5·431
51·6		*25·8*	665·64	8	262	206·4	3171·8	5·390
56·0	28·0		784·00	8	270	224·0	3395·8	5·311
59·6		*29·8*	888·04	8	278	238·4	3634·2	5·237
62·0	31·0		961·00	8	286	248·0	3882·2	5·186
65·6		*32·8*	1075·84	8	294	262·4	4144·6	5·111
70·0	35·0		1225·00	8	302	280·0	4424·6	5·017
73·6		*36·8*	1354·24	8	310	294·4	4719·0	4·939
76·0	38·0		1444·00	8	318	304·0	5023·0	4·890
79·6		*39·8*	1584·04	8	326	318·4	5341·4	4·819
84·0		*43·8*	1764·00	8	334	336·0	5677·4	4·807
87·6	42·0		1918·44	8	342	350·4	6027·8	4·666
90·0	45·0		2025·00	8	350	360·0	6387·8	4·623
93·6		*46·8*	2190·24	8	358	374·4	6762·2	4·562
98·0	49·0		2401·00	8	366	392·0	7154·2	4·490
101·6		*50·8*	2580·64	8	374	406·4	7560·6	
104·0	52·0		2704·00	8	382	416·0	7976·6	
107·6		*53·8*	2894·44	8	390	430·4	8407·0	
112·0	56·0		3136·00	8	398	448·0	8855·0	
115·6		*57·8*	3340·84	8	406	462·4	9317·4	
118·0	59·0		3481·00	8	414	472·0	9789·4	

$a_n =$ drte. { *60·8, 64·8, 67·8, 71·8, 74·8, 78·8, 81·8, 85·8, 88·8, 92·8, 95·8, 99·8* }
gche. { 63, 66, 70, 73, 77, 80, 84, 87, 91, 94, 98, ... }

ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p
462	. . . .	12928·6	. . . . . .
510	par	16571·8	. . . . . .
550	exemple	19991·0	. . . . . .
598		24562·2	. . . . . .

Barême pour l'essieu *D* sur le milieu.

l	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p
19·4	9·7		94·09	10	124	97·0	656·4	
22·2	11·1		123·21	10	134	111·0	767·4	
27·4		*13·7*	187·69	10	144	137·0	904·4	
30·6		*15·3*	234·09	10	154	153·0	1057·4	

Exemples

m	t	En % de p
12 . .	7·016	89
13 . .	6·718	88
14 . .	6·420	88
15 . .	6·180	88
17 . .	5·898	87
18 . .	5·823	
20 . .	5·770	
25 . .	5·670	
30 . .	5·566	
32 . .	5·537	
34 . .	5·543	94
35 . .	5·551	95
36 . .	5·558	96
38 . .	5·560	98
40 . .	5·555	99
45 . .	5·480	101
50 . .	5·416	102
55 . .	5·333	104
60 . .	5·229	105
65 . .	5·125	106
75 . .	4·911	108
80 . .	4·812	109
85 . .	4·716	109
95 . .	4·540	109
100 . .	4·458	109
105 . .	4·382	109
110 . .	4·312	109
115 . .	4·243	110
120 . .	4·181	110
140 . .	3·962	110
160 . .	3·786	111
180 . .	3·643	
200 . .	3·524	
19 . .	5·802	
20 . .	5·836	90
22 . .	5·848	
25 . .	5·820	
30 . .	5·580	

NB. Le tableau résumé des maxima de p est à la page 47.

XX. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes vers le ¹/₆ de la portée.

	Wagon		Wagon		Wagon		Tender			Locomotive				Tender		
Charges (t)	8	8	8	8	8	8	10	10	10	13	13	13	13	10	10	10
Écartements (m)	3·0	. 4·0 .	3·0	. 4·0 .	3·0	. 3·7 .	1·4	1·6	. 4·5 .	1·2	1·2	1·2	. 4·5 .	1·4	1·6	. . 4·5 . .
Pour l'essieu *F*	225	217	209	201	193	185	177	167	157	147	134	121	108	(69	59	49
	54·2	51·2	47·2	44·2	40·2	37·2	33·5	32·1	30·5	26·0	24·8	23·6	22·4	(11·1	9·7	8·1
Pour l'essieu *G*	238	230	222	214	206	198	190	180	170	160	147	134	121	108	98	88
	55·4	52·4	48·4	45·4	41·4	38·4	34·7	33·3	31·7	27·2	26·0	24·8	23·6	19·1	17·7	16·1
Pour l'essieu *H*	251	243	235	227	219	211	203	193	183	173	160	147	134	121	111	101
	56·6	53·6	49·6	46·6	42·6	39·6	35·9	34·5	32·9	28·4	27·2	26·0	24·8	20·3	18·9	17·3

Barème complet des surcharges pour l'essieu *G* au ¹/₆ de la portée.

l	a''_n	$5a'_n$	a	P_n	ΣP_n	$a''_n P''_n$ ou $5a'_n P'_n$	$\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n$	$\frac{6}{10}\left(\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n\right)$	p''	Maximum
m	m	m	m	t	t	mt	mt	mt	t	
1·44	1·2		0·72	13	26	15·6	15·6	9·36	18·056	
2·88	2·4		1·44	13	39	31·2	46·8	28·08	13·542	
7·20		6·0	3·60	13	52	78·0	124·8	74·88	*8·666*	
9·60	8·0		4·80	13	65	104·0	228·8	137·28	*7·583*	
11·04	9·2		5·52	13	78	119·6	348·4	209·04	*7·270*	
12·48	10·4		6·24	13	91	135·2	483·6	290·16	*7·131*	
13·92	11·6		6·96	13	104	150·8	634·4	380·64	7·085	
19·32	16·1		9·66	10	114	161·0	795·4	477·24	6·687	
21·24	17·7		10·62	10	124	177·0	972·4	583·44	6·503	
22·92	19·1		11·46	10	134	191·0	1163·4	698·04	6·378	
28·32	23·6		14·16	13	147	306·8	1470·2	882·12	5·982	
29·76	24·8		14·88	13	160	322·4	1792·6	1075·56	5·895	
31·20	26·0		15·60	13	173	338·0	2130·6	1278·36	*5·837*	
32·64	27·2		16·32	13	186	353·6	2484·2	1490·52		
34·20		28·5	17·10	10	196	285·0	2769·2	1661·52		
38·04	31·7		19·02	10	206	317·0	3086·2	1851·72		
39·96	33·3		19·98	10	216	333·0	3419·2	2051·52		
41·64	34·7		20·82	10	226	347·0	3766·2	2259·72		
43·80		36·5	21·90	10	236	365·0	4131·2	2478·72	*5·608*	
46·08	38·4		23·04	8	244	307·2	4438·4	2663·04	5·574	
49·68	41·4		24·84	8	252	331·2	4769·6	2861·76	5·507	
52·20		43·5	26·10	10	262	435·0	5204·6	3122·76	5·454	
54·48	45·4		27·24	8	270	363·2	5567·8	3340·68	5·410	
58·08	48·4		29·04	8	278	387·2	5955·0	3573·00	5·336	
62·88	52·4		31·44	8	286	419·2	6374·2	3824·52	5·228	
66·48	55·4		33·24	8	294	443·2	6817·4	4090·44	5·143	
71·28	59·4		35·64	8	302	475·2	7292·6	4375·56	5·029	
74·40		62·0	37·20	8	310	496·0	7788·6	4673·16	4·956	
74·88	62·4		37·44	8	318	499·2	8287·8	4972·68	4·946	
79·68	66·4		39·84	8	326	531·2	8819·0	5291·40	4·849	
83·28	69·4		41·64	8	334	555·2	9374·2	5624·52	4·777	
88·08	73·4		44·04	8	342	587·2	9961·4	5976·84	4·684	
91·68	76·4		45·84	8	350	611·2	10572·6	6343·56	4·616	
92·40		77·0	46·20	8	358	616·0	11188·6	6713·16	4·604	
96·48	80·4		48·24	8	366	643·2	11831·8	7099·08	4·536	
100·08	83·4		50·04	8	374	667·2	12499·0	7499·40		
104·88	87·4		52·44	8	382	699·2	13198·2	7918·92		
108·48	90·4		54·24	8	390	723·2	13921·4	8352·84		
113·28	94·4		56·64	8	398	755·2	14676·6	8805·96		
116·40		97·0	58·20	8	406	776·0	15452·6	9271·56		
116·88	97·4		58·44	8	414	779·2	16231·8	9739·08		
121·68	101·4		60·84	8	422	811·2	17043·0	10225·80		
125·28	104·4		62·64	8	430	835·2	17878·2	10726·92		
130·08	108·4		65·04	8	438	867·2	18745·4	11247·24		

Exemples: Charge pr. m. (m)	(t)	> de (%)
2	16·644	+ 37·6
3	13·519	+ 11·4
5	11·107	
10	7·508	
12	7·194	
13	7·132	
14	7·090	+ 10·4
15	7·101	+ 14·9
16	7·052	+ 17·6
18	6·857	+ 17·4
20	6·628	+ 13·6
22	6·452	+ 9·7
24	6·305	+ 7·7
26	6·178	+ 6·6
28	6·010*	
29	5·948	+ 5·8
30	5·887	
35	5·775	
38	5·713	
40	5·671	
45	5·593	
50	5·501	+ 1·5
55	5·401	+ 1·3
60	5·297	+ 1·3
65	5·179	+ 1·1
70	5·061	+ 0·9
75	4·933	+ 0·4
80	4·843	+ 0·6
85	4·745	+ 0·6
90	4·649	+ 0·6
95	4·562	+ 0·5
100	4·480	+ 0·5
105	4·403	+ 0·5
110	4·330	+ 0·4
115	4·258	+ 0·4
120	4·195	+ 0·3
125	4·134	+ 0·3
130	4·076	+ 0·3

* Avec l'essieu *B* aux ³/₁₆ de la portée même 6·023 (voir le tableau résumé à la page 52).

XX. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes vers le $^1/_6$ de la portée.

```
                 Locomotive                    Locomotive              Tender                Wagon       Wagon       Wagon
               13   13   13   13           13   13   13   13         10   10   10            8    8      8    8      8    8
               A    B    C    D            E    F    G    H
. . 4·5 . . ×1·2×1·2×1·2× . . 5·6 . . ×1·2×1·2×1·2× . . 4·5 . . ×1·6×1·4× . 3·7 . ×3·0× . 4·0 . ×3·0× . 4·0 . ×3·0×
. . . . . . . . 39. . 26. . 13. . ×) . . . . . . 13. . × . . 65. .130. . . . . 180. .230. 280. . . . . 320. 360
             3·6   2·4   1·2   0            1·2   0    6·0  12·0          34·5  42·5  49·5          68·0  23·0      103·0
. . . . . . . . 78. . 65. . 52. . 39. . . . . . . 26. . 13. . × . . 65. . . . . 115. .165. 215. . . . . 255. 295
            11·6  10·4   9·2   8·0           2·4   1·2   0    6·0          28·5  36·5  43·5          62·0  77·0       97·0
. . . . . . . . 91. . 78. . 65. . 52. . . . . . . 39. . 26. . 13. . × . . . . . . 50. .100. 150. . . . . 190. 230
            12·8  11·6  10·4   9·2           3·6   2·4   1·2   0           22·5  30·5  37·5          56·0  71·0       91·0
```

Barême pour les essieux *D, H, F* au $^1/_6$ de la portée.

l	a''_n	$5a'_n$	a	P_n	ΣP_n	$a''_n P''_n$ ou $5 a'_n P'_n$	$\Sigma a''_n P''_n + 5 \Sigma a'_n P'_n$	$\frac{6}{10}\left(\Sigma a''_n P''_n + 5 \Sigma a'_n P'_n\right)$	p''	Maximum
m	m	m	m	t	t	mt	mt	mt	t	
Barême pour l'essieu *D*.										
1·44	1·2		0·72	13	26	15·6	15·6	9·36	18·056	
2·88	2·4		1·44	13	39	31·2	46·8	28·08	13·542	
4·32	3·6		2·16	13	52	46·8	93·6	56·16	12·311	
9·72	8·1		4·86	10	62	81·0	174·6	104·76	8·332	
11·64	9·7		5·82	10	72	97·0	271·6	162·96	7·571	
13·32	11·1		6·66	10	82	111·0	382·6	229·56	7·137	
18·72	15·6		9·36	13	95	202·8	585·4	351·24	*6·141*	
Barême pour l'essieu *H*.										
11·04	9·2		5·52	13	65	119·6	213·2	127·92	*7·577*	
12·48	10·4		6·24	13	78	135·2	348·4	209·04	*7·132*	
13·92	11·6		6·96	13	91	150·8	499·2	299·52	*6·891*	
Barême pour l'essieu *F*.										
21·48	17·9		10·74	10	134	179·0	1189·8	713·88		
26·88	22·4		13·44	13	147	291·2	1481·0	888·60		
28·32	23·6		14·16	13	160	306·8	1787·8	1072·68	*5·950*	
29·76	24·8		14·88	13	173	322·4	2110·2	1266·12	5·908	
31·20	26·0		15·60	13	186	338·0	2448·2	1468·92	5·887	
36·60	30·5		18·30	10	196	305·0	2753·2	1651·92	5·778	
38·52	32·1		19·26	10	206	321·0	3074·2	1844·52	5·728	
40·20	33·5		20·10	10	216	335·0	3409·2	2045·52	5·683	
41·40		34·5	20·70	10	226	345·0	3754·2	2252·52	5·661	
44·64	37·2		22·32	8	234	297·6	4051·8	2431·08	5·604	
48·24	40·2		24·12	8	242	321·6	4373·4	2624·04	5·523	
51·00		42·5	25·50	10	252	425·0	4798·4	2879·04	*5·455*	
53·04	44·2		26·52	8	260	353·6	5152·0	3091·20		
Barême pour l'essieu *H*.										
43·08	35·9		21·54	10	236	359·0	4176·8	2506·08		
45·00		37·5	22·50	10	246	375·0	4551·8	2731·08		
47·52	39·6		23·76	8	254	316·8	4868·6	2921·16		
51·12	42·6		25·56	8	262	340·8	5209·4	3125·64		
55·92	46·6		27·96	8	270	372·8	5582·2	3349·32		
59·52	49·6		29·76	8	278	396·8	5979·0	3587·40		
64·32	53·6		32·16	8	286	428·8	6407·8	3844·68		
67·20		56·0	33·60	8	294	448·0	6855·8	4113·48		
67·92	56·6		33·96	8	302	452·8	7308·6	4385·16		
72·72	60·6		36·36	8	310	484·8	7793·4	4676·04		
76·32	63·6		38·16	8	318	508·8	8302·2	4981·32		
81·12	67·6		40·56	8	326	540·8	8843·0	5305·80		
84·72	70·6		42·36	8	334	564·8	9407·8	5644·68		
85·92		71·6	42·96	8	342	572·8	9980·6	5988·36		
89·52	74·6		44·76	8	350	596·8	10577·4	6346·44		
93·12	77·6		46·56	8	358	620·8	11198·2	6718·92		

Exemples

Charge pr. m. (m)	Charge pr. m. (t)	> de (%)
Essieu *D*		
4	12·480	+ 6·7
5	11·814	+ 9·2
6	11·088	+ 6·7
7	10·278	+ 5·2
8	9·490	+ 4·3
9	8·782	+ 3·6
10	8·210	+ 3·9
11	7·810	+ 5·7
12	7·478	+ 6·5
13	7·220	+ 7·6
14	7·029	
Essieu *H*		
12	7·280	
13	7·053	
14	6·888	
Essieu *F*		
26	6·084	
28	5·966	
29	5·933	
30	5·906	+ 5·8
32	5·870	+ 5·9
35	5·833	+ 5·0
38	5·740	+ 3·2
40	5·689	+ 2·4
42	5·654	+ 2·3
45	5·509	+ 2·2
50	5·482	
Essieu *H*		
50	5·486	
70	5·049	
90	4·644	

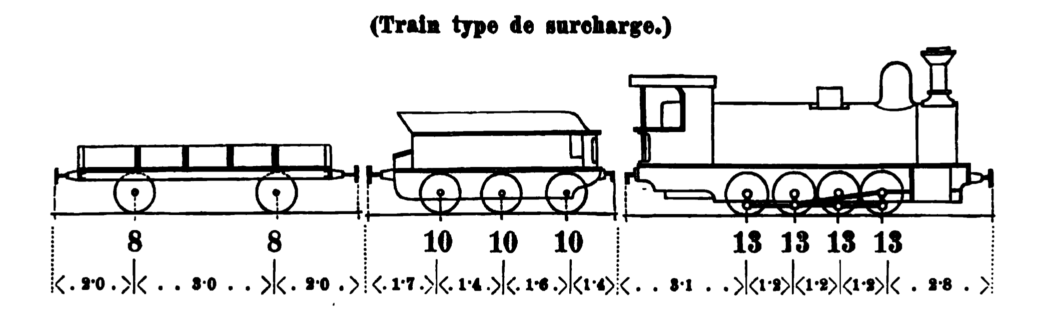
NB. Le tableau résumé des résultats trouvés est à la page 52.

XX. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes vers le 1/6 de la portée

en vue de trains de surcharge formés avec trois locomotives à quatre essieux de 13 tonnes circulant sur les lignes d'intérêt général où l'on applique le

100°/0 des échelles de l'ordonnance.

(Train type de surcharge.)



Scale A: **Surcharges pour les bandes au 1/6 de la portée.**

Portée du pont l	Charge mobile par mètre de voie: d'après l'ordonnance 100% de l'échelle A $\mathfrak{p}$	provenant du train: avec l'essieu	en tonnes par m. p''	Excès sur $\mathfrak{p}$ en %	Excès sur p en %	Portée du pont l	Charge mobile par mètre de voie: d'après l'ordonnance 100% de l'échelle A $\mathfrak{p}$	provenant du train: avec l'essieu	en tonnes par m. p''	Excès sur $\mathfrak{p}$ en %	Excès sur p en %
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
m	t		t			m	t		t		
1	30·000	*D*	26·000	—13·3	+ 0·0	15	7·000	*G*	7·101	+ 1·4	+14·9
2	15·000	»	16·644	+11·0	+27·6	20	6·500	»	6·628	+ 2·0	+13·6
3	13·100	»	13·519	+ 3·2	+11·4	25	6·275	»	6·253	— 0·2	+ 7·1
4	12·300	»	12·480	+ 1·5	+ 6·7	30	6·050	*F*	5·906	— 2·4	+ 5·8
5	11·500	»	11·814	+ 2·7	+ 9·2	35	5·825	»	5·833	+ 0·1	+ 5·0
6	10·900	»	11·093	+ 1·8	+ 6·7	40	5·600	»	5·689	+ 1·3	+ 2·4
7	10·300	»	10·273	— 0·3	+ 5·2	45	5·450	»	5·599	+ 2·7	+ 2·2
8	9·700	»	9·490	— 2·2	+ 4·3	50	5·300	*G*	5·501	+ 3·8	+ 1·5
9	9·160	»	8·782	— 4·1	+ 3·6	55	5·150	»	5·401	+ 4·9	+ 1·3
10	8·500	»	8·210	— 3·4	+ 3·9	60	5·000	»	5·297	+ 5·9	+ 1·3
11	8·200	»	7·810	— 4·8	+ 5·7	65	4·850	»	5·179	+ 6·8	+ 1·1
12	7·900	»	7·473	— 5·4	+ 6·5	70	4·700	»	5·061	+ 7·7	+ 0·9
13	7·600	»	7·220	— 5·0	+ 7·6	75	4·550	»	4·933	+ 8·4	+ 0·4
14	7·300	*G*	7·090	— 2·9	+10·4	80	4·400	»	4·843	+10·1	+ 0·6
15	7·000	»	7·101	+ 1·4	+14·9	85	4·325	»	4·745	+ 9·7	+ 0·6
16	6·900	»	7·052	+ 2·2	+17·6	90	4·250	»	4·649	+ 9·4	+ 0·6
17	6·800	»	6·967	+ 2·5	+18·1	95	4·175	»	4·562	+ 9·3	+ 0·5
18	6·700	»	6·857	+ 2·3	+17·4	100	4·105	»	4·480	+ 9·1	+ 0·5
19	6·600	»	6·731	+ 2·0	+15·5	105	4·025	»	4·403	+ 9·4	+ 0·5
20	6·500	»	6·628	+ 2·0	+13·6	110	3·950	»	4·330	+ 9·7	+ 0·4
21	6·455	»	6·528	+ 1·1	+11·7	115	3·875	»	4·258	+ 9·9	+ 0·4
22	6·410	»	6·452	+ 0·7	+ 9·7	120	3·800	»	4·195	+10·4	+ 0·3
23	6·365	»	6·374	+ 0·1	+ 8·3	125	3·750	»	4·134	+10·2	+ 0·3
24	6·320	»	6·305	— 0·2	+ 7·7	130	3·700	»	4·076	+10·1	+ 0·3
25	6·275	»	6·253	— 0·2	+ 7·1	135	3·650	»			
26	6·230	»	6·178	— 0·8	+ 6·6	140	3·600	»			
27	6·185	»	6·096	— 1·4	+ 6·2	145	3·550	»			
28	6·140	*B*	6·023	— 1·9	+ 6·0	150	3·500	»	à peu		à peu
29	6·095	*G*	5·943	— 2·5	+ 5·8	155	3·450	»	près		près
30	6·050	*F*	5·906	— 2·4	+ 5·8	160	3·400	»	$= p$	+11·4	= 0

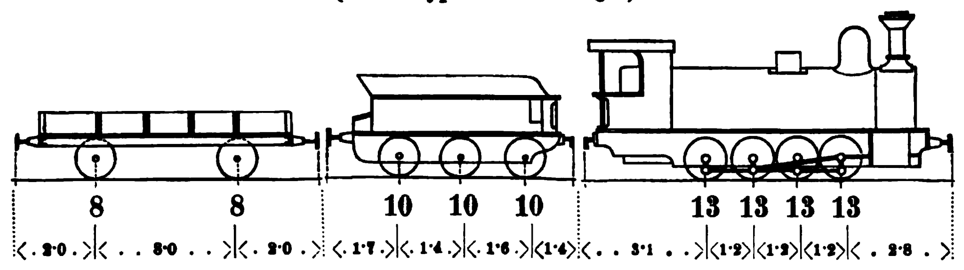
NB. Les détails du calcul se trouvent sur les pages 50 et 51.

XXI. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des croisillons dans toutes les mailles

en vue de trains de surcharge formés avec trois locomotives à quatre essieux de 13 tonnes circulant sur les lignes d'intérêt général où l'on applique le

100% des échelles de l'ordonnance.

(Train type de surcharge.)



Scala b: **Surcharges pour les croisillons.**

Longueur surchargée l'	Charge mobile par mètre de voie: d'après l'ordonnance 100% de l'échelle b p'	provenant du train: Train tranchant ou fléchissant	provenant du train: en tonnes par mètre p'	provenant du train: en centièmes de p' %	Longueur surchargée l'	Charge mobile par mètre de voie: d'après l'ordonnance 100% de l'échelle b p'	provenant du train: Train tranchant ou fléchissant	provenant du train: en tonnes par mètre p'	provenant du train: en centièmes de p' %
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
m	t		t		m	t		t	
1	30·000	Tr. trch.	26·000	87	15	8·500	Tr. trch.	7·951	93
2	20·000	"	18·200	91	20	7·600	"	7·262	95
3	17·200	"	15·600	91	25	7·250	"	6·790	94
4	15·600	"	14·300	92	30	6·900	"	6·592	96
5	14·000	"	13·312	95	35	6·550	"	6·404	98
6	13·200	"	12·133	92	40	6·200	"	6·246	101
7	12·400	"	11·037	89	45	6·025	"	6·060	101
8	11·600	"	10·075	87	50	5·850	Tr. fléch.	5·884	101
9	10·800	"	9·467	87	55	5·675	"	5·739	101
10	10·000	"	8·968	90	60	5·500	"	5·590	102
11	9·700	"	8·602	89	65	5·325	"	5·458	102
12	9·400	"	8·353	89	70	5·150	"	5·307	103
13	9·100	Tr. fléch.	8·123	89	75	4·975	"	5·177	104
14	8·800	"	8·065	92	80	4·800	"	5·055	105
15	8·500	"	7·951	93	85	4·700	"	4·928	105
16	8·320	"	7·800	94	90	4·600	"	4·832	105
17	8·140	"	7·623	94	95	4·500	"	4·732	105
18	7·960	"	7·490	94	100	4·400	"	4·640	105
19	7·780	"	7·360	95	105	4·300	"	4·552	106
20	7·600	"	7·262	95	110	4·200	"	4·471	106
21	7·530	"	7·185	95	115	4·100	"	4·395	107
22	7·460	"	7·097	95	120	4·000	"	4·324	108
23	7·390	"	7·000	95	125	3·937	"	4·257	108
24	7·320	"	6·894	94	130	3·875	"	4·194	108
25	7·250	"	6·790	94	135	3·812	"	4·136	109
26	7·180	"	6·713	94	140	3·750	"	4·080	109
27	7·110	"	6·664	94	145	3·687	"	4·029	109
28	7·040	"	6·631	94	150	3·625	"	3·979	110
29	6·970	"	6·612	95	155	3·562	"	3·932	110
30	6·900	"	6·592	96	160	3·500	"	3·887	111

NB. Les détails du calcul se trouvent sur les pages 54 et 55.

XXI. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des croisillons.

	Wagon			Wagon			Wagon			Wagon			Wagon			Tender			
	8		8		8		8		8		8		8		8		8		8		10		10		10	
Train fléchissant	×	3·0	×	. 4·0 .	×	3·0	×	. 4·0 .	×	3·0	×	. 4·0 .	×	3·0	×	. 4·0 .	×	3·0	×	. 3·7 .	×	1·4	×	1·6	×	. . 4·5 . .
	70·6		67·6		63·6		60·6		56·6		53·6		49·6		46·6		42·6		39·6		35·9		34·5		32·9	. . . . . .

	Wagon			Wagon			Wagon			Wagon			Tender					Locomotive						
	8		8		8		8		8		8		8		8		10		10		10		13		13		13		13	
Train tranchant	×	3·0	×	. 4·0 .	×	3·0	×	. 4·0 .	×	3·0	×	. 4·0 .	×	3·0	×	. 3·7 .	×	1·4	×	1·6	×	. 4·5 .	×	1·2	×	1·2	×	1·2	×	. . 4·5 . .
	70·0		67·0		63·0		60·0		56·0		53·0		49·0		46·0		42·3		40·9		39·3		34·8		33·6		32·4		31·2	. . . . . .

Barême des surcharges pour le train fléchissant.

l_n	l_n^2	P_n	ΣP_n	$l_n P_n$	$\Sigma l_n P_n$	p'
m	m²	t	t	mt	mt	t
0	0·00	13	13	0·0	0·0	$+\infty$
1·2	1·44	13	26	15·6	15·6	21·667
2·4	5·76	13	39	31·2	46·8	16·250
3·6	12·96	13	52	46·8	93·6	14·444
9·2	84·64	13	65	119·6	213·2	9·093
10·4	108·16	13	78	135·2	348·4	8·558
11·6	134·56	13	91	150·8	499·2	8·270
12·8	163·84	13	104	166·4	665·6	8·125
17·3	299·29	10	114	173·0	838·6	7·575
18·9	357·21	10	124	189·0	1027·6	7·368
20·3	412·09	10	134	203·0	1230·6	7·229
24·8	615·04	13	147	322·4	1553·0	6·805
26·0	676·00	13	160	338·0	1891·0	6·713
27·2	739·84	13	173	353·6	2244·6	6·653
28·4	806·56	13	186	369·2	2613·8	6·617
32·9	1082·41	10	196	329·0	2942·8	6·477
34·5	1190·25	10	206	345·0	3287·8	6·417
35·9	1288·81	10	216	359·0	3646·8	6·374
39·6	1568·16	8	224	316·8	3963·6	6·258
42·6	1814·76	8	232	340·8	4304·4	6·148
46·6	2171·56	8	240	372·8	4677·2	5·993
49·6	2460·16	8	248	396·8	5074·0	5·875
53·6	2872·96	8	256	428·8	5502·8	
56·6	3203·56	8	264	452·8	5955·6	
60·6	3672·30	8	272	484·8	6440·4	
63·6	4044·96	8	280	508·8	6949·2	
67·6	4569·76	8	288	540·8	7490·0	
70·6	4984·36	8	296	564·8	8054·8	
74·6	5565·16	8	304	596·8	8651·6	
77·6	6021·76	8	312	620·8	9272·4	
81·6	6658·56	8	320	652·8	9925·2	
84·6	7157·16	8	328	676·8	10602·0	

Exemples		en % de p'
m	t	%
2	18·200	91
3	15·600	91
4	14·300	92
5	13·812	95
6	12·188	92
7	11·087	89
8	10·075	87
9	9·467	87
10	8·736	
12	8·234	
13	8·128	89
14	8·065	92
15	7·951	93
16	7·800	94
18	7·490	94
20	7·262	95
22	7·097	95
24	6·894	94
25	6·790	94
27	6·664	94
28	6·631	94
30	6·592	96
35	6·404	98
40	6·246	101
45	6·060	101
50	5·861	
60	5·491	
70	5·172	
80	4·902	

Valeurs isolées pour le train tranchant, avec $l > 140^m$.

Valeurs de l_n pour essieux de 8t arrivant sur la portée après $l > 140$ m		ΣP_n	$\Sigma l_n P_n$	Exemples		en % de p'
		t	mt	m	t	
140m	172m	470	25817·4	140	4·080	109
144	175	478	26969·4	145	4·029	109
147	179	486	28145·4	150	3·979	110
151	182	502	30585·4	155	3·932	110
154	186	510	31849·4	160	3·887	111
158	189	534	35801·4	170	3·805	
161	193	558	40009·0	180	3·731	
165	196	606	49177·4	200	3·601	
168	200					

NB. Le tableau résumé des maxima de p' est à la page 53.

XXI. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des croisillons.

Locomotive 13 13 13 13 · Tender 10 10 10 · Locomotive 13 13 13 13 · Locomotive 13 13 13 13

. 4·5 . . × 1·2 × 1·2 × 1·2 × . . . 4·5 . . . × 1·4 × 1·6 × . . . 4·5 . . . × 1·2 × 1·2 × 1·2 × . . . 5·6 . . . × 1·2 × 1·2 × 1·2 △

. . . . 28·4 27·2 26·0 24·8 · 20·3 18·9 17·3 · 12·8 11·6 10·4 9·2 · 3·6 2·4 1·2 0

Tender 10 10 10 · Locomotive 13 13 13 13 · Tender 10 10 10 · Locomotive 13 13 13 13

. 4·5 . . . × 1·4 × 1·6 × . . . 4·5 . . . × 1·2 × 1·2 × 1·2 × . . . 4·5 . . . × 1·4 × 1·6 × . . . 4·5 . . . × 1·2 × 1·2 × 1·2 △

. . . . 26·7 25·3 23·7 · 19·2 18·0 16·8 15·6 · 11·1 9·7 8·1 · 3·6 2·4 1·2 0

Barême des surcharges pour le train tranchant.

l_n	l_n^2	P_n	ΣP_n	$l_n P_n$	$\Sigma l_n P_n$	p'	Exemples	En % de p'
m	m²	t	t	mt	mt	t	m . . . . t	%
0	0·00	13	13	0·0	0·0		2 . . . . 18·200	91
1·2	1·44	13	26	15·6	15·6	21·667	3 . . . . 15·600	91
2·4	5·76	13	39	31·2	46·8	16·250	4 . . . . 14·300 5 . . . . 13·812	92 95
3·6	12·96	13	52	46·8	93·6	14·444	6 . . . . 12·133 7 . . . . 11·037	92 89
8·1	65·61	10	62	81·0	174·6	9·985	8 . . . . 10·075	87
9·7	94·09	10	72	97·0	271·6	9·072	9 . . . . 9·467 10 . . . . 8·968	87 90
11·1	123·21	10	82	111·0	382·6	8·564	12 . . . . 8·358	89
15·6	243·36	13	95	202·8	585·4	7·369	13 . . . . 8·088 14 . . . . 7·810	
16·8	282·24	13	108	218·4	803·8	*7·161*	15 . . . . 7·532	
18·0	324·00	13	121	234·0	1037·8			
19·2	368·64	13	134	249·6	1287·4			
23·7	561·69	10	144	237·0	1524·4		20 . . . . 6·963	
25·3	640·09	10	154	253·0	1777·4			
26·7	712·89	10	164	267·0	2044·4			
31·2	973·44	13	177	405·6	2450·0		30 . . . . 6·190	
32·4	1049·76	13	190	421·2	2871·2			
33·6	1128·96	13	203	436·8	3308·0			
34·8	1211·04	13	216	452·4	3760·4			
39·3	1544·49	10	226	393·0	4153·4		35 . . . . 6·203	
40·9	1672·81	10	236	409·0	4562·4		40 . . . . 6·108	
42·3	1789·29	10	246	423·0	4985·4	*6·056*	45 . . . . 6·010	
46·0	2116·00	8	254	368·0	5353·4	*5·983*		
49·0	2401·00	8	262	392·0	5745·4	5·908	50 . . . . 5·884	101
53·0	2809·00	8	270	424·0	6169·4	5·796	55 . . . . 5·739	101
56·0	3136·00	8	278	448·0	6617·4	5·708		
60·0	3600·00	8	286	480·0	7097·4	5·590		
63·0	3969·00	8	294	504·0	7601·4	5·503	65 . . . . 5·458	102
67·0	4489·00	8	302	536·0	8137·4	5·389		
70·0	4900·00	8	310	560·0	8697·4	5·307		
74·0	5476·00	8	318	592·0	9289·4	5·202	75 . . . . 5·177	104
77·0	5929·00	8	326	616·0	9905·4	5·126	78 . . . . 5·108	
81·0	6561·00	8	334	648·0	10553·4	5·030	80 . . . . 5·055	105
84·0	7056·00	8	342	672·0	11225·4	4·961		
88·0	7744·00	8	350	704·0	11929·4	4·874	85 . . . . 4·928	105
91·0	8281·00	8	358	728·0	12657·4	4·811	90 . . . . 4·832	105
95·0	9025·00	8	366	760·0	13417·4	4·732		
98·0	9604·00	8	374	784·0	14201·4	4·675		
102·0	10404·00	8	382	816·0	15017·4		100 . . . . 4·640 104 . . . . 4·569	105 106
105·0	11025·00	8	390	840·0	15857·4	4·552		
109·0	11881·00	8	398	872·0	16729·4			
112·0	12544·00	8	406	896·0	17625·4	4·440	110 . . . . 4·471 115 . . . . 4·395	106 107
116·0	13456·00	8	414	928·0	18553·4			
119·0	14161·00	8	422	952·0	19505·4			
123·0	15129·00	8	430	984·0	20489·4		120 . . . . 4·324	108
126·0	15876·00	8	438	1008·0	21497·4		125 . . . . 4·257	108
130·0	16900·00	8	446	1040·0	22537·4	4·194		
133·0	17689·00	8	454	1064·0	23601·4	4·159	135 . . . . 4·136	109
137·0	18769·00	8	462	1096·0	24697·4			
140·0	19600·00	8	470	1120·0	25817·4	4·080		

NB. Le tableau résumé des maxima de p' est à la page 53.

XXII. Calcul comparatif des surcharges équivalentes uniformes pour le calcul

Portée	$l' = 0{\cdot}87\,l$			$l' = 0{\cdot}83\,l$			$l' = 0{\cdot}79\,l$			$l' = 0{\cdot}75\,l$		
l	l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'}-p'_l}{p'_l}$	l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'}-p'_l}{p'_l}$	l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'}-p'_l}{p'_l}$	l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'}-p'_l}{p'_l}$
m	m	t	%	m	t	%	m	t	%	m	t	%
10	8·70	9·639	7·5	8·30	9·871	10·1	7·90	10·165	13·4	7·50	10·539	17·5
11	9·57	9·144	6·3	9·13	9·392	9·2	8·69	9·645	12·1	8·25	9·900	15·1
12	10·44	8·809	5·5	9·96	8·982	7·5	9·48	9·194	10·1	9·00	9·467	13·3
13	11·31	8·518	4·8	10·79	8·680	6·8	10·27	8·871	9·2	9·75	9·053	11·4
14	12·18	8·307	3·0	11·62	8·446	4·7	11·06	8·579	6·4	10·50	8·787	9·0
15	13·05	8·129	2·2	12·45	8·236	3·6	11·85	8·390	5·5	11·25	8·532	7·3
16	13·92	8·072	3·5	13·28	8·114	4·0	12·64	8·186	4·9	12·00	8·353	7·1
17	14·79	7·978	4·6	14·11	8·055	5·7	13·43	8·107	6·3	12·75	8·156	7·0
18	15·66	7·854	4·9	14·94	7·958	6·1	14·22	8·044	7·4	13·50	8·103	8·2
20	17·40	7·564	4·1	16·60	7·699	6·0	15·80	7·832	7·9	15·00	7·951	9·5
22	19·14	7·347	3·5	18·26	7·456	5·1	17·38	7·566	6·6	16·50	7·715	8·7
24	20·88	7·190	4·3	19·92	7·271	5·5	18·96	7·363	6·8	18·00	7·490	8·7
26	22·62	7·035	4·8	21·58	7·134	6·3	20·54	7·214	7·5	19·50	7·318	8·9
28	24·36	6·854	3·3	23·24	6·975	5·2	22·12	7·085	6·8	21·00	7·185	8·3
30	26·10	6·709	1·8	24·90	6·798	3·1	23·70	6·926	5·1	22·50	7·049	6·9
35	30·45	6·579	2·7	29·05	6·611	3·2	27·65	6·642	3·7	26·25	6·702	4·6
40	34·80	6·409	2·6	33·20	6·468	3·5	31·60	6·537	4·7	30·00	6·592	5·5
45	39·15	6·276	2·6	37·35	6·338	4·6	35·55	6·386	5·4	33·75	6·448	6·4
50	43·50	6·117	3·9	41·50	6·192	5·2	39·50	6·262	6·4	37·50	6·333	7·6
55	47·85	5·946	3·8	45·65	6·033	4·9	43·45	6·119	6·6	41·25	6·202	8·0
60	52·20	5·821	4·1	49·80	5·889	5·3	47·40	5·963	6·7	45·00	6·060	8·4

NB. Le tableau résumé des

des croisillons, obtenues en considérant les diverses sections des ponts. *XXII.*

$l' = 0{\cdot}70\, l$			$l' = 0{\cdot}65\, l$			$l' = 0{\cdot}60\, l$			$l' = 0{\cdot}50\, l$			Portée
l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'} - p'_l}{p'_l}$	l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'} - p'_l}{p'_l}$	l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'} - p'_l}{p'_l}$	l'	$p'_{l'}$	$\frac{p'_{l'} - p'_l}{p'_l}$	l
m	t	%	m	t	%	m	t	%	m	t	%	m
7·00	11·037	23·1	6·50	11·569	29·0	6·00	12·133	35·3	5·00	13·312	48·6	10
7·70	10·349	20·3	7·15	10·883	26·5	6·60	11·460	33·2	5·50	12·720	47·9	11
8·40	9·813	17·5	7·80	10·257	22·8	7·20	10·833	29·6	6·00	12·133	45·2	12
9·10	9·409	15·8	8·45	9·784	20·4	7·80	10·257	26·2	6·50	11·569	42·4	13
9·80	9·036	12·1	9·10	9·409	16·7	8·40	9·813	21·8	7·00	11·037	37·0	14
10·50	8·787	10·5	9·75	9·053	13·9	9·00	9·467	19·1	7·50	10·539	32·6	15
11·20	8·543	9·5	10·40	8·824	13·1	9·60	9·129	17·0	8·00	10·075	29·2	16
11·90	8·378	9·9	11·05	8·583	13·6	10·20	8·896	16·7	8·50	9·755	28·0	17
12·60	8·196	9·4	11·70	8·427	12·5	10·80	8·676	15·8	9·00	9·467	26·4	18
14·00	8·065	11·1	13·00	8·123	11·9	12·00	8·353	15·0	10·00	8·968	23·5	20
15·40	7·893	11·2	14·30	8·036	13·2	13·20	8·117	14·4	11·00	8·602	21·2	22
16·80	7·664	11·2	15·60	7·866	14·3	14·40	8·025	16·4	12·00	8·353	21·2	24
18·20	7·464	11·2	16·90	7·647	13·9	15·60	7·866	17·2	13·00	8·123	21·0	26
19·60	7·303	10·2	18·20	7·464	12·6	16·80	7·664	15·6	14·00	8·065	21·6	28
21·00	7·185	9·0	19·50	7·313	10·9	18·00	7·490	13·6	15·00	7·951	20·6	30
24·50	6·838	6·8	22·75	7·025	9·7	21·00	7·185	12·2	17·50	7·552	18·0	35
28·00	6·631	6·2	26·00	6·713	7·5	24·00	6·894	10·4	20·00	7·262	16·3	40
31·50	6·541	7·9	29·25	6·608	9·0	27·00	6·664	10·0	22·50	7·049	16·4	45
35·00	6·404	8·8	32·50	6·497	10·4	30·00	6·592	12·0	25·00	6·790	15·4	50
38·50	6·300	9·8	35·75	6·379	11·1	33·00	6·474	12·8	27·50	6·646	15·8	55
42·00	6·173	10·4	39·00	6·282	12·4	36·00	6·372	14·0	30·00	6·592	17·9	60

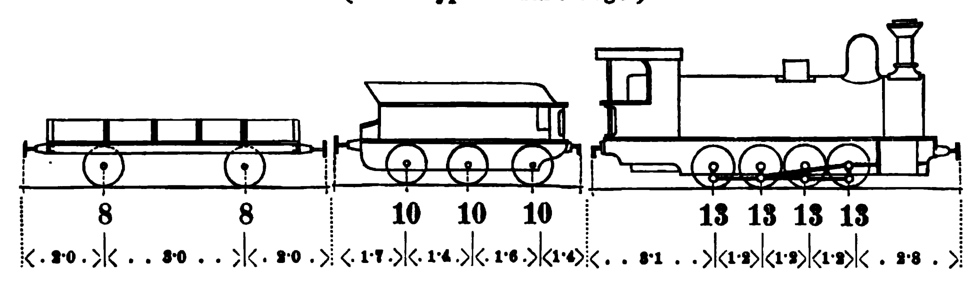
résultats trouvés est à la page 58.

XXII. Calcul comparatif des surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des croisillons, obtenues en considérant un appui et les diverses sections des ponts,

en vue de trains de surcharge formés avec trois locomotives à quatre essieux de 13 tonnes circulant sur les lignes d'intérêt général où l'on applique le

100 % des échelles de l'ordonnance.

(Train type de surcharge.)



Scala b:

Excès des surcharges $p'_{l'}$ obtenues pour des sections diverses des ponts, sur les surcharges p'_l obtenues pour un appui, en % des ces dernières.

Portée l	Valeurs de $(p'_{l'} - p'_l):p'_l$ pour $l':l =$				Portée l	Valeurs de $(p_{l'} - p_l):p'_l$ pour $l':l =$			
	0·79	0·75	0·70	0·65		0·79	0·75	0·70	0·65
m	%	%	%	%	m	%	%	%	%
10	13·4	17·5	23·1	29·0	35	3·7	4·6	6·8	9·7
11	12·1	15·1	20·3	26·5	40	4·7	5·5	6·2	7·5
12	10·1	13·3	17·5	22·8	45	5·4	6·4	7·9	9·0
13	9·2	11·4	15·8	20·4	50	6·4	7·6	8·8	10·4
14	6·4	9·0	12·1	16·7	55	6·6	8·0	9·8	11·1
15	5·5	7·3	10·5	13·9	60	6·7	8·4	10·4	12·4
16	4·9	7·1	9·5	13·1	65	7·1	8·5	10·8	13·0
17	6·3	7·0	9·9	13·6	70	8·0	9·5	11·6	13·6
18	7·4	8·2	9·4	12·5	75	8·6	10·2	12·1	14·2
20	7·9	9·5	11·1	11·9	80	8·8	10·6	12·9	15·2
22	6·6	8·7	11·2	13·2	90	9·3	11·3	13·9	16·7
24	6·8	8·7	11·2	14·3	100	9·5	11·6	14·3	17·5
26	7·5	8·9	11·2	13·9	120	9·5	11·7	14·7	18·0
28	6·8	8·3	10·2	12·6	140	9·4	11·5	14·6	17·9
30	5·1	6·9	9·0	10·9	160	9·1	11·4	14·2	17·5

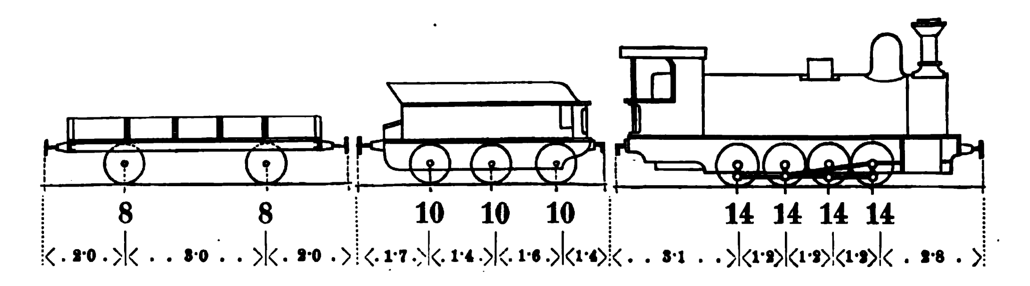
NB. Les détails du calcul se trouvent sur les pages 56 et 57.

XXIII. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes et des croisillons

en vue de trains de surcharge formés avec deux locomotives à quatre essieux de 14 tonnes circulant sur les lignes d'intérêt général où l'on applique le

100% des échelles de l'ordonnance.

(Train type de l'Arlberg.)



Scala a: Pour les bandes. **Scala b: Pour les croisillons.**

Portée du pont	Charge mobile par mètre de voie					Longueur surchargée	Charge mobile pr. m. de voie		
	d'après l'ordonnance 100% de l'échelle a	provenant du train					d'après l'ordonnance 100% de l'échelle b	provenant du train	
		au milieu de la portée		vers le (1/4) de la portée					
		en tonnes par mètre	en centièmes de p	en tonnes par mètre	en centièmes de p			en tonnes par mètre	en centièmes de p'
l	p	p	%	p''	%	l	p'	p'	%
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
m	t	t	%	t	%	m	t	t	%
1	30·000	28·000	93	28·000	93	1	30·000	28·000	93
2	15·000	14·000	93	17·920	119	2	20·000	19·600	95
3	13·100	13·067	100	14·187	108	3	17·200	16·800	98
4	12·300	12·600	102	13·440	109	4	15·600	15·400	99
5	11·500	11·648	101	12·723	110	5	14·000	14·336	102
6	10·900	11·200	103	11·947	109	6	13·200	13·067	99
7	10·300	10·514	102	11·063	107	7	12·400	11·886	96
8	9·700	9·800	101	10·022	103	8	11·600	10·850	94
9	9·160	9·126	100	9·458	103	9	10·800	10·178	94
10	8·500	8·512	100	8·837	104	10	10·000	9·624	96
11	8·200	7·960	97	8·394	102	11	9·700	9·210	95
12	7·900	7·550	96	8·020	102	12	9·400	8·985	96
13	7·600	7·214	95	7·733	102	13	9·100	8·748	96
14	7·300	6·894	94	7·632	104	14	8·800	8·686	99
15	7·000	6·553	94	7·644	109	15	8·500	8·562	101
16	6·900	6·384	93	7·593	110	16	8·320	8·400	101
17	6·800	6·306	93	7·501	110	17	8·140	8·216	101
18	6·700	6·267	93	7·382	110	18	7·960	8·063	101
19	6·600	6·247	95	7·246	110	19	7·780	7·918	102
20	6·500	6·268	96	7·134	110	20	7·600	7·806	103
25	6·275	6·228	99	6·704	107	25	7·250	7·284	100
30	6·050	5·957	101	6·281	104	30	6·900	6·778	98
35	5·825	5·780	99	5·905	101	35	6·550	6·446	98
40	5·600	5·595	100	5·620	100	40	6·200	6·136	99
45	5·450	5·393	99	5·375	99	45	6·025	5·858	97
50	5·300	5·208	98	5·203	98	50	5·850	5·609	96
55	5·150	5·032	98	5·033	98	55	5·675	5·358	95
60	5·000	4·872	97	4·873	97	60	5·500	5·188	94
65	4·850	4·731	98	4·720	98	65	5·325	5·011	94
70	4·700	4·598	98	4·590	98	70	5·150	4·856	94

NB. Les détails du calcul se trouvent sur les pages 60, 61, 62.

XXIII. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes ou milieu de la portée.

	Wagon		Wagon		Wagon		Tender			Locomotive			
	8	8	8	8	8	8	10	10	10	14 *A*	14 *B*	14 *C*	14 *D*
Distances	×3·0×	.4·0.	×3·0×	.4·0.	×3·0×	.3·7.	×1·4×	1·6×	.4·5.	×1·2×	1·2×	1·2×	.5·6.
Pour l'essieu *D*:	120	112	104	96	88	80	72	62	52	42	28	14	×
	31·8	28·8	24·8	21·8	17·8	14·8	11·1	9·7	8·1	3·6	2·4	1·2	0
Pour l'essieu *C*:	106	98	90	82	74	66	58	48	38	28	14	×	14
	30·6	27·6	23·6	20·6	16·6	13·6	9·9	8·5	6·9	2·4	1·2	0	1·2
Pour l'essieu *B*:	92	84	76	68	60	52	44	34	24	14	×	14	28
	29·4	26·4	22·4	19·4	15·4	12·4	8·7	7·3	5·7	1·2	0	1·2	2·4
Train fléchissant:	41·0	38·0	34·0	31·0	27·0	24·0	20·3	18·9	17·3	12·8	11·6	10·4	9·2
Train tranchant:	47·4	44·4	40·4	37·4	33·4	30·4	26·7	25·3	23·7	19·2	18·0	16·8	15·6

Scala a: **Barême des surcharges pour l'essieu *B* sur le milieu.**

$l=2a$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p	Maximum	Exemples		En % de la charge du train type	En % de la charge de l'échelle a
m			m²	t	t	mt	mt	t		m	t	%	%
0·0	0·0	*0·0*	0·00	14	14	0·0	0·0	+∞					
2·4	1·2	*1·2*	1·44	28	42	33·6	33·6	11·667		5 6	11·648 11·200	108 108	101 103
4·8		*2·4*	5·76	14	56	33·6	67·2	11·667		8 10	9·800 8·512	108 108	101 100
11·4	5·7		32·49	10	66	57	124·2	7·756		12	7·550	108	96
14·6	7·3		53·29	10	76	73	197·2	6·710		14	6·804	107	94
Barême pour l'essieu *C* sur le milieu.													
13·8	6·9		47·61	10	80	69·0	231·4	6·734		14	6·706		
16·0		*8·0*	64·00	14	94	112	343·4	6·384		15	6·558	106	94
17·0	8·5		72·25	10	104	85	428·4	6·306		18	6·267	107	93
18·4		*9·2*	84·64	14	118	128·8	557·2	6·243		19	6·247	107	95
19·8	9·9		98·01	10	128	99	656·2	6·234		20	6·238		
20·8		*10·4*	108·16	14	142	145·6	801·8	6·230		22	6·283	107	98
27·2	13·6		194·96	8	150	108·8	910·6	6·106		24 26	6·265 6·178	107 107	99 99
29·8		*14·9*	222·01	10	160	149	1059·6	5·966		28	6·069	107	99
33·0		*16·5*	272·25	10	170	165	1224·6	*5·805*		30	5·873		
Barême pour l'essieu *D* sur le milieu.													
16·0		*8·0*	64·00	14	98		386·4	*6·212*					
16·2	8·1		65·61	10	108	81·0	467·4	*6·209*		18	6·230		
18·4		*9·2*	84·64	14	122	128·8	596·2	*6·217*					
19·4	9·7		94·09	10	132	97	693·2	6·241		19	6·236		
22·2	11·1		123·21	10	142	111	804·2	6·266		20	6·268	107	96
27·4		*13·7*	187·69	10	152	137	941·2	6·080		24	6·249		
29·6	14·8		219·04	8	160	118·4	1059·6	5·973		28	6·055		
30·6		*15·3*	234·09	10	170	153	1212·6	5·931		30	5·957	107	101
33·4		*16·7*	278·89	10	180	167	1379·6	5·832		32	5·888	106	99
35·6	17·8		316·84	8	188	142·4	1522·0	5·758		35	5·780	104	99
40·8		*20·4*	416·16	8	196	163·2	1685·2	5·558		40	5·595	101	100
43·6	21·8		475·24	8	204	174·4	1859·6	5·445					
46·8		*23·4*	547·46	8	212	187·2	2046·8	5·322		45	5·393	98	99
49·6	24·8		615·04	8	220	198·4	2245·2	5·221		50	5·208	96	98
54·8		*27·4*	750·76	8	228	219·2	2464·4	5·039		55	5·082	94	98
57·6	28·8		829·44	8	236	230·4	2694·8	4·946					
60·8		*30·4*	924·16	8	244	243·2	2938·0	4·847		60	4·872	93	97
63·6	31·8		1011·24	8	252	254·4	3192·4	4·768		65	4·781	92	98
68·8		*34·4*	1183·36	8	260	275·2	3467·6	4·628		70	4·598	92	98
71·6	35·8		1281·64	8	268	286·4	3754·0	4·556					
74·8		*37·4*	1398·76	8	276	299·2	4053·2	4·482					
77·6	38·8		1505·44	8	284	310·4	4363·6						
82·8		*41·4*	1713·96	8	292	331·2	4694·8			80	4·378	91	99
85·6	42·8		1831·84	8	300	342·4	5037·2						
88·8		*44·4*	1971·36	8	308	355·2	5392·4			90	4·181	90	98
91·6	45·8		2097·64	8	316	366·4	5758·8						
96·8		*48·4*	2342·56	8	324	387·2	6146·0						
99·6	49·8		2440·36	8	332	398·4	6544·4			100	4·023	90	98
102·8		*51·4*	2641·96	8	340	411·2	6955·6						

NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 59.

XXIII. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des croisillons.

Locomotive — 14, 14, 14, 14 (E, F, G, H) · **Tender** — 10, 10, 10 · **Wagon** — 8, 8 · **Wagon** — 8, 8 · **Wagon** — 8, 8

. . 5·6 . . × 1·2 × 1·2 × 1·2 × . . 4·5 . . × 1·6 × 1·4 × . . 3·7 . . × 3·0 × . . 4·0 . . × 3·0 × . . 4·0 . . × 3·0 ×

. . . . 14 . . . 28 . . . 42 . . . 56 . . . . 66 . . . 76 . . . 86 . . . . 94 . . . 102 . . . . 110 . . . 118 . . . . 126 . .
5·6 6·8 8·0 9·2 13·7 15·3 16·7 20·4 23·4 27·4 30·4 34·4 37·4

. . . . 28 . . . 42 . . . 56 . . . 70 . . . . 80 . . . 90 . . . 100 . . . . 108 . . . 116 . . . . 124 . . . 132 . . . . 140 . .
6·8 8·0 9·2 10·4 14·9 16·5 17·9 21·6 24·6 28·6 31·6 35·6 38·6

. . . . 42 . . . 56 . . . 70 . . . 84 . . . . 94 . . . 104 . . . 114 . . . . 122 . . . 130 . . . . 138 . . . 146 . . . . 154 . .
8·0 9·2 10·4 11·6 16·1 17·7 19·1 22·8 25·8 29·8 32·8 36·8 39·8

. . . . . 3·6 . . 2·4 . . 1·2 . . . 0 . . . avec l'essieu *H* sur l'appui de droite.
. . . . . 11·1 . . . . etc. . . . . suite comme ci-dessus pour l'essieu *D*, jusqu'à l'appui de droite (voir: première ligne).

Scala b: **Barême des surcharges pour le train tranchant.**

l_n	l_n^2	P_n	ΣP_n	$l_n P_n$	$\Sigma l_n P_n$	p'	Exemples		En % de la charge du train type	En % de la charge de l'échelle b
m	m	t	t	mt	mt	t	m	t	%	%
0·0	0·00	14	14	0·0	0·0	+∞				
1·2	1·44	14	28	16·8	16·8	23·333				
							2 . .	19·600	108	95
2·4	5·76	14	42	33·6	50·4	17·500	5 . .	14·336	108	102
3·6	12·96	14	56	50·4	100·8	15·555	6 . .	13·067	108	99
							7 . .	11·886	108	96
8·1	65·61	10	66	81	181·8	10·754	8 . .	10·850	108	94
							9 . .	10·178	108	94
9·7	94·09	10	76	97	278·8	9·744	10 . .	9·624	108	96
11·1	123·21	10	86	111	389·8	9·168	11 . .	9·210	107	95
							12 . .	8·985	107	96
15·6	243·36	14	100	218·4	608·2	7·822	13 . .	8·618		
							14 . .	8·308		
16·8	282·24	14	114	235·2	843·4	*7·595*				
Barême pour le train fléchissant.										
10·4	108·16	14	84	145·6	375·2	*9·216*				
							11 . .	9·071		
11·6	134·56	14	98	162·4	537·6	*8·904*				
							12 . .	8·866		
12·8	163·84	14	112	179·2	716·8	8·750	13 . .	8·748	107	96
17·3	299·29	10	122	173	889·8	8·158	14 . .	8·686	108	99
							16 . .	8·400	108	101
18·9	357·21	10	132	189	1078·8	7·928	18 . .	8·063	108	101
20·3	412·09	10	142	203	1281·8	7·769	20 . .	7·806	107	103
24·0	576·00	8	150	192	1473·8	7·383	22 . .	7·612	107	102
27·0	729·00	8	158	216	1689·8	7·068	26 . .	7·178	107	100
							28 . .	6·975	105	99
31·0	961·00	8	166	248	1937·8	6·677	30 . .	6·778	103	98
							32 . .	6·590		
34·0	1156·00	8	174	272	2209·8	*6·412*				
38·0	1444·00	8	182	304	2513·8		35 . .	6·334		
							40 . .	5·985		
Barême pour le train tranchant.										
26·7	712·89	10	172	267	2121·2	*6·933*				
30·4	924·16	8	180	243·2	2364·4	6·725	30 . .	6·753		
33·4	1115·56	8	188	267·2	2631·6	6·550	32 . .	6·632		
37·4	1398·76	8	196	299·2	2930·8	6·291	35 . .	6·446	100	98
40·4	1632·16	8	204	323·2	3254·0	6·112	40 . .	6·136	98	99
44·4	1971·36	8	212	355·2	3609·2	5·888				
47·4	2246·76	8	220	379·2	3988·4	5·732	45 . .	5·858	97	97
51·4	2641·96	8	228	411·2	4399·6	5·476	50 . .	5·609	96	96
54·4	2959·36	8	236	435·2	4834·8	5·409				
58·4	3410·56	8	244	467·2	5302·0	5·247	55 . .	5·385	94	95
61·4	3769·96	8	252	491·2	5793·2	5·135	60 . .	5·188	93	94
65·4	4277·16	8	260	523·2	6316·4	4·997	65 . .	5·011	92	94
68·4	4678·56	8	268	547·2	6863·6	4·902				
72·4	5241·76	8	276	579·2	7442·8	4·785	70 . .	4·856	92	94
75·4	5685·16	8	284	603·2	8046·0	4·703				
79·4	6304·36	8	292	635·2	8681·2					
82·4	6789·76	8	300	659·2	9340·4		80 . .	4·587	91	95
86·4	7464·96	8	308	691·2	10031·6					
89·4	7992·36	8	316	715·2	10746·8					
93·4	8723·56	8	324	747·2	11494·0		90 . .	4·369	90	95
96·4	9292·96	8	332	771·2	12265·2					
100·4	10080·16	8	340	803·2	13068·4		100 . .	4·187	90	95
103·4	10691·56	8	348	827·2	13895·6					

NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 59.

XXIII. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes au $^1/_6$ de la portée.

Wagon		Tender			Locomotive				Locomotive				Tender		
8	8	10	10	10	14	14	14	14	14	14	14	14	10	10	10
					A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*			
88 (17·8)	80 (14·8)	72 (11·1)	62 (9·7)	52 (8·1)	42 (3·6)	28 (2·4)	14 (1·2)	× (0)	70 (28·0)	140 (34·0)	210 (40·0)				
130 (25·8)	122 (22·8)	114 (19·1)	104 (17·7)	94 (16·1)	84 (11·6)	70 (10·4)	56 (9·2)	42 (8·0)	28 (2·4)	14 (1·2)	× (0)	70 (6·0)	120 (28·5)	170 (36·5)	220 (43·5)
144 (27·0)	136 (24·0)	128 (20·8)	118 (18·9)	108 (17·3)	98 (12·8)	84 (11·6)	70 (10·4)	56 (9·2)	42 (3·6)	28 (2·4)	14 (1·2)	× (0)	50 (22·5)	100 (30·5)	150 (37·5)

Écartements : . . 4·0 . × 3·0 × . 3·7 . × 1·4 × 1·6 × . 4·5 . × 1·2 × 1·2 × 1·2 × . 5·6 . × 1·2 × 1·2 × 1·2 × . 4·5 . × 1·6 × 1·4 × . 3·7 . .

Scala ③: **Barêmes des surcharges pour les bandes au $^1/_6$ de la portée.**

l	a''_n	$5a'_n$	a_n	P_n	ΣP_n	$a''_n P''_n$ ou $5 a'_n P'_n$	$\Sigma a''_n P''_n + 5 \Sigma a'_n P'_n$	$\frac{6}{10}\left(\Sigma a''_n P''_n + 5 \Sigma a'_n P'_n\right)$	p''
Barême pour l'essieu *D* au $^1/_6$ de la portée.									
m	m	m	m	t	t	mt	mt	mt	t
0·00	0·0		0·00	14	14	0·0	0·0	0·00	+∞
1·44	1·2		0·72	14	28	16·8	16·8	10·08	19·444
2·88	2·4		1·44	14	42	33·6	50·4	30·24	14·583
4·32	3·6		2·16	14	56	50·4	100·8	60·48	12·963
9·72	8·1		4·86	10	66	81·0	181·8	109·08	8·962
11·64	9·7		5·82	10	76	97·0	278·8	167·28	8·120
13·32	11·1		6·66	10	86	111·0	389·8	233·88	7·640
17·76	14·8		8·88	8	94	118·4	508·2	304·92	*6·719*
Barême pour l'essieu *H* au $^1/_6$ de la portée.									
11·04	9·2		5·52	14	70	128·8	229·6	137·76	*8·160*
12·48	10·4		6·24	14	84	145·6	375·2	225·12	*7·680*
13·92	11·6		6·96	14	98	162·4	537·6	322·56	*7·422*
15·36	12·8		7·68	14	112	179·2	716·8	430·08	*7·292*
Barême pour l'essieu *G* au $^1/_6$ de la portée.									
11·04	9·2		5·52	14	84		375·2	225·12	*7·829*
12·48	10·4		6·24	14	98	145·6	520·8	312·48	*7·680*
13·92	11·6		6·96	14	112	162·6	683·4	410·04	7·627
19·32	16·1		9·66	10	122	161·0	844·4	506·64	7·200
21·24	17·7		10·62	10	132	177·0	1021·4	612·84	6·996
22·92	19·1		11·46	10	142	191·0	1212·4	727·44	6·852
27·36	22·8		13·68	8	150	182·4	1394·8	836·88	6·493
30·96	25·8		15·48	8	158	206·4	1601·2	960·72	6·198
34·20		28·5	17·10	10	168	285·0	1886·2	1131·72	5·954
35·76	29·8		17·88	8	176	238·4	2124·6	1274·76	5·856
39·36	32 8		19·68	8	184	262·4	2387·0	1432·20	5·652
43·80		36·5	21·90	10	194	365·0	2752·0	1651·20	5·416
44·16	36·8		22·08	8	202	294·4	3046·4	1827·84	5·400
47·76	39·8		23·88	8	210	318·4	3364·8	2018·88	*5·254*
52·20		43·5	26·10	10	220	435·0	3799·8	2279·88	
Barême pour l'essieu *H* au $^1/_6$ de la portée.									
36·60		30·5	18·30	10	178	305·0	2219·8	1331·88	
37·20	31·0		18·60	8	186	248	2467·8	1480·68	
40·80	34·0		20·40	8	194	272	2739·8	1643·88	*5·560*
45·00		37·5	22·50	10	204	375	3114·8	1868·88	5·375
45·60	38·0		22·80	8	212	304	3418·8	2051·28	5·352
49·20	41·0		24·60	8	220	328	3746·8	2248·08	5·228
54·00	45·0		27·00	8	228	360	4106·8	2464·08	5·065
57·60	48·0		28·80	8	236	384	4490·8	2694·48	4·946
62·40	52·0		31·20	8	244	416	4906·8	2944·08	4·785
66·00	55·0		33·00	8	252	440	5346·8	3208·08	4·783
67·20		56·0	33·60	8	260	448	5794·8	3476·88	4·658
70·80	59·0		35·40	8	268	472	6266·8	3760·08	4·570

Maxi-mum — **Exemples**

Charge par mètre (m)	(t)	> de (%)
Essieu D		
4	13·440	+ 6·7
5	12·723	+ 9·2
6	11·947	+ 6·7
7	11·063	+ 5·2
8	10·022	+ 2·3
9	9·458	+ 3·6
10	8·837	+ 3·8
11	8·394	+ 5·4
12	8·020	+ 6·2
13	7·733	+ 7·2
14	7·513	
16	7·096	
Essieu H		
12	7·840	
13	7·595	
14	7·417	
16	7·280	
Essieu G		
12	7·747	
13	7·681	
14	7·632	+ 10·7
16	7·593	+ 13·9
18	7·382	+ 17·8
20	7·184	+ 13·8
22	6·965	+ 10·4
24	6·782	+ 8·3
26	6·619	+ 7·1
28	6·445	+ 6·2
30	6·281	+ 5·4
32	6·122	+ 4 0
35	5·905	+ 2·2
38	5·782	
40	5·020	+ 0·4
42	5·514	
45	5·367	
46	5·327	
48	5·245	
50	5·170	
Essieu H		
38	5·688	
40	5·598	
42	5·510	
46	5·339	
48	5·272	
50	5·208	0·0
55	5·083	0·0
60	4·873	0·0
65	4·720	0·0
70	4·590	0·0

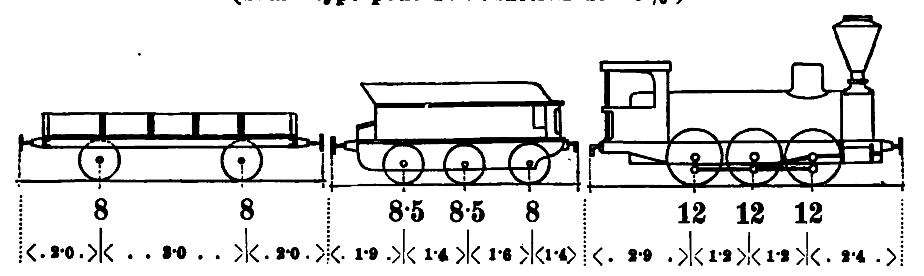
NB. Le table au résumé des résultats est à la page 59.

XXIV. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes et des croisillons

en vue de trains de surcharge formés avec trois locomotives à trois essieux de 12 tonnes circulant sur les lignes d'intérêt local où l'on applique

80% des échelles de l'ordonnance.

(Train type pour la réduction de 20%.)



Scala a: Pour les bandes. **Scala b: Pour les croisillons.**

Portée du pont l	Charge mobile par mètre de voie — d'après l'ordonnance 80% de l'échelle a $^{8}/_{10}$ p	provenant du train — au milieu de la portée — en tonnes par mètre p	au milieu de la portée — en centièmes de p %	vers le $^{1}/_{4}$ de la portée — en tonnes par mètre p''	vers le $^{1}/_{4}$ de la portée — en centièmes de p %	Longueur surchargée l'	Charge mobile par m. de voie — d'après l'ordonnance 80% de l'échelle b $^{8}/_{10}$ p'	provenant du train — en tonnes par mètre p'	provenant du train — en centièmes de p' %
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
m	t	t	%	m	%	m	t	t	%
1	24·000	24·000	80	24·000	80	1	24·000	24·000	80
2	12·000	12·000	80	15·360	102	2	16·000	16·800	84
3	10·000	11·200	85	12·480	95	3	14·760	14·400	84
4	9·840	10·800	88	11·520	93	4	12·480	12·600	81
5	9·200	9·792	85	10·253	89	5	11·200	10·944	78
6	8·720	8·800	81	9·120	84	6	10·560	9·600	73
7	8·240	7·935	77	8·170	79	7	9·920	8·620	70
8	7·760	7·200	74	7·380	76	8	9·280	7·975	69
9	7·280	6·578	72	6·910	76	9	8·640	7·644	71
10	6·800	6·048	71	6·490	76	10	8·000	7·488	75
11	6·560	5·593	68	6·339	77	11	7·760	7·378	76
12	6·320	5·311	67	6·240	79	12	7·520	7·200	77
13	6·080	5·188	68	6·169	81	13	7·280	6·987	77
14	5·840	5·094	70	6·054	83	14	7·040	6·766	77
15	5·600	5·105	73	5·913	84	15	6·800	6·606	78
16	5·520	5·112	74	5·807	84	16	6·656	6·464	78
17	5·440	5·106	77	5·698	84	17	6·512	6·345	78
18	5·360	5·101	76	5·620	84	18	6·368	6·258	79
19	5·280	5·068	77	5·542	84	19	6·224	6·154	79
20	5·200	5·054	78	5·487	84	20	6·080	6·040	79
25	5·020	4·830	77	5·102	81	25	5·800	5·716	79
30	4·840	4·684	78	4·959	82	30	5·520	5·494	80
35	4·660	4·704	81	4·811	83	35	5·240	5·317	81
40	4·480	4·605	82	4·712	84	40	4·960	5·130	83
45	4·360	4·533	83	4·608	84	45	4·820	4·940	82
50	4·240	4·459	84	4·515	85	50	4·680	4·768	82
55	4·120	4·362	85	4·421	86	55	4·540	4·643	82
60	4·000	4·275	85	4·319	86	60	4·400	4·524	82
65	3·880	4·187	86	4·224	87	65	4·260	4·411	83
70	3·760	4·101	87	4·131	88	70	4·120	4·307	84

NB. Les détails du calcul se trouvent sur les pages 64, 65, 66.

XXIV. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes au milieu de la portée.

	Wagen		Wagen		Tender			Locomotive			Tender		
	8	8	8	8	8·5	8·5	8·0	12	12	12	8·5	8·5	8·0
Écartements	3·0	4·0	3·0	3·9	1·4	1·6	4·3	1·2	1·2	4·8	1·4	1·6	4·3
Pour l'essieu *C*:	142t	134	126	118	110	101·5	93	85	73	61	49	40·5	32
	37·6	34·6	30·6	27·6	23·7	22·3	20·7	16·4	15·2	14·0	9·7	8·3	6·7
Pour l'essieu *B*:	130	122	114	106	98	89·5	81	73	61	49	37	28·5	20
	36·4	33·4	29·4	26·4	22·5	21·1	19·5	15·2	14·0	12·8	8·5	7·1	5·5
Pour l'essieu *A*:	118	110	102	94	86	77·5	69	61	49	37	25	16·5	8
	35·2	32·2	28·2	25·2	21·3	19·9	18·3	14·0	12·8	11·6	7·3	5·9	4·3
Train fléchissant:	44·8	41·8	37·8	34·8	30·9	29·5	27·9	23·6	22·4	21·2	16·9	15·5	13·9
Train tranchant:	51·6	48·6	44·6	41·6	37·7	36·3	34·7	30·4	29·2	28·0	23·7	22·3	20·7

Scala 3:

Barême des surcharges pour l'essieu *B* sur le milieu.

$l_n = 2a_n$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	a_nP_n	Σa_nP_n	p
m			m	t	t	mt	mt	t
2·4	1·2	*1·2*	1·44	24	36	28·8	28·8	10·556
11·0	5·5		30·25	8	44	44·0	72·8	5·593
12·0		*6·0*	36·00	12	56	72·0	144·8	5·311
14·2	7·1		50·41	8·5	64·5	60·35	205·15	5·001
14·4		*7·2*	51·84	12	76·5	86·4	291·55	*5·001*
16·8		*8·4*	70·56	12	88·5	100·8	392·35	*4·975*
17·0	8·5		72·25	8·5	97	72·25	464·6	4·981
25·4		*12·7*	161·29	8	105	101·6	566·2	4·757

Exemples		En % de la charge du train type	de l'échelle 3
8	11·200	92	86
4	10·800	92	88
5	9·792	90	85
6	8·800	84	81
7	7·935	81	77
8	7·200	79	74
10	6·048	77	71
18	5·188	77	68
14	5·045		
16	5·008		
18	4·990		
20	5·054	87	78
22	4·978	85	78
24	4·865		

Barême pour l'essieu *C* sur le milieu.

$l_n = 2a_n$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	a_nP_n	Σa_nP_n	p
12·0		*6·0*	36·00	12	60	72	172·8	*5·200*
13·4	6·7		44·89	8	68	53·6	226·4	5·106
14·4		*7·2*	51·84	12	80	86·4	312·8	5·077
16·6	8·3		68·89	8·5	88·5	70·55	383·35	5·098
19·4	9·7		94·09	8·5	97	82·45	465·8	5·049
23·0		*11·5*	132·25	8	105	92	557·8	4·913
26·2		*13·1*	171·61	8·5	113·5	111·35	669·15	4·765
28·0	14·0		196·00	12	125·5	168	837·15	4·693
29·0		*14·5*	210·25	8·5	134	123·25	960·4	4·674
30·4	15·2		231·04	12	146	182·4	1142·8	*4·659*

Exemples		En % de la charge du train type	de l'échelle 3
13	5·141		
14	5·094	79	70
16	5·112	85	74
18	5·101	87	76
20	5·042		
24	4·877	83	77
26	4·777	82	77
30	4·665		

Barême pour l'essieu *B* sur le milieu.

$l_n = 2a_n$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	a_nP_n	Σa_nP_n	p
25·6	12·8		163·84	12	117	153·6	719·8	
28·0	14·0		196·00	12	129	168·0	887·8	*4·684*
28·6		*14·3*	204·49	8·5	137·5	121·55	1009·35	*4·680*
30·4	15·2		231·04	12	149·5	182·4	1191·75	4·677
31·4		*15·7*	246·49	8·5	158	133·45	1325·2	4·688
39·0	19·5		380·25	8	166	156·0	1481·2	4·618
39·2		*19·6*	384·16	8	174	156·8	1638·0	4·614
42·2	21·1		445·21	8·5	182·5	179·35	1817·35	4·567
45·0	22·5		506·25	8·5	191	191·25	2008·6	*4·521*
45·2		*22·6*	510·76	8	199	180·8	2189·4	4·519
52·8	26·4		696·96	8	207	211·2	2400·6	4·397
53·2		*26·6*	707·56	8	215	212·8	2613·4	4·389
58·8	29·4		864·36	8	223	235·2	2848·6	4·289
59·2		*29·6*	876·16	8	231	236·8	3085·4	4·282
66·8	33·4		1115·56	8	239	267·2	3352·6	4·150
67·2		*33·6*	1128·96	8	247	268·8	3621·4	4·143
72·8	36·4		1324·96	8	255	291·2	3912·6	4·052

Exemples		En % de la charge du train type	de l'échelle 3
30	4·684	84	76
32	4·698		
35	4·704	85	81
40	4·605	83	82
50	4·459	82	84
55	4·362	82	84
60	4·272		
65	4·187	82	86
70	4·101	82	87

Barême pour l'essieu *A* sur le milieu.

$l_n = 2a_n$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	a_nP_n	Σa_nP_n	p
42·6	21·3		453·69	8·5	191	181·05	2002·6	4·553
47·6		*23·8*	566·44	8	199	190·4	2193·0	4·490
50·4	25·2		635·04	8	207	201·6	2394·6	*4·444*
55·6		*27·8*	772·84	8	215	222·4	2617·0	*4·347*
56·4	28·2		795·24	8	223	225·6	2842·6	4·333
61·6		*30·8*	948·64	8	231	246·4	3089·0	4·243
64·4	32·2		1036·84	8	239	257·6	3346·6	4·195
69·6		*34·8*	1211·04	8	247	278·4	3625·0	4·104

Exemples		En % de la charge du train type	de l'échelle 3
45	4·583	83	83
50	4·451		
55	4·361		
60	4·275	82	85
65	4·185		

NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 63.

XXIV. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des croisillons.

	Locomotive			Locomotive			Tender			Wagon		Wagon		Wagon	
	12	12	12	12	12	12	8·0	8·5	8·5	8	8	8	8	8	8
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*									

. 4·3 . . ×. 1·2 .×. 1·2 .×. 4·8 . ×. 1·2 .×. 1·2 .× . 4·3 . ×. 1·6 .×. 1·4 .× . 3·9 . ×. 3·0 .× . 4·0 . ×. 3·0 .× . 4·0 . ×. 3·0 .×

........24....12....×......12....24....36 ...... 44...52·5 ...61 .....69....77..... 85....93.....101..109^t
2·4 1·2 0 4·8 6·0 7·2 11·5 13·1 14·5 18·4 21·4 25·4 28·4 32·4 35·4

........12....×....12......24....36....48 ...... 56...64·5 ...73 .....81....89..... 97 ...105....113...121
1·2 0 1·2 6·0 7·2 8·4 12·7 14·3 15·7 19·6 22·6 26·6 29·6 33·6 36·6

........×....12....24......36....48....60 ...... 68...76·5 ...85 .....93... 101.... 109...117....125...133
0 1·2 2·4 7·2 8·4 9·6 13·9 15·5 16·9 20·8 23·8 27·8 30·8 34·8 37·8

. . . . . 9·6 . . 8·4 . . 7·2 . . . 2·4 . . 1·2 . . . 0 . . . . avec l'essieu *F* sur l'appui de droite.
. . . . . 16·4 . . 15·2 . . 14·0 . . . 9·7 . . etc. suite comme ci-dessus pour l'essieu *C*, jusqu'à zéro pour l'appui de droite.

Scala b: **Barème des surcharges pour le train tranchant.**

l_n	l_n^2	P_n	ΣP_n	$l_n P_n$	$\Sigma l_n P_n$	p'	Exemples		En % de la charge du train type	En % de la charge de l'échelle b
m	m	t	t	mt	mt	t	m	t	%	%
1·2	1·44	12	24	14·4	14·4	20·000	3 ..	14·400	92	84
2·4	5·76	12	36	28·8	43·2	15·000	4 ..	12·600	88	81
							5 ..	10·944	82	78
6·7	44·89	8	44	53·6	96·8	8·820	6 ..	9·600	79	73
8·3	68·89	8·5	52·5	70·55	167·35	7·791	7 ..	8·620	78	70
							8 ..	7·975	79	69
9·7	94·09	8·5	61	82·45	249·8	7·267	9 ..	7·535		
							10 ..	7·204		
14·0	196·00	12	73	168	417·8	*6·165*	12 ..	6·697		
Barème pour le train fléchissant.										
7·2	51·84	12	48	86·4	129·6	*8·333*	8 ..	7·950		
8·4	70·56	12	60	100·8	230·4	7·755	9 ..	7·644	81	71
9·6	92·16	12	72	115·2	345·6	7·500	10 ..	7·488	79	75
13·9	193·21	8	80	111·2	456·8	6·782	12 ..	7·200	86	76
15·5	240·25	8·5	88·5	131·75	588·55	6·520	14 ..	6·766	84	77
16·9	285·61	8·5	97	143·65	732·2	6·352	16 ..	6·464	83	78
							18 ..	6·258	84	79
21·2	449·44	12	109	254·4	986·6	5·893	20 ..	6·040	83	79
22·4	501·76	12	121	268·8	1255·4	5·800	22 ..	5·882	82	78
23·6	556·96	12	133	283·2	1538·6	5·746	24 ..	5·742	83	78
27·9	778·41	8	141	223·2	1761·8	5·581	26 ..	5·678	84	79
29·5	870·25	8·5	149·5	250·75	2012·55	5·510	28 ..	5·578	84	79
30·9	954·81	8·5	158	262·65	2275·2	5·461	30 ..	5·494	83	80
34·8	1211·04	8	166	278·4	2553·6	5·323				
37·8	1428·84	8	174	302·4	2856·0	5·209	35 ..	5·317	83	81
41·8	1747·24	8	182	334·4	3190·4	5·056	40 ..	5·130	82	83
44·8	2007·04	8	190	358·4	3548·8	4·946				
48·8	2381·44	8	198	390·4	3939·2	4·806	45 ..	4·940	82	82
51·8	2683·24	8	206	414·4	4353·6	4·708	50 ..	4·768	81	82
55·8	3113·64	8	214	446·4	4800·0		55 ..	4·613		
58·8	3457·44	8	222	470·4	5270·4					
Barème pour le train tranchant.							60 ..	4·472		
29·2	852·64	12	146		2040·0					
30·4	924·16	12	158	364·8	2404·8		30 ..	5·200		
34·7	1204·09	8	166	277·6	2682·4					
36·3	1317·69	8·5	174·5	308·55	2990·95		35 ..	5·106		
37·7	1421·29	8·5	183	320·45	3311·4					
41·6	1730·56	8	191	332·8	3644·2		40 ..	5·011		
44·6	1989·16	8	199	356·8	4001·0					
48·6	2361·96	8	207	388·8	4389·8	4·802	45 ..	4·898		
51·6	2662·56	8	215	412·8	4802·6	4·726	50 ..	4·768	81	82
55·6	3091·36	8	223	444·8	5247·5	4·627	55 ..	4·648	81	82
58·6	3433·96	8	231	468·8	5716·2	4·555				
62·6	3918·76	8	239	500·8	6217·0	4·463	60 ..	4·524	81	82
65·6	4303·36	8	247	524·8	6741·8	4·387	65 ..	4·411	81	83
69·6	4844·16	8	255	556·8	7298·6	4·316				
72·6	5270·76	8	263	580·8	7879·4	4·255	70 ..	4·307	81	84
76·6	5867·56	8	271	612·8	8492·2					
79·6	6336·16	8	279	636·8	9129·0					
83·6	6988·96	8	287	668·8	9797·8		80 ..	4·122	81	86

NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 63.

XXIV. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes au $^1/_6$ de la portée.

Tender		Locomotive			Tender			Locomotive			Locomotive			Tender			
8·5	8·0	12	12	12	8·5	8·5	8·0	12	12	12	12	12	12	8·0	8·5	8·5	8
								A	B	C	D	E	F				

Espacements : × 1·6 × . 4·3 . × 1·2 × 1·2 × . 4·3 . × 1·4 × 1·6 × . 4·3 . × 1·2 × 1·2 × . 4·8 . × 1·2 × 1·2 × . 4·3 . × 1·6 × 1·4 × 3·9 ×

113·5	105	97	85	73	(49	40·5	32	24	12	×)	×	60	120	160	202·5	245
27·1	25·5	21·2	20·0	18·8	(9·7	8·3	6·7	2·4	1·2	0)	0	6·0	12	33·5	41·5	48 5
125·5	117	109	97	85	73	64·5	56	48	36	24	12	×	60	100	142·5	185
28·3	26·7	22·4	21 2	20·0	15·7	14·3	12·7	8·4	7·2	6·0	1·2	0	6·0	27·5	35·5	42·5
137·5	129	121	109	97	85	76·5	68	60	48	36	24	12	×	40	82·5	125
29·5	27·9	23·6	22·4	21·2	16·9	15·5	13·9	9·6	8·4	7·2	2·4	1·2	0	21·5	29·5	36·5

Scala 3: Barêmes des surcharges pour les bandes au $^1/_6$ de la portée.

l	a''_n	$5a'_n$	a	P_n	ΣP_n	$a''_n P''_n$ ou $5a'_n P'_n$	$\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n$	$\frac{6}{10}\left(\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n\right)$	p''
Barême pour l'essieu *C* au $^1/_6$ de la portée.									
m	m		m	t	t	mt	mt	mt	t
0·00	0·0	0·0	0·00	12	12	0·00	0·00	0·00	+∞
1·44	1·2		0·72	12	24	14·40	14·40	8·64	16·667
2·88	2·4		1·44	12	36	28·80	43·20	25·92	12·500
8·04	6·7		4·02	8	44	53·60	96·80	58·08	7·351
9·96	8·3		4·98	8·5	52·5	70·55	167·35	100·41	6·493
11·64	9·7		5·82	8·5	61	82·45	249·80	149·88	*6·056*
16·80	14·0		8·40	12	73	168·00	417·80	250·68	*5·139*
Barême pour l'essieu *F* au $^1/_6$ de la portée.									
8·64	7·2		4·32	12	48	86·4	129·6	77·76	6·944
10·08	8·4		5·04	12	60	100·8	230·4	138·24	6·462
11·52	9·6		5·76	12	72	115·2	345·6	207·36	6·250
16·68	13·9		8·34	8	80	111·2	456·8	274·08	5·652
Barême pour l'essieu *E* au $^1/_6$ de la portée.									
8·64	7·2		4·32	12	60	86·4	244·8	146·88	*6·019*
10·08	8·4		5·04	12	72	100·8	345·6	207·36	6·123
15·24	12·7		7·62	8	80	101·6	447·2	268·32	5·878
17·16	14·3		8·58	8·5	88·5	121·55	568·75	341·25	5·679
18·84	15·7		9·42	8·5	97·0	133·45	702·20	421·32	5·549
24·00	20·0		12·00	12	109	240·00	942·20	565·32	5·157
25·44	21·2		12·72	12	121	254·4	1196·6	717·96	5·075
26·88	22·4		13·44	12	133	268·8	1465·4	879·24	5·028
32·04	26·7		16·02	8	141	213·6	1679·0	1007·40	4·876
33·00		27·5	16·50	8	149	220·0	1899·0	1139·40	4·845
33·96	28·3		16·98	8·5	157·5	240·55	2139·55	1283·73	4·823
35·64	29·7		17·82	8·5	166·0	252·45	2392·00	1435·20	4·796
40·32	33·6		20·16	8	174	268·8	2660·80	1596·48	4·703
42·60		35·5	21·30	8·5	182·5	301·75	2962·55	1777·53	4·650
43·92	36·6		21·96	8	190·5	292·8	3255·35	1953·21	4·625
48·72	40·6		24·36	8	198·5	324·8	3580·15	2148·09	4·529
51·00		42·5	25·50	8·5	207	361·25	3941·40	2364·84	
52·32	43·6		26·16	8	215	348·8	4290·2	2574·12	
57·12	47·6		28·56	8	223	380·8	4671·0	2802·60	4·372
60·72	50·6		30·36	8	231	404·8	5075·8	3045·48	4·305
65·52	54·6		32·76	8	239	436·8	5512·6	3307·56	4·213
69·12	57·6		34·56	8	247	460·8	5973·4	3584·04	4·146
73·92	61·6		36·96	8	255	492·8	6466·2	3879·72	4·059
74·40		62·0	37·20	8	263	496·0	6962·2	4177·32	
Barême pour l'essieu *D* au $^1/_6$ de la portée.									
32·52	27·1		16·26	8·5	149·5	230·35	1912·95	1147·77	4·853
34·20	28·5		17·10	8·5	158	242·25	2155·2	1293·12	4·818
38·88	32·4		19·44	8	166	259·2	2414·4	1448·64	
Barême pour l'éssieu *F* au $^1/_6$ de la portée.									
45·36	37·8		22·68	8	199	302·4	3589·0	2153·40	4·588
50·16	41·8		25·08	8	207	334·4	3923·4	2354·04	4·511
53·76	44·8		26·88	8	215	358·4	4281·8	2569·08	4·443
58·56	48·8		29·28	8	223	390·4	4672·2	2803·32	4·346

Maximum — **Exemples**

Charge pr. m. (m)	Charge pr. m. (t)	> de %
3	12·480	+ 11·4
4	11·520	+ 6·7
5	10·252	+ 4·7
6	9·120	+ 3·6
7	8·170	+ 3·0
8	7·380	+ 2·5
9	6·910	+ 5·0
10	6·477	
11	6·226	
12	6·003	
9	6 827	
10	6·490	+ 7·5
11	6·339	+ 13·5
12	6·240	+ 17·4
14	6·054	+ 18·8
16	5·760	
11	6·053	
12	6·240	+ 17·4
14	6·054	+ 18·8
16	5·807	+ 13·6
18	5·620	+ 10·4
20	5·487	+ 8·6
22	5·336	+ 7·2
26	5·060	+ 5·9
28	5·014	+ 6·8
30	4·959	+ 5·9
32	4·878	+ 3·8
34	4·822	
35	4·811	+ 2·2
40	4·712	+ 2·3
45	4·608	+ 1·7
50	4·503	
55	4·414	
60	4·319	+ 1·0
65	4·224	+ 0·9
70	4·131	+ 0·7
75	4·043	
32	4·869	
34	4·823	+ 2·8
35	4·806	
40	4·678	
45	4·594	
50	4·515	+ 1·3
55	4·421	+ 1·3
60	4·318	

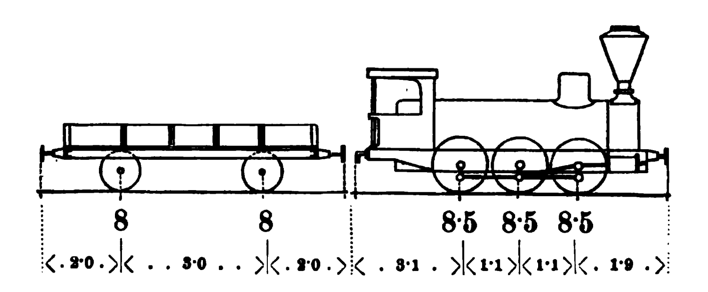
NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 63.

XXV. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes et des croisillons

en vue de trains de surcharge formés avec trois locomotives-tender à trois essieux de 8·5 tonnes circulant sur les lignes d'intérêt local où l'on applique le

60% des échelles de l'ordonnance.

(Train type pour la réduction de 40%.)



Scala a: Pour les bandes. **Scala b: Pour les croisillons.**

Portée du pont	Charge mobile par mètre de voie: d'après l'ordonnance 60% de l'échelle a	provenant du train, au milieu de la portée: en tonnes par mètre	au milieu de la portée: en centièmes de p	vers le 1/4 de la portée: en tonnes par mètre	vers le 1/4 de la portée: en centièmes de p	Longueur surchargée	Charge mobile par m. de voie: d'après l'ordonnance 60% de l'échelle b	provenant du train: en tonnes par mètre	provenant du train: en centièmes de p'
l	$^6/_{10}$ p	p	%	p''	%	l'	$^6/_{10}$ p'	p'	%
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
m	t	t	%	t	%	m	t	t	%
1	18·000	17·000	57	17·000	57	1	18·000	17·000	57
2	9·000	8·500	57	11·390	76	2	12·000	12·325	62
3	7·860	8·689	66	9·520	73	3	10·320	10·766	62
4	7·380	8·075	66	8·542	69	4	9·360	9·244	60
5	6·900	7·208	63	7·507	65	5	8·400	7·956	57
6	6·540	6·422	59	6·630	61	6	7·920	6·942	53
7	6·180	5·759	56	5·912	57	7	7·440	6·488	52
8	5·820	5·206	54	5·536	57	8	6·960	6·270	53
9	5·460	4·743	52	5·314	58	9	6·480	6·170	55
10	5·100	4·420	52	5·182	61	10	6·000	6·018	60
11	4·920	4·355	53	5·125	62	11	5·820	5·816	60
12	4·740	4·250	54	5·015	63	12	5·640	5·596	60
13	4·560	4·225	56	4·877	64	13	5·460	5·372	59
14	4·380	4·163	57	4·725	65	14	5·280	5·220	59
15	4·200	4·125	59	4·606	66	15	5·100	5·130	60
16	4·140	4·091	59	4·524	66	16	4·992	5·080	61
17	4·080	4·082	60	4·478	66	17	4·884	5·029	62
18	4·020	4·114	62	4·458	67	18	4·776	4·958	62
19	3·960	4·116	61	4·425	67	19	4·668	4·874	63
20	3·900	4·097	63	4·376	67	20	4·560	4·782	63
25	3·765	3·861	62	4·069	65	25	4·350	4·438	61
30	3·630	3·679	61	3·786	63	30	4·140	4·154	60
35	3·495	3·546	61	3·605	62	35	3·930	3·938	60
40	3·360	3·409	61	3·463	62	40	3·720	3·768	61
45	3·270	3·306	61	3·367	62	45	3·615	3·624	60
50	3·180	3·229	61	3·262	62	50	3·510	3·506	60
55	3·090	3·148	61	3·176	62	55	3·405	3·407	60
60	3·000	3·086	62	3·116	62	60	3·300	3·324	60
65	2·910	3·035	63	3·062	63	65	3·195	3·251	61
70	2·820	2·985	64	3·011	64	70	3·090	3·187	62

NB. Les détails du calcul se trouvent sur les pages 68, 69, 70.

XXV. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes au milieu de la portée.

	Wagon		Wagon		Wagon		Wagon		Locomotive		
	8	8	8	8	8	8	8	8	8·5	8·5	8·5
Écartements	3·0	4·0	3·0	4·0	3·0	4·0	3·0	5·1	1·1	1·1	5·0
Pour l'essieu *B*:	98	90	82	74	66	58	50	42	34	25·5	17
	37·4	34·4	30·4	27·4	23·4	20·4	16·4	13·4	8·3	7·2	6·1
Pour l'essieu *C*:	106·5	98·5	90·5	82·5	74·5	66·5	58·5	50·5	42·5	34	25·5
	38·5	35·5	31·5	28·5	24·5	21·5	17·5	14·5	9·4	8·3	7·2
Train fléchissant:	44·5	41·5	37·5	34·5	30·5	27·5	23·5	20·5	15·4	14·3	13·2
Train tranchant:	45·7	42·7	38·7	35·7	31·7	28·7	24·7	21·7	16·6	15·5	14·4

Scala a: **Barême des surcharges pour l'essieu *B* sur le milieu.**

$l = 2a$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p
m			m²	t	t	mt	mt	t
0·0	0·0	*0·0*	0·00	8·5	8·5	0·00	0·00	+∞
2·2	1·1	*1·1*	1·21	17·0	25·5	18·70	18·70	7·727
9·8		*4·9*	24·01	8·5	34·0	41·65	60·35	4·425
12·0		*6·0*	36·00	8·5	42·5	51·00	111·35	*3·990*
12·2	6·1		37·21	8·5	51·0	51·85	163·20	*3·975*
14·2		*7·1*	50·41	8·5	59·5	60·35	223·55	*3·946*
14·4	7·2		51·84	8·5	68·0	61·20	284·75	*3·952*
16·6	8·3		68·89	8·5	76·5	70·55	355·30	*4·059*
24·4		*12·2*	148·84	8·0	84·5	97·60	452·9	3·883
26·8	13·4		179·56	8·0	92·5	107·20	560·1	3·784
30·4		*15·2*	231·04	8·0	100·5	121·60	681·7	3·661
32·8	16·4		268·96	8·0	108·5	131·20	812·9	3·593
38·4		*19·2*	368·64	8·0	116·5	153·6	966·5	3·446
40·8	20·4		416·16	8·0	124·5	163·2	1129·7	3·388
44·4		*22·2*	492·84	8·0	132·5	177·6	1307·3	3·316
46·8	23·4		547·56	8·0	140·5	187·2	1494·5	3·275
52·4		*26·2*	686·44	8·0	148·5	209·6	1704·1	3·185
54·8	27·4		750·76	8·0	156·5	219·2	1923·3	3·150
58·4		*29·2*	852·64	8·0	164·5	233·6	2156·9	3·104
60·8	30·4		924·16	8·0	172·5	243·2	2400·1	3·077
66·4		*33·2*	1102·24	8·0	180·5	265·6	2665·7	3·018
68·8	34·4		1183·36	8·0	188·5	275·2	2940·9	2·994
72·4		*36·2*	1310·44	8·0	196·5	289·6	3230·5	2·963
74·8	37·4		1398·76	8·0	204·5	299·2	3529·7	2·944
80·4		*40·2*	1606·04	8·0	212·5	321·6	3851·3	2·903
82·8	41·4		1713·96	8·0	220·5	331·2	4182·5	
86·4		*43·2*	1866·24	8·0	228·5	345·6	4528·1	
88·8	44·4		1971·36	8·0	236·5	355·2	4883·3	
94·4		*47·2*	2227·84	8·0	244·5	377·6	5260·9	
96·8	48·4		2342·56	8·0	252·5	387·2	5648·1	
100·4		*50·2*	2520·04	8·0	260·5	401·6	6049·7	

Exemples m	Exemples t	En % de la charge du train type	En % de la charge de l'échelle a
m	t	%	%
3	8·689	72	66
4	8·075	69	66
5	7·208	67	63
6	6·422	62	59
8	5·206	57	54
10	4·386		
14	3·955		
16	4·051		
18	4·114	71	62
20	4·097	70	63
25	3·861	66	62
30	3·679	66	61
35	3·546	64	61
40	3·409	62	61
45	3·306	60	61
50	3·229	60	61
55	3·148	59	61
60	3·086	59	62
65	3·035		63
70	2·985	59	64
80	2·900	60	66
90	2·848	61	67
100	2·791	62	68

Barême pour l'essieu *C* sur le milieu.

$l = 2a$	a_n gauche	a_n droite	a_n^2	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p
2·2	1·1		1·21	8·5	17·0	9·35	9·35	
4·4	2·2		4·84	8·5	25·5	18·70	28·05	
7·6		*3·8*	14·44	8·5	34·0	32·30	60·35	*4·768*
9·8		*4·9*	24·01	8·5	42·5	41·65	102·00	4·425
12·0		*6·0*	36·00	8·5	51·0	51·00	153·00	4·250
14·4	7·2		51·84	8·5	59·5	61·20	214·20	4·132
16·6	8·3		68·89	8·5	68·0	70·55	284·75	4·074
18·8	9·4		88·36	8·5	76·5	79·90	364·65	*4·012*
22·2		*11·1*	123·21	8·5	85·0	94·35	459·00	

Exemples m	Exemples t	En % de la charge du train type	En % de la charge de l'échelle a
4	6·162		
6	5·383		
8	4·728		
10	4·420	56	52
14	4·168	65	57
16	4·091	68	59
18	4·040		
20	3·910		

NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 67.

XXV. Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des croisillons.

	Locomotive			Locomotive			Wagon		Wagon		Wagon	
	8·5	8·5	8·5	8·5	8·5	8·5	8	8	8	8	8	8
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*						
. . 5·0 . .	× . 1·1 .	× . 1·1 .	× . . . 3·8 . . .	× . 1·1 .	× . 1·1 .	× . . . 5·1 . . .	× . 3·0 .	× . . 4·0 . .	× . 3·0 .	× . . 4·0 . .	× . 3·0 .	×
....	8·5	×	8·5	17	25·5	34	42	50	58	66	74	82
	1·1	0	1·1	4·9	6·0	7·1	12·2	15·2	19·2	22·2	26·2	29·2
....	17	8·5	×	8·5	17	25·5	33·5	41·5	49·5	57·5	65·5	73·5
	2·2	1·1	0	3·8	4·9	6·0	11·1	14·1	18·1	21·1	25·1	28·1
......	8·2	7·1	6·0	2·2	1·1	0 .... avec l'essieu *F* sur l'appui de droite.						
......	9·4	8·3	7·2	2·2	. . etc. suite comme ci-dessus pour l'essieu *C* jusqu'à zéro pour l'appui de droite.							

Scala 𝔟: **Barême des surcharges pour le train fléchissant.**

l_n	l_n^2	P_n	ΣP_n	$l_n P_n$	$\Sigma l_n P_n$	p'
m	m²	t	t	mt	mt	t
0·0	0·00	8·5	8·5	0·00	0·00	+∞
1·1	1·21	8·5	17·0	9·35	9·35	15·456
2·2	4·84	8·5	25·5	18·70	28·05	11·585
6·0	36·00	8·5	34·0	51·00	79·05	6·942
7·1	50·41	8·5	42·5	60·35	139·40	6·441
8·2	67·24	8·5	51·0	69·70	209·10	6·219
13·2	174·24	8·5	59·5	112·20	321·30	5·326
14·3	204·49	8·5	68·0	121·55	442·85	5·179
15·4	237·16	8·5	76·5	130·90	573·75	5·097
20·5	420·25	8·0	84·5	164·00	737·75	4·733
23·5	552·25	8·0	92·5	188·00	925·75	4·520
27·5	756·25	8·0	100·5	220·00	1145·75	4·279
30·5	930·25	8·0	108·5	244·00	1389·75	4·127
34·5	1190·25	8·0	116·5	276·00	1665·75	3·954
37·5	1406·25	8·0	124·5	300·00	1965·75	3·844
41·5	1722·25	8·0	132·5	332·00	2297·75	3·717
44·5	1980·25	8·0	140·5	356·00	2653·75	3·634
48·5	2352·25	8·0	148·5	388·00	3041·75	3·537
51·5	2652·25	8·0	156·5	412·00	3453·75	3·473
55·5	3080·25	8·0	164·5	444·00	3897·75	3·396
58·5	3422·25	8·0	172·5	468·00	4365·75	3·346
62·5	3906·25	8·0	180·5	500·00	4865·75	3·285
65·5	4290·25	8·0	188·5	524·00	5389·75	3·243
69·5	4830·25	8·0	196·5	556·00	5945·75	3·193
72·5	5256·25	8·0	204·5	580·00	6525·75	3·158
76·5	5852·25	8·0	212·5	612·00	7137·75	3·116
79·5	6320·25	8·0	220·5	636·00	7773·75	3·087
83·5	6972·25	8·0	228·5	668·00	8441·75	
86·5	7482·25	8·0	236·5	692·00	9133·75	
90·5	8190·25	8·0	244·5	724·00	9857·75	
93·5	8742·25	8·0	252·5	748·00	10605·75	
97·5	9506·25	8·0	260·5	780·00	11385·75	
100·5	10100·25	8·0	268·5	804·00	12189·75	

Barême pour le train tranchant.

l_n	l_n^2	P_n	ΣP_n	$l_n P_n$	$\Sigma l_n P_n$	p'
38·7	1497·69	8·0	124·5	309·60	2084·55	
42·7	1823·29	8·0	132·5	341·60	2426·15	
45·7	2088·49	8·0	140·5	365·60	2791·75	
49·7	2470·09	8·0	148·5	397·60	3189·35	
52·7	2777·29	8·0	156·5	421·60	3610·95	
56·7	3214·89	8·0	164·5	453·60	4064·55	
59·7	3564·09	8·0	172·5	477·60	4542·15	

Exemples		En % de la charge	
		du train type	de l'échelle 𝔟
m	t	%	%
2 . .	12·325	68	62
{ 3 . .	10·766	69	62
{ 4 . .	9·244	66	60
{ 5 . .	7·956	60	57
8 . .	6·270	62	53
{ 10 . .	6·018	67	60
{ 12 . .	5·596	67	60
14 . .	5·220	65	59
{ 16 . .	5·080	65	61
{ 18 . .	4·958	66	62
{ 20 . .	4·782	66	63
25 . .	4·438	65	61
30 . .	4·154	63	60
35 . .	3·938	62	60
40 . .	3·768	60	61
45 . .	3·624	60	60
50 . .	3·506	60	60
55 . .	3·407	59	60
60 . .	3·324	60	60
65 . .	3·251		61
70 . .	3·187	60	62
80 . .	3·088	61	64
90 . .	3·000	62	65
100 . .	2·933	63	67
Train tranchant:			
40 . .	3·619		
45 . .	3·483		
50 . .	3·388		
55 . .	3·303		
60 . .	3·227		

NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 67.

XXV. *Surcharges équivalentes uniformes pour le calcul des bandes au $^1/_6$ de la portée.*

Scala A: **Barêmes des surcharges pour les bandes au $^1/_6$ de la portée.**

Barême pour l'essieu *F* au $^1/_6$ de la portée.

l	a''_n	$5a'_n$	a	P_n	ΣP_n	$a''_n P''_n$ ou $5a'_n P'_n$	$\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n$	$\frac{6}{10}(\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n)$	p''	Maximum
m	m	m	m	t	t	mt	mt	mt	t	
0·00	0·0	0·0	0·00	8·5	8·5	0·00	0·00	0·00	+∞	
1·32	1·1		0·66	8·5	17·0	9·35	9·35	5·61	12·880	
2·64	2·2		1·32	8·5	25·5	18·70	28·05	16·83	9·659	
7·20	6·0		3·60	8·5	34·0	51·00	79·05	47·43	5·785	
8·52	7·1		4·26	8·5	42·5	60·35	139·40	83·64	5·369	
9·84	8·2		4·92	8·5	51·0	69·70	209·10	125·46	5·183	
15·84	13·2		7·92	8·5	59·5	112·20	321·30	192·78	4·439	
17·16	14·3		8·58	8·5	68·0	121·55	442·85	265·71	*4·316*	

Exemples:

Charge pr. m. (m)	Charge pr. m. (t)	> de (%)
3	9·520	+ 9·1
4	8·542	+ 5·8
5	7·507	+ 4·1
6	6·630	+ 3·2
7	5·912	+ 2·7
8	5·596	+ 6·3
9	5·314	+ 12·0
10	5·182	+ 17·2
12	5·015	+ 18·0
14	4·725	+ 13·5
16	4·425	

Barême pour l'essieu *E* au $^1/_6$ de la portée.

l	a''_n	$5a'_n$	a	P_n	ΣP_n	$a''_n P''_n$ ou $5a'_n P'_n$	$\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n$	$\frac{6}{10}(\Sigma a''_n P''_n + 5\Sigma a'_n P'_n)$	p''	Maximum
0·00	0·0		0·00	8·5	8·5	0·00	0·00	0·00		
1·32	1·1		0·66	8·5	17·0	9·35	9·35	5·61		
5·88	4·9		2·94	8·5	25·0	41·65	51·00	30·60		
6·60		5·5	3·30	8·5	34·0	46·75	97·75	58·65		
7·20	6·0		3·60	8·5	42·5	51·00	148·75	89·25		
8·52	7·1		4·26	8·5	51·0	60·35	209·10	125·46	*5·059*	
14·52	12·1		7·26	8·5	59·5	102·85	311·95	187·17	4·644	
15·84	13·2		7·92	8·5	68·0	112·20	424·15	254·49	4·529	
17·16	14·3		8·58	8·5	76·5	121·55	545·70	327·42	4·468	
23·28	19·4		11·64	8·0	84·5	155·20	700·90	420·54	4·156	
26·88	22·4		13·44	8·0	92·5	179·20	880·10	528·06	3·959	
31·68	26·4		15·84	8·0	100·5	211·20	1091·30	654·78	3·735	
35·28	29·4		17·64	8·0	108·5	235·20	1326·50	795·90	3·593	
37·20		31·0	18·60	8·0	116·5	248·00	1574·50	944·70	3·533	
40·08	33·4		20·04	8·0	124·5	267·20	1841·70	1105·02	3·461	
43·68	36·4		21·84	8·0	132·5	291·20	2132·90	1279·74	3·384	
48·48	40·4		24·24	8·0	140·5	323·20	2456·10	1473·66	3·288	
52·08	43·4		26·04	8·0	148·5	347·20	2803·30	1681·98	3·222	
55·20		46·0	27·60	8·0	156·5	368·00	3171·30	1902·78	3·172	
56·88	47·4		28·44	8·0	164·5	379·20	3550·50	2130·30	3·150	
60·48	50·4		30·24	8·0	172·5	403·20	3953·70	2372·22	3·110	
65·28	54·4		32·64	8·0	180·5	435·20	4388·90	2633·34	3·058	
68·88	57·4		34·44	8·0	188·5	459·20	4848·10	2908·86	3·021	
73·68	61·4		36·84	8·0	196·5	491·20	5339·30	3203·58	2·973	
77·28	64·4		38·64	8·0	204·5	515·20	5854·50	3512·70	2·940	
79·20		66·0	39·60	8·0	212·5	528·00	6382·50	3829·50	2·924	
82·08	68·4		41·04	8·0	220·5	547·20	6929·70	4157·82		
85·68	71·4		42·84	8·0	228·5	571·20	7500·90	4500·54		
90·48	75·4		45·24	8·0	236·5	603·20	8104·10	4862·46		
94·08	78·4		47·04	8·0	244·5	627·20	8731·30	5238·78		
97·20		81·0	48·60	8·0	252·5	648·00	9379·30	5627·58		
98·88	82·4		49·44	8·0	260·5	659·20	10038·50	6023·10		
102·48	85·4		51·24	8·0	268·5	683·20	10721·70	6433·02		

Exemples:

Charge pr. m. (m)	Charge pr. m. (t)	> de (%)
4	7·097	
5	5·902	
6	4·933	
7	4·926	
8	5·047	
9	5·138	
10	5·182	+ 17·2
12	5·015	+ 18·0
14	4·725	+ 13·5
15	4·606	+ 11·7
16	4·524	+ 10·6
18	4·458	+ 8·4
20	4·376	+ 6·8
25	4·069	+ 5·4
30	3·786	+ 2·9
35	3·605	+ 1·7
40	3·463	+ 1·6
45	3·367	+ 1·3
50	3·202	+ 1·0
55	3·176	+ 0·9
60	3·116	+ 1·0
65	3·062	
70	3·011	+ 0·9
80	2·919	+ 0·3
90	2·854	+ 0·4
100	2·801	+ 0·4

NB. Le tableau résumé des résultats est à la page 67.

Explications sur les tableaux de calculs N° XIX à XXV.

Les hypothèses de surcharge acceptées pour toutes les lignes d'intérêt général sans distinction, impliquent pour la très-grande majorité des ponts à construire ou à renforcer en Autriche, suivant les nouvelles prescriptions, une très-grande sécurité du service (surtout pour les ponts de grande ouverture). On s'en rendra compte en réfléchissant que les locomotives à quatre essieux des types considérés ne forment qu'un contingent bien faible dans tout le matériel moteur de l'Autriche*, puisque, surtout pour les grandes lignes à pente faible, on n'emploie de préférence que des machines à trois essieux.

Ces considérations ont aussi fait reconnaître la nécessité de fixer, pour les lignes industrielles et d'intérêt local, des hypothèses de surcharge beaucoup plus modérées en tant que ces lignes n'ont pas un caractère stratégique ou un tracé rendant inévitable l'emploi des machines lourdes. Pour ces lignes secondaires, il importe essentiellement de distinguer le cas où elles sont exploitées avec le matériel moteur des lignes principales (avec les locomotives de poids moyen les plus usuelles) et le cas où elles sont desservies par des locomotives légères tout à fait spéciales.

Pour le premier de ces deux cas, on a pu admettre une locomotive-type à trois essieux chargés de 12^t et écartés de 1^m20 avec un tender pesant 25^t.

Pour le second cas on a admis de petites locomitives-tender avec des essieux chargés de 8·5 à 9^t au plus et qui n'exercent sur les rails que des effets bien peu supérieurs à ceux qu'y provoquent les wagons. Ces hypothèses conviennent pour de semblables lignes secondaires où l'on préfère généralement une voie légère et peu coûteuse. La locomotive-type admise en pareil cas exerce des effets de surcharge sur les ponts qui surpassent ceux qu'y produisent toutes les petites locomotives analogues usuelles en Autriches.

L'étude des effets de surcharge provoqués par les trains que l'on compose avec le matériel roulant-type mentionné ci-dessus, a conduit à diviser toutes les lignes de chemins de fer suivant leur capacité de chargement en trois classes, pour lesquelles une charge d'essieu de 14^t, 12^t et 8^t5 est admissible et, comme nous le montrerons, on a pu appliquer à ces lignes les échelles de surcharge 𝔞 et 𝔟 de l'ordonnance avec les coefficients de 100%, 80% et 60%.

Cette classification se trouve d'accord avec celle qui s'est établie depuis quelque temps en Autriche et en Allemagne pour les types de rails; il est important qu'il en soit ainsi puisque le coût de la voie forme une partie importante des frais de premier établissement d'un chemin de fer, et que les wagons seuls, doivent être considérés comme véhicules pouvant circuler sur toutes les lignes possibles. Nos tableaux de calculs *XIX* à *XXV* sont conçus dans le même sens.

Nous avons muni chacun des sept groupes de tableaux de calcul d'un titre-résumé indiquant exactement les véhicules admis pour les trains de surcharge et contenant un ensemble comparatif des résultats trouvés.

Les procédés de calcul employés sont exposés en détail aux N^{os} *XVI* et *XVII*; nous nous bornerons à rappeler ici que pour les tableaux concernant les moments de flexion, on a indiqué dans la colonne intitulée „maximum" les valeurs de la portée pour lesquelles le barême que l'on considère, ou l'essieu correspondant, supposé placé sur la section, constitue une „force médiane" ou une „force médiane proportionnelle" et implique par suite un maximum pour les charges uniformes cherchées.

Dans chaque barême on a indiqué les valeurs de la charge cherchée, qui correspondent aux points singuliers de la courbe enveloppe, ainsi que celles que l'on obtient pour une série de portées en nombres ronds, citées comme exemples. Nous représentons en général par (voir aussi les Nos *XVI*, *XVII*):

(41)
- $l = 2a$ . . . la portée du pont;
- l' . . . . . . la partie de la portée l qui est surchargée;
- p . . . . . . la charge uniforme par m de voie qui est équivalente quant aux moments de flexion au milieu de la portée;
- p' . . . . . la charge uniforme par m de voie, équivalente quant aux efforts tranchants sur un appui;
- p'' . . . . . la charge uniforme par m de voie, équivalente quant aux moments de flexion vers le $^1/_6$ de la portée;
- 𝔭, 𝔭' . . . les charges données par les échelles 𝔞 et 𝔟 du § 3 de l'ordonnance autrichienne.

* D'après la statistique officielle austro-hongroise des chemins de fer pour l'an 1885, on aurait en nombres ronds

	Locom. av. tender	Locom. tender	Ensemble	en %
Locomotives à marchandises à 4 essieux couplés . .	488	27	215	11·6
Locomves diverses à 3 et 2 essieux couplés	3256	632	3888	87·6
Locomves à voyageurs trains express sans essieux couplés	7	28	35	0·8
Ensemble . .	3751	687	4438	100·0

Les valeurs de la charge inscrites dans les colonnes intitulées: „exemples“ ont été calculées de préférence pour les régions de portées où un maximum a lieu; elles sont imprimées en caractères plus gros partout où elles doivent être comprises comme donnant le plus grand maximum à adopter.

Une distinction typographique analogue a été employée, pour les colonnes intitulées p, p' et p'' et concernant les points singuliers des courbes enveloppes; les charges trouvées y sont inscrites en chiffres droits s'ils sont nécessaires* pour le tracé des courbes et en chiffres inclinés dans le cas contraire. Les distinctions du même genre introduites dans les autres colonnes pour faciliter la lecture se comprenent sans autre explication.

Pour le „train-type de surcharge“ des lignes d'intérêt général, nous donnons les quatre tableaux détaillés de calculs *XIX*, *XX*, *XXI* et *XXII*; pour chacun des trois autres train-types étudiés en détail, nous ne donnons qu'un tableau récapitulatif des calculs relatifs à p, p' et p'', parce que dans ces tableaux: *XXIII*, *XXIV* et *XXV* on voit se reproduire à très-peu près les anomalies déjà constatées pour le premier train-type, comme nous l'avons exposée aux Nos *XVI* et *XVII***.

XXVI. Tableau graphique général des charges uniformes pr. m de voie équivalentes aux trains-type et justifiant les échelles **a** *et* **b** *de l'ordonnance.*

1. Remarques générales sur les lignes d'intérêt général et d'intérêt local.

Les charges par *m* calculées précédemment et désignées par p, p' et p'' ont été reportées simultanément sur le tableau graphique afin de faciliter la comparaison pour toutes les portées; nous y représentons:

(42) . . . . $\left\{ \begin{array}{l} p \text{ . . . . . . par une ligne pleine;} \\ p' \text{ . . . . . par une ligne ponctuée;} \\ p'' \text{ . . . . . par une ligne ponctuée et pointillée.} \end{array} \right.$

Les polygones représentant les échelles de surcharge de l'ordonnance autrichienne dans le même tableau, sont indiqués en lignes pleines pour le moments et en lignes ponctuées pour les efforts tranchants; ils se distinguent du reste à première vue sur le tableau, non seulement par leur forme régulière mais encore par des petits cercles spéciaux marquant leurs sommets.

Les trois classes de surcharge pour lesquelles on doit compter 100%, 80% et 60% des charges prescrites par les échelles **a** et **b** de l'ordonnances autrichiennes, ont été mises en évidence à l'aide de couleurs (rouge-violet, bleu et vert). Enfin à titre de comparaison nous avons ajouté l'échelle de surcharges prescrite par la circulaire ministérielle française du 9 Juillet 1877, en colorant en jaune le contour qui en résulte.

Les courbes tracées pour p, p' et p'' présentent des particularités analogues pour chacune des trois classes de surcharge***. On remarquera que l'on a toujours $p' > p'' > p$, mais que

* Une distinction plus rigoureuse, comme celle qui est faite pour les charges inscrites dans les colonnes intitulées: „exemples“ n'aurait pas grand intérêt ici pour ces portées exprimées en nombres fractionnaires, à moins que l'on ne veuille s'occuper aussi de la recherche des points d'intersection des contours enveloppes obtenus avec les divers barêmes à considérer.

** Les charges d'essieux considérées dans les tableaux de calculs pour les trois classes de surcharge (100%, 80% et 60%) ont aussi leur importance pour la classification des rails, qui suivant les caractères essentiels des diverses lignes de chemins de fer, donne lieu en Autriche aux distinctions suivantes:

Lignes d'intérêt général 100%. — Essieu de 14*t* au plus.	1. Catégorie: Circulation intense, vitesses considérables, pentes fortes . . . etc. Rails pesant environ . . . . 35 kg 4 pr. *m*. 2. Catégorie: Circulation moyenne, vitesses modérées, pentes moyenne . . . etc. Rails pesant environ . . . 31 kg 7 pr. *m*.
Lignes d'intérêt local 80%. — Essieu de 12*t* au plus.	3. Catégorie: (Traction avec matériel moteur des lignes principales) Circulation modérée, vitesses faibles, pentes moyennes . . . etc. Rails pesant environ 26 kg 0 pr. *m*.
Lignes d'intérêt local 60%. — Essieu de 8·5 à 9*t* au plus.	4. Catégorie: (Traction avec matériel moteur spécial) Circulation faible, vitesses faibles, pentes faibles . . . etc. Rails pesant environ . . . . 23 kg 0 pr. *m*.

*** Ces courbes sont tracées en lignes continues, dans l'intérêt de la clarté de l'ensemble. Dans un dessin à plus grande échelle on aurait en marquant les ponts singulièrs, des contours analogues à ceux du tableau graphique donné au N° *XXVII*.

tandis que la différence $(p' - p)$ prend pour toutes les portées des valeurs que l'on ne peut négliger, la différence $(p'' - p)$ n'acquiert des valeurs pratiquement importantes qu'entre des limites de portée relativement restreintes. C'est ainsi que $(p'' - p):p$ ne dépasse 6% environ:

(43) . . . . { qu'entre des portées de 12^m et 30^m pour la classe 100%
„ „ „ „ . 10^m et 25^m „ „ „ 80%
„ „ „ „ 8^m et 20^m „ „ „ 60%

Les plus grandes valeurs de ce rapport, qui se présentent pour des portées d'environ 17^m, 13^m et 11^m impliquent un surplus de charge n'excédant pas 18% en nombre rond, elles concernent des ouvertures de pont pour lesquelles, comme on sait, on cesse de construire des poutres à âme pleine pour donner la préférence aux poutres à triangles ou treillis*, et les exigences de la construction elle-même conduisent dans ce cas à faire adopter, vers le $^1/_6$ de la portée, des sections de bandes généralement plus fortes que ne l'exigerait la loi parabolique de la théorie.

On a pu conclure de ces considérations que pour tenir compte des effets de charges p'' il n'y avait pas lieu de prescrire une échelle spéciale et qu'il suffisait de surélever pour les portées dangereuses mentionnées plus haut, d'environ 8% les charges p trouvées pour le milieu de la portée en ajoutant les raccords nécessaires.

De cette façon il a été possible de s'en tenir à l'usage établi de prescrire une échelle unique de surcharge pour toutes les sections de bandes et les différences qui résultent de la considération des charges p'' se réduisent à ceci: pour les plus petits ponts à triangles ou à treillis, les bandes peuvent être calculées trop fortes de 8% vers le milieu de la portée et trop faibles de 10% dans le voisinage des appuis, pourvu toutefois que l'on y suppose appliquées rigoureusement et les surcharges p'' provenant du train-type, et les diminutions de sections provenant de la loi parabolique des moments.

Mais pour ces ponts, les constructeurs préconisent, comme on sait l'emploi de tôles verticales relativement élevées, dont la présence seule s'opposerait à une réduction exagérée des sections des bandes; l'excès du métal qu'on pourrait redouter pour le milieu de la portée ou prescrire près des appuis, s'y trouve donc commandé par les exigences de la construction elle-même.

En ce qui concerne les charges p' équivalentes quant aux efforts tranchants, nous avons déjà exposé au N° *XVII*:4. que le principe des longueurs surchargées servant d'entrée à l'échelle prescrite, suffit pour tenir compte des effets produits sur toutes les sections par les trains (fléchissant ou tranchant) de surcharge.

On voit finalement que pour chacune des trois classes de surcharges, on pouvait avec une exactitude pratiquement suffisante, se contenter de prescrire deux échelles de surcharge.

2. Les échelles **a** et **b** pour les lignes d'intérêt général (100%).

Pour toutes les lignes d'intérêt général, c'est comme nous l'avons expliqué, le train-Arlberg (violet) étudié au tableau N° *XXIII*, qui jusqu'à 40^m de portée donne les plus grands effets. Les résultats des calculs consignés sur le titre-résumé du tableau cité, font voir que les charges p, p' p'' provenant du train sont représentées aussi exactement que possible par les charges **p** et **p**' des échelles prescrites. En outre lorsqu'il n'y a qu'un ou deux essieux à considérer (portées jusqu'à 2^m70) on a tenu compte d'une charge d'essieu possible de 15^t provenant de variations de tension dans les ressorts, ou des inégalités de la voie.

On remarque d'après les colonnes (3) et (4) que l'échelle **a** couvre les valeurs de p très suffisamment** jusqu'à une portée de 10^m. De 10 à 30^m de portée les nombres de l'échelle ont été surélevées avec intention à cause de p''; pour des portées plus grandes, les charges de l'échelle couvrent toujours les charges p provenant du train. Les colonnes (5) et (6) font voir que les charges p'' ne peuvent dépasser celles de l'échelle **a** qu'entre des portées*** de 15 à 20^m de la différence maxima de 10% et que pour des portées dépassant 40^m elles sont toujours couvertes par celles de l'échelle. D'autre part d'après les colonnes (9) et (10) à l'exception de

* Les valeurs citées ici pour les lignes d'intérêt local ont été du reste déplacées artificiellement, ainsi qu'on le verra plus loin, parce que les échelles de surcharges prescrites pour ces lignes, ne dérivent pas des trains qui les concernent (80% et 60% des échelles **a** et **b**) mais de ceux des lignes d'intérêt général.

** Des différences d'au plus 2 à 3% n'ont aucune importance pratique.

*** La section constante donné aux poutres de 2^m de portée, et les réductions très-limitées que l'on admet dans les sections de bandes près des appuis, pour des portées inférieures à 5^m dispensent de la nécessité de considérer p'' pour les petits ponts.

quelques différences sans importance, les charges p' sont toujours couvertes par celles de l'échelle 𝔟, par conséquent le „train-type de l'Arlberg", dans les limites de tolérance expliquées plus haut, ne produira pas d'effets de surcharge supérieurs à ceux qui résultent des deux échelles de l'ordonnance.

Considérons maintenant le „train-type de surcharge" à trois locomotives traité en détail dans les tableaux de calcul *XIX*, *XX*, *XXI* et *XXII*. Les effets de surcharge de ce train, jusqu'à des portées d'au plus 40^m sont couverts par ceux du train de l'Arlberg, et n'entrent plus en ligne de compte. On voit d'ailleurs que jusqu'à 60^m de portée les valeurs p et p'', et même jusqu'à 80^m la valeur de p', se trouvent suffisament couvertes par les charges des échelles 𝔞 et 𝔟 de l'ordonnance, pour ne pas donner lieu à des différences excédant 5%.

Pour des portées plus grandes, les charges 𝔭 𝔭' des échelles sont dépassées dans une plus forte proportion par les charges p p'' p' provenant du train. On a dû tenir compte pour ces portées du peu de probabilité de la réalisation simultanée de toutes les hypothèses défavorables: charge mobile étendue sur toute la longueur du pont, essieux chargés et écartés sur tous les points de la manière la plus défavorable, enfin ouragan aussi violent que le prévoit le § 3 lit. *f* de l'ordonnance: on sait en effet que, en vue des ces ouragans, les constructions métalliques de grandes portées doivent être notablement renforcées.

On a abaissé en conséquence les échelles à prescrire, en diminuant les charges correspondant aux portées de 80, 120 et 160^m d'une manière convenable* (de 9% environ pour 120^m) et raccordant au moyen d'une ligne droite le contour ainsi obtenu avec le point conservé pour 40^m de portée, pour lequel tous les effets mentionnés ci-dessus (train de l'Arlberg et train-type de surcharge) sont très-bien représentés par les charges des échelles.

Les deux échelles de l'ordonnance, couvrent donc comme l'on voit, dans les limites de tolérance imposées par la pratique, tous les effets produits par les trains de surcharge à considérer sur les lignes d'intérêt général, et les excès de surcharge possibles, même dans le cas improbable où toutes les circonstances les plus défavorables se présenteraient en même temps, ne pourront pas dépasser 10%.

3. Prescriptions par centièmes (80% et 60%) pour les lignes d'intérêt local.

En renouvelant pour les lignes d'intérêt local et les trains-types qui les concernent, les recherches déjà faites pour les lignes d'intérêt général, on est arrivé à des résultats tout à fait analogues, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer pour les charges p p'' p' au N° *XXVI*: 1.

Le tableau graphique de toutes les valeurs trouvées a montré que l'on pouvait couvrir les effets des trains-types de ces lignes secondaires, avec une exactitude bien suffisante, à l'aide d'un système de charges mobiles évaluées en centièmes des charges 𝔭 et 𝔭' concernant les lignes d'intérêt général. Les comparaisons faites tout d'abord à cet effet, avec les locomotives qui se présentent le plus couramment dans le service, à savoir:

locomotive de 36^t avec 3^m0 d'écartement total des essieux . pour la Classe 80%
„ „ 24^t avec 2^m3 „ „ . . . . . pour la Classe 60%

avaient même fait ressortir un surcroît de sécurité; par suite le système de prescription une fois admis, on a pu choisir soigneusement parmi tous les types possibles de locomotives analogues, ceux qui mettaient les effets de surcharge produits encore mieux d'accord avec les limites de charges mobiles prescrites.

Les écartements totaux d'essieux indiqués dans le texte de l'ordonnance à savoir: 2^m40 pour les locomotives de 36^t et 2^m20 pour celles de 25^t5 peuvent être considerés comme des limites inférieures qui se présentent très-rarement. Dans les tableaux de calculs *XXIV* et *XXV* qui s'y rapportent, on a au surplus disposé des longueurs moins importantes qui ne sont pas indiquées expressément par l'ordonnance, en les prenant de la manière la plus défavorable qu'il soit possible, de façon que les effets sur les ponts ainsi calculés, ne seront généralement pas atteints.

On comprend que dans ces circonstances l'excédant de surcharge d'environ 10% trouvé par exemple dans les deux tableaux pour p vers 4^m de portée ne se produira en réalité presque jamais, quant aux différences concernant p et p' pour les grandes portées ou concernant p''

* Les charges admises définitivement dans les échelles 𝔞 et 𝔟 pour de grandes ouvertures, sont celles proposées par l'auteur en 1880. Les échelles suffisent par conséquent pour le „train de la Cie du Midi" et le „train Semmering" cités pour la France et l'Autriche (voir les charges au N° *XIV* fig. 6) et il est bien improbable que des trains plus lourds circulent prochainement sur les grandes lignes.

pour les petits ponts à triangles ou treillis on pourrait répéter ici ce qui a déjà été exposé pour les lignes d'intérêt général.

Remarquons du reste pour p'' que les plus grandes différences par rapport à $^8/_{10}$ p et $^6/_{10}$ p ne se produisent pas vers 13^m et 11^m de portée, où nous les avions trouvées au N° *XVI* vis-à-vis de p, parce que par suite du système de prescription par centièmes on a augmenté artificiellement les abscisses correspondantes. Les colonnes (6) des tableaux *XXIV* et *XXV* font voir que la différence maxima se produit pour les lignes d'intérêt local comme pour les lignes d'intérêt général vers des portées de 17 à 20^m environ, c. a. d. dans les petits ponts à triangles ou treillis, pour lesquels il n'est pas possible de fait, de réduire les sections de bandes exactement d'après la théorie.

4. Exactitude et simplicité des prescriptions de surcharge autrichiennes comparativement aux prescriptions publiées antérieurement.

Parmi les prescriptions de surcharge antérieures citées au N° *XIV*: 1, celles:

(44)	. . . . . de l'Autriche en 1870	contiennent 4	charges différentes par mètre de voie
	. . . . . de la France en 1877	„ 33	
	. . . . . de la Russie en 1884*	„ 72	

On pouvait par suite se demander avec une inquiétude bien fondée, combien de charges par mètre de voie on allait devoir prescrire dans l'ordonnance autrichienne de 1887, si on voulait arriver à représenter les charges mobiles avec une exactitude encore plus grande que celle qu'a pu atteindre la circulaire russe de 1884 seule capable d'être mise en comparaison?

Il a suffi de 24 valeurs de la charge par m en tout dans les deux échelles a et b, pour obtenir la solution cherchée, qui appliquée aux trois classes de surcharge (100%, 80% et 60%) résout complètement la question pour toutes les lignes d'intérêt général et local. On a évité la complication résultant des interpolations prescrites par la circulaire russe pour toutes les parties de pont comprises entre un appui et le milieu de la portée**; les procédés de calcul mis à la disposition des constructeurs sont non seulement simples et pratiques, mais comme nous allons le faire voir, tiennent plus exactement compte des effets réellement produits, que les savantes prescriptions russes.

En cherchant à établir des charges uniformes qui soient équivalentes aux effets des trains pour toutes les mailles comprises entre un appui et le milieu de la portée, les auteurs de la circulaire russe ont eu surtout en vue le cas des efforts tranchants, pour lesquels le procédé usité antérieurement (voir au N° *XVII*: 2. 3.) implique les erreurs les plus importantes; ces erreurs sont mises en évidence au tableau N° *XXII* pour le train-type de surcharge des lignes d'intérêt général. Considérons à cet effet les sections de pont qui divisent la portée dans les rapports:

(45) . . . . . $l' : l = 0{\cdot}87,\ 0{\cdot}83,\ 0{\cdot}79,\ 0{\cdot}75,\ 0{\cdot}70,\ 0{\cdot}65,\ 0{\cdot}50$

répondant*** aux divisions de mailles les plus répandues à savoir

poutre à 12 mailles simples	$\frac{21}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{15}{24}$	$\frac{13}{24}$
	0·875	0·792	0·708	0·633	0·542
poutre à 10 mailles simples	$\frac{17}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{11}{20}$	
	0·850	0·750	0·650	0·550	

On reconnaît dans le tableau que l'excédant de surcharge evalué en centièmes: $(p'_{l'} - p'_l) : p'_l$ augmente rapidement à mesure que les sections sont choisies plus loin de l'appui et plus près du milieu de portée, pour $l' : l < 0{\cdot}70$ il dépasse sûrement la limite de tolérance de 10%, et il atteint au milieu du pont des valeurs inadmissibles qui auraient depuis longtemps forcé les constructeurs à effectuer des calculs plus rigoureux si ceux-ci n'étaient pas conduits par d'autres considérations à donner aux croisillons de cette partie du pont des dimensions plus fortes.

---

* Voir l'article publié par M. le prof. Belelubsky (Rigaer Industriezeitung N° 8 ex 1885) contenant une traduction allemande de cette intéressante circulaire, avec un tableau graphique.

** En tenant compte de ces interpolations, on aurait de fait trois fois autant d'échelles de surcharge à observer (et non trois) qu'il y a de mailles dans la moitié de pont considérée.

*** En admettant, comme il est d'usage, que la longueur l' de la surcharge soit limitée aux milieux de mailles.

L'ordonnance autrichienne élimine entièrement ce genre d'erreurs en prescrivant les charges de l'échelle **b** d'après les longueurs surchargées, la circulaire russe, au contraire, les atténue grandement moyennant une troisième échelle de surcharges et une série d'interpolations; nous citerons à ce sujet les exemples suivants tirés pour $l' : l = 0{\cdot}70$ de notre tableau *XXII*:

(46) . { pour 16^m de portée on a exactement $9{\cdot}5\%$ et avec interpolation $15{\cdot}2\%$
pour 17^m „ „ „ „ „ $9{\cdot}9\%$ „ „ „ $15{\cdot}4\%$
pour 18^m „ „ „ „ „ $9{\cdot}4\%$ „ „ „ $13{\cdot}2\%$
. . . . et ainsi de suite. . . . .

Les erreurs en plus de 5% qui subsistent encore n'ont en pratique aucune importance; elles montrent cependant que la troisième échelle russe pour les charges p' vers le milieu de la portée, et la complication des interpolations quelle entraîne ne sont pas nécessaires, et ont été remplacées avec avantage par les prescriptions plus simples et plus exactes de l'échelle **b** autrichienne.

Considérons maintenant les charges équivalentes quant aux moments, pour lesquelles les erreurs provenant de la méthode usuelle de faire les calculs (voir N° *XVI*, 1 à 5) ont bien moins d'importance. Les lignes colorées en rouge sur le tableau graphique et représentant les charges p, p' es p'' pour le train-type de surcharge permettent de comparer ces trois fonctions pour toutes les portées; elles montrent que la charge p'' peut beaucoup mieux s'assimiler à la charge de même provenance p, qu'à la charge toute différente en principe p' concernant les efforts tranchants. C'est par cette manière d'envisager les charges p'' que les prescriptions autrichiennes diffèrent essentiellement des prescriptions russes.

Tandis que la circulaire russe de 1884, remplace dans tous les cas p'' par la charge notablement plus élevée p' (échelle commune pour les appuis), l'ordonnance autrichienne de 1887 se contente pour p'' des valeurs moindres p données par l'échelle **a**, qui a été convenablement surélevée pour les portées comprises entre 12 et 30^m.

Une comparaison des rapports $+(p' - p'') : p''$ et $-(p'' - p) : p''$ calculés en centièmes d'après les tableau *XIX*, *XX* et *XXI* pour le „train-type de surcharge" permet de se prononcer entre les deux manières d'estimer p'' et fait voir qu'ici encore c'est l'appréciation beaucoup plus simple des prescriptions autrichiennes qui s'approche d'avantage des effets qu'il s'agit de représenter:

(47)

Portée	Russie 1884 $+(p' - p'') : p''$	Autriche 1887 $-(p'' - p) : p''$	Portée	Russie 1884 $+(p' - p'') : p''$	Autriche 1887 $-(p'' - p) : p''$
m			m		
10	+ 9·2%	— 3·7%	20	+ 9·6%	— 11·9%
11	+ 9·2%	— 5·3%	25	+ 8·6%	— 6·6%
12	+ 11·8%	— 6·1%	30	+ 11·6%	— 5·4%
13	+ 12·5%	— 7·0%	40	+ 9·8%	— 2·4%
14	+ 13·7%	— 9·5%	50	+ 6·4%	— 1·5%
15	+ 11·9%	— 13·0%	60	+ 5·5%	— 1·3%
16	+ 10·6%	— 15·0%	80	+ 4·4%	— 0·6%
18	+ 9·2%	— 14·8%	100	+ 3·6%	— 0·5%

D'après cette comparaison l'appréciation autrichienne ne serait moins exacte que celle de la circulaire russe, que pour des portées de 15 à 20^m; mais pour ces portées l'échelle **a** a été surélevée en conséquence d'environ 8% au maximum.

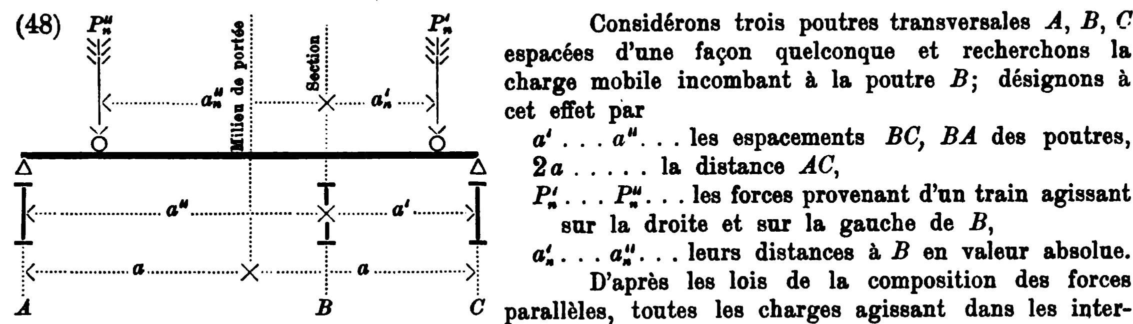
XXVII. Prescriptions de charge mobile pour les poutres transversales et les longerons.

1. Formule de surcharge pour les poutres transversales.

Les prescriptions du § 3 lit. *e* de l'ordonnance autrichienne font dériver la charge mobile à admettre sur les poutres transversales et les longerons des deux échelles **a** et **b** données pour les maîtresses-poutres et constituent par ce fait une innovation par rapport aux méthodes de calcul usitées antérieurement, fondées toutes sur l'hypothèse de machines-type. Il est facile de démontrer que le nouveau procédé de calcul très-simple est aussi théoriquement tout à fait

exact, pourvu que l'on s'en tienne, pour la répartition des forces dans le sens de la voie, aux hypothèses admises jusqu'ici, en faisant abstraction de la continuité des rails au-dessus des traverses ainsi que de la continuité des longerons au-dessus des poutres transversales.

(48)



Considérons trois poutres transversales A, B, C espacées d'une façon quelconque et recherchons la charge mobile incombant à la poutre B; désignons à cet effet par

$a' \ldots a'' \ldots$ les espacements BC, BA des poutres,

$2a \ldots\ldots$ la distance AC,

$P'_n \ldots P''_n \ldots$ les forces provenant d'un train agissant sur la droite et sur la gauche de B,

$a'_n \ldots a''_n \ldots$ leurs distances à B en valeur absolue.

D'après les lois de la composition des forces parallèles, toutes les charges agissant dans les intervalles AB et BC donnent en B des composantes dont la somme est

(49) $$\mathcal{P} = \Sigma P' \frac{a' - a'_n}{a'} + \Sigma P''_n \frac{a'' - a''_n}{a''} = \Sigma P_n - \left(\frac{\Sigma a'_n P'_n}{a'} + \frac{\Sigma a''_n P''_n}{a''}\right)$$

Considérons d'autre part conformément à la règle de l'ordonnance, le pont idéal dont la portée $l = 2a$ serait la distance AC, et une section quelconque B sur cette portée. La charge uniforme p par m de voie qui dans ce pont serait équivalente au train quant aux moments de flexion en B, est donnée par la formule (27) d'après la quelle on a pour la moitié de la charge mobile totale sur le pont AC.

(50) $$pa = \Sigma P_n - \left(\frac{\Sigma a'_n P'_n}{a'} + \frac{\Sigma a''_n P''_n}{a''}\right) = \mathcal{P}$$

Cette formule montre qui, si conformément à la règle du § 3 lit. e de l'ordonnance, on évalue $\mathcal{P} = pa$ en prenant pour p la charge p_a qui dans l'échelle a correspond à la portée $l = AC$, ce calcul est rigoureusement exact, pourvu toutefois que l'échelle a convienne pour couvrir les moments de toutes les sections du pont AC, condition que l'on a cherché à réaliser le mieux possible. Les différences entre les valeurs résultant de cette méthode de calcul et celles que l'on obtient par d'autres procédés s'appliquant directement aux charges et écartements des essieux du train, sont donc assujetties aux mêmes limites de tolérance que nous avons évaluées précédemment pour le calcul des maîtresses-poutres.

Pour le cas d'une poutre transversale de rive la règle de l'ordonnance prescrit de remplacer celle des poutres transversales voisines qui fait défaut, par un support de la voie convenablement éloigné. Cet écartement devra être de 1^m au moins d'après cela, pour un intervalle de traverses; dans le cas de longerons-consoles il devra être augmenté de la double portée de ces consoles (portée théorique); en cas de longerons-sur-culée, il sera égal à la portée de ces derniers (ponts biais) . . . etc.

En général on ne saurait trop recommander de construire les poutres transversales de rive au moins aussi solidement que les poutres intermédiaires voisines, de façon que toute la construction métallique ait au-dessus des appuis un encadrement bien résistant.

2. Tableaux graphique et numérique.

Le tableau graphique ci-après (voir aussi Tab. IV du IIe vol.) donne un résumé comparatif des effets de surcharge sur les poutres transversales; on y a employé les mêmes couleurs qu'au tableau graphique N° *XXVI* des charges par mètre.

Les courbes coloriées ou numérotées de 1 à 12 donnent la demi-charge incombant à une poutre transversale (charge par rail sur la gauche) d'après l'écartement moyen (jusqu'à 7^m, division inférieure). Pour les locomotives numérotées de 1 à 12 on n'a tracé que les courbes relatives à des écartements égaux de poutres transversales (intermédiaires); pour les locomotives-types marquées N M au contraire, on a en outre prévu le cas de deux écartements contigus dans le rapport de 1 : 5 et les courbes ainsi obtenues sont ponctuées et pointillées*. Toutes les courbes

* La plus petite valeur „de l'écartement moyen" prise en considération est 3^m parce que $^1/_6\, 2 \times 3 = 1^m$ a été considéré comme un minimum pour la distance de poutres transversales.

en général ont été tracées conformément à la formule (50); elles se composent d'une suite d'arcs d'hyperbole aboutissant à des points singuliers entourés de petits cercles sur le dessin; ces points correspondent aux écartements moyens (supposés croissants) pour lesquels de nouveaux essieux entrent en action et font varier les sommes Σ dont les valeurs pour les locomotives-types sont données par les tableaux *XIX* à *XXV* (voir les formules (12) et (31) pour les moments).

Ces explications, et la relation qui d'après la formule (50) a été établie entre la charge mobile incombant aux poutres transversales et celle qui incombe aux maîtresses-poutres, amènent à conclure que le tableau graphique actuel ne diffère du grand tableau *XXVI*, qu'en un point; ici c'est la charge mobile totale pour toute la portée, tandis qu'au tableau *XXVI*, c'est la charge mobile par *m* de portée, qui se trouve représentée.

Pour utiliser le tableau actuel à ce nouveau point de vue on se sert de la division placée en haut pour des portées de 14^m au plus prises comme abscisses, et de la division placée à droite pour les charges sur la portée entière prises comme ordonnées et allant jusqu'au-delà de 100^t.

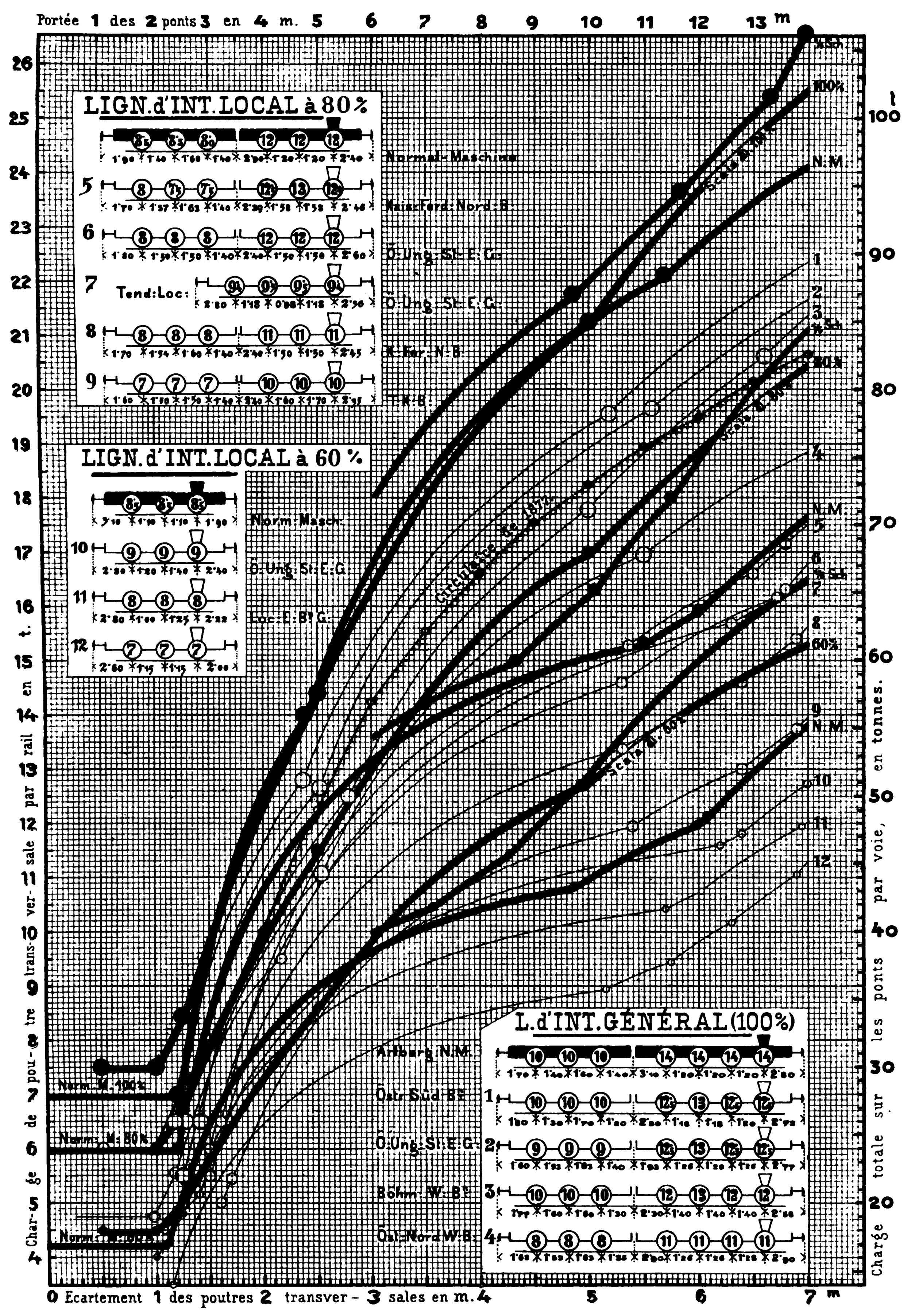
Le tableau graphique peut encore être utilisé pour juger approximativement des effets de surcharge produits par une locomotive donnée, en la comparant à celle des 15 locomotives étudiées dans le tableau*, qui d'après les charges et écartements des essieux parait s'en rapprocher le plus. Il n'y aurait d'ailleurs pas lieu de pousser cette comparaison au-delà de la portée de 14^m à laquelle est limité le tableau, car pour les ponts de grandes portées ce sont des trains entiers de surcharge et non des locomotives seulement qui entrent en ligne de compte, comme nous l'examinons en détail au N° *XXXV* de cet ouvrage à propos du § 12 de l'ordonnance.

Considérons maintenant les contours tracés en traits forts et marquées „Scala **a**" (pour les trois classes: 100%, 80% et 60%); ils forment ensemble un barême graphique dépendant de la seule échelle **a** et donnent à l'avance la charge mobile sur une poutre transversale quelconque, pour toutes les combinaisons possibles des écartements adjacents dont la valeur moyenne sert d'entrée. Cet instrument de calcul graphique pourra pour simplifier être réduit à la ligne supérieure (rouge 100%) puisqu'en prenant 80% ou 60% de ses ordonnées on obtient les lignes inférieures (bleu et vert). Au lieu d'une ligne unique (rouge) on pourra encore se servir d'une table numérique dressée à l'avance qui d'après ce qui précède suffira dans tous les cas. C'est dans cet ordre d'idées qu'à été conçue la Tab. III du IIe volume donnant pour tous les écartements moyens (en centimètres) les charges cherchées par rail (lignes d'intérêt général 100%). On y a annexé une table des effets additionnels provenant de la charge perma-

* Ceci comprend le plus lourdes machines circulant en France, qui exercent sur les ponts des effets de surcharge tout à fait analogues à ceux que nous venons d'étudier, ainsi que l'on peut en juger à l'inspection du tableau suivant:

(51) . Tableau des locomotives les plus défavorables pour les ponts en France.

Désignation des Réseaux		Longueur de tampon à tampon		Ecartement des essieux extrêmes		Poids de la machine		Poids du tender	Observations	
		de la machine	du tender	de la machine	du tender	total	sur l'essieu le plus chargé			
		Locomotives à 3 essieux.								
	No	m	t	m	m	t	t	t		
Est	1	8·935	5·875	5·350	2·500	42·77	14·90	28·85	gr. vitesse	La machine qui exerce les plus grandes surcharges sur les ponts est celle (3) de la compagnie du Midi. Les tenders (à 2 essieux) ont environ les mêmes poids que ceux usités en Autriche (à 3 essieux).
Est	2	8·765	5·060	3·550	2·500	36·63	13·30	23·37		
Midi	3	8·490	6·345	3·600	2·500	39·00	13·00	19·55		
Nord	4	8·802	5·800	4·100	3·000	40·10	13·60	24·00	à voyageur	
Orléans	5	9·286	5·922	3·700	2·600	40·70	13·90	20·00		
Ouest	6	8·550	5·910	3·700	2·800	37·25	12·60	22·70		
Ouest	7	7·990	Loc. T	3·700	Loc. T.	39·00	13·00	Loc. T.	pr. banlieue	
Paris L. M.	8	8·270	6·125	3·370	2·500	37·75	13·30	24·17		
Etat	9	8·350	5·650	3·370	2·650	36·40	12·30	21·70		
		Locomotives à 4 essieux.								
Est	10	9·410	5·870	3·950	2·500	49·20	12·87	23·37		La machine qui exerce les plus grandes surcharges sur les ponts est celle (12) de la compagnie du Midi. Les tenders (à 2 essieux) sont bien plus légers que ceux qui sont usités en Autriche (à 3 essieux).
Est	11	10·820	Loc. T.	5·050	Loc. T.	55·66	14·88	Loc. T.	pr. banlieue	
Midi	12	9·420	6·215	3·870	2·500	54·00	14·22	18·20		
Nord	13	9·115	5·635	4·250	2·500	44·10	12·00	21·60		
Orléans	14	9·769	5·940	4·080	2·600	50·18	13·50	21·45		
Paris L. M.	15	9·840	6·130	4·050	2·500	53·77	14·10	24·90		
Etat	16	9·995	5·620	4·050	2·650	53·30	13·55	23·10		



Portée 1 des 2 ponts 3 en 4 m. 5 6 7 8 9 10 11 12 13 m
LIGN. d'INT. LOCAL à 80%
Normal-Maschine
Kais.-Ferd.-Nord-B.
Ö. Ung. St.-E.-G.
Tend: Loc:
Ö. Ung. St.-E.-G.
N. Fer. N. B.
T. K. B.
LIGN. d'INT. LOCAL à 60%
Norm. Masch.
Ö. Ung. St. E. G.
Loc. E. Bᵗ G.
L. d'INT. GÉNÉRAL (100%)
Arlberg N. M.
Öst.-Süd Bⁿ
Ö. Ung. St. E. G.
Böhm. W.-Bⁿ
Öst.-Nord W. B.
Norm. M. 100%
Norm. M. 80%
Charge de pou-tre trans-ver-sale par rail en t.
Charge totale sur les ponts par voie, en tonnes.
0 Ecartement 1 des poutres 2 transver- 3 sales en m. 4 5 6 7 m

nente, tels qu'on a pu les estimer sur les ponts déjà construits d'après l'ordonnance autrichienne, avec des traverses et un platelage en bois, comme il est d'usage* en Autriche.

Les charges mentionnées ci-dessus sont naturellement supposées appliquées aux poutres transversales à l'endroit où celles-ci reçoivent de fait la surcharge (ponts en courbe, longerons multiples etc.) sans qu'il y ait rien à changer à la règle de l'ordonnance. On pourrait de même, tenir compte de la manière dont les poutres transversales sont attachées aux maîtresses-poutres; mais il est d'usage de construire les poutres transversales assez solides pour qu'elles satisfassent aux conditions d'une poutre reposant librement sur deux appuis.

3. Charge mobile sur les longerons et les menues pièces du tablier de voie.

Conformément au § 3 lit. *e* de l'ordonnance autrichienne, les longerons doivent être considérées comme des maîtresses-poutres reposant sur les poutres transversales. Ces poutres qui constituent de fait de véritables petits ponts, peuvent donc être calculées avec tous les tableaux auxiliaires dressés pour les maîtresses-poutres; nous ajouterons qu'il est d'usage de les construire assez solides pour qu'elles satisfassent aux conditions d'une poutre reposant librement sur deux appuis**; ce qui permet de leur appliquer la Tab. V de notre IIe volume.

En raison des relations que nous avons montré exister entre la charge mobile sur les maîtresses-poutres et la charge mobile sur les poutres transversales, on pourra aussi utiliser les Tab. IV et III du IIe volume pour le calcul des longerons. En pareil cas c'est la demi-portée qui sert d'entrée à la Tab. III, et on pourra aussi accepter approximativement les données qu'elle renferme pour la charge permanente***; le produit des nombres placés en regard dans la Tab. III sera le moment de flexion ($^1/_2$ portée $\times$ $^1/_4$ charge totale) au milieu de la portée.

Les pièces du tablier de voie (rails, traverses, platelage . . . etc.) n'ont pas été soumises dans l'ordonnance autrichienne à des prescriptions spéciales. Les rails sont fabriqués actuellement en acier, d'après les procédés Bessemer-Thomas, Martin-Siemens . . . etc., et le plus grand travail admissible pour ce métal dans ces conditions sous la plus forte charge d'essieu n'est nullement soumis aux limites du § 4 de l'ordonnance mais réglé par des considérations tirées des expériences faites†. Pour les traverses de bois résistant à la flexion sous l'action des charges des roues, on devra se conformer à la limite de 80^{kg} par cm^2, fixée au § 4 pour le travail du bois.

Le platelage enfin n'a que bien rarement à supporter la circulation des voyageurs et sert dans la plupart des cas exclusivement au personnel de service; mais comme on y dépose souvent le matériel de la voie, nous ne pouvons que recommander de lui donner au moins des dimensions suffisantes pour que le bois ne travaille pas à plus de 80^{kg} pr. cm^2 sous l'action d'une charge uniforme de 340^{kg} par m^2.

XXVIII. Travail résultant des dilatations, du vent, et des effets dynamiques.

1. Dilatations.

La recommandation faite au § 3 lit *g* de l'ordonnance de tenir compte des changements de température, pour lesquels il serait bien difficile de donner des prescriptions plus précises, doit être comprise pour l'Autriche†† de façon que l'on tienne compte d'oscillations d'au moins 50 degrés centigrades.

Pour les ponts à travées indépendantes qui sont les plus répandus, on n'aura en général à s'occuper que d'une bonne disposition des appuis mobiles et immobiles, ces derniers devant dans le cas de ponts en pente, être toujours placés sur la pile ou culée d'aval. Les appuis mobiles avec système de galets ou rouleaux de friction se recommandent pour des portées d'au moins 40^m, et sont même souvent employés pour des portées moindres.

* Ces charges additionnelles répondent à la formule $200^{kg} + l \times 400^{kg}$ où l exprime l'écartement moyen en mètres. En se servant de la Tab. III pour les lignes d'intérêt local il conviendra d'admettre pour ces charges additionnelles au moins 90% et 70% des valeurs de la table (et non 80% et 60% comme pour la charge mobile).

** Cette manière de procéder est fondée sur cette considération que les petits longerons se construisent à section constante, et qu'alors même la continuité de ces poutres n'entraîne aucune diminution de section.

*** Ces charges de la Tab. III représentent environ 8·1% à 8·5% de la charge mobile pour des écartements de 3^m à 5^m50, tandis que d'après la Tab. V on devrait avoir plus exactement 6·7% à 9·2% en moyenne.

† Voir les indications données en note au N° ad *XIX* à *XXV* à la page 72 sur la classification des rails. Les rails lourds atteignent en France 45^{kg}, en Belgique même 52^{kg} par mètre.

†† En France c'est aussi au moins 50° centigrades qu'on doit prendre.

Pour les ponts à poutres continues que l'on doit toujours autant que possible disposer en palier, on placera l'appui fixe sur une pile de façon à diviser en deux la longueur totale de dilatation, et l'on intercalera, s'il y a lieu, au-dessus des culées, des appareils spéciaux dans la voie, pour faciliter le jeu de la dilatation des rails qui s'y concentre. L'expérience a toutefois démontré, que jusqu'à des longueurs d'au moins 40^m, on peut se passer avec avantage de ces appareils spéciaux; le glissement des rails dans le sens de leur longueur rachète les différences dues à la dilatation *.

Le travail supplémentaire résultant des dilatations joue un rôle très-important dans les calculs relatifs aux ponts en arc, et, lorsque la portée est grande, il y acquiert autant d'importance que le travail provenant des charges verticales. Pour des viaducs à poutres continues reposant sur des piles métalliques très-élevées on devra aussi tenir compte de la dilatation de ces dernières.

2. Effets du vent.

L'action des coups de vent qui, lors d'un ouragan, viennent frapper une construction métallique, est une action éminemment dynamique, et c'est seulement pour faciliter les calculs de résistance qu'à défaut d'une théorie meilleure, on assimilé l'effet du vent à celui d'une charge statique idéale uniformément répartie et agissant horizontalement.

Les ingénieurs étaient récemment encore loin de s'être mis d'accord sur la pression du vent par m^2 de surface exposée qu'il convient d'admettre dans les calculs, et cette question était d'autant plus obscure que dans la plupart des stations météorologiques on avait coutume de déduire simplement les pressions cherchées des vitesses ** observées.

A la suite de la terrible catastrophe du Taybridge, où le 28 Décembre 1879, un train tout entier disparut dans la mer, le gouvernement anglais dut se décider à ouvrir une enquête et à faire des études très-complètes sur les effets du vent; on n'admit en principe, dans ces recherches que des pressions mesurées directement. Les principaux résultats observés et en particulier les diagrammes fournis par les appareils-automatiques lors des ouragans les plus violents furent ensuite publiés par les soins du „Board of trade“ ***.

En tête de cette publication on trouve un mémoire de MM. John Hawkshaw, W. G. Armstrong, W. H. Barlow, G. G. Stokes et W. Yolland dont les noms sont très-considérés en Angleterre parmi les ingénieurs. Ce mémoire conclut en fixant un ensemble de règles sur la manière de tenir compte des effets du vent dans les calculs de ponts futurs, et propose d'admettre en principe une pression du vent de $273^{kg}4$ par m^2 (56 *lb.* par pied carré, mesure anglaise) sans distinction.

Les règles admises dans l'ordonnance autrichienne ne sont au fond qu'une traduction des règles anglaises, dans les mesures du système métrique, dans les habitudes des ingénieurs du „continent“ et dans le système même inhérent à l'ordonnance, où toutes les échelles prescrites sont représentées par des contours polygonaux. On a d'abord atténué les règles très-sévères des ingénieurs anglais, par une distinction importante déjà depuis longtemps en usage sur le continent (Europe centrale); on a considéré deux hypothèses de pressions du vent, en admettant 170^{kg} par m^2 dans le cas où la circulation des trains est encore possible, et 270^{kg} par m^2 dans le cas où elle ne l'est plus.

Nous renvoyons le lecteur à cet égard au rapport anglais (du 20 Mai 1881 page 4) lui-même lequel affirme qu'un coup de vent de 200^{kg} par m^2 est capable de renverser † tout wagon vide. Quoique nous n'ayons jusqu'ici, ni en France ni en Autriche, aucun réglement de service capable de provoquer l'interruption de la circulation des trains à l'approche d'un ouragan plus violent (270^{kg} par m^2), nous devons cependant considérer la coïncidence de circonstances aussi défavorables et rares comme constituant un évènement d'une probabilité extraordinairement minime, rentrant dans les cas de force majeure †† prévus, qui, sous la réserve de rester au-dessous de la limite de rupture absolue, peuvent amener un excès admissible dans le travail des matériaux.

---

* Sur les ponts munis d'appareils spéciaux pour le jeu de dilatation des rails au-dessus des culées, la voie se dilate exactement comme la base métallique sur laquelle elle repose en sorte que les ouvertures de joint restent constantes.

** Les instruments usités pour la mesure des vitesses ne peuvent indiquer les changements brusques de pression. Les appareils directs anglais exposaient au vent des plaques de 2 et 4 pieds carrés.

*** Report of the comittée appointed to consider the question of Windpressure on railway structures. London 1881. G. Edw. Eyre and Spottiswoode. Les diagrammes anglais font voir que le vent agit par chocs de façon que la pression maxima presqu'instantanée, ne peut être obtenue que par voie de mesure directe.

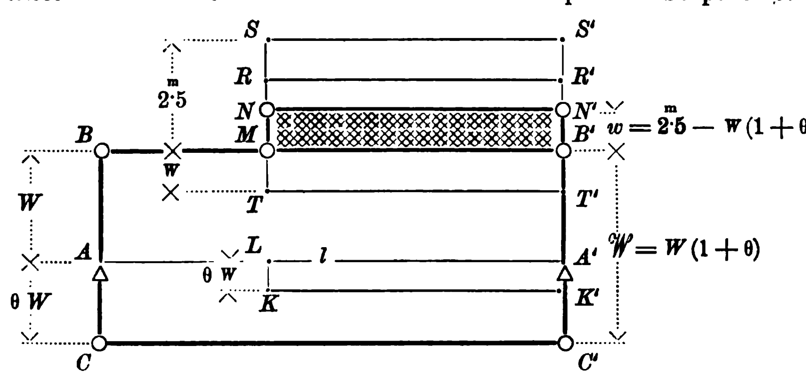
† C'est un accident qu'on a eu à déplorer déjà plusieurs fois en Autriche et pour lequel nos calculs sont d'accord avec ceux des Anglais.

†† Comment tenir compte du reste d'un ouragan bien plus terrible encore rélaté par la publication anglaise (page 8 planche 2) et qui le 2 mars 1871 aurait produit 440^{kg} par m^2 (90 *lb.* par pied carré, mesure anglaise) sur l'appareil de Bidston près Liverpool. (En mesurant au m^2 on obtiendrait bien moins.)

Les prescriptions du § 3 lit. *f* de l'ordonnance autrichienne ont été conçues comme nous venons de l'expliquer et nous allons faire voir que tout en respectant les principales règles anglaises, elles donnent lieu à des calculs fort simples, à l'aide des quels on peut traiter l'action horizontale du vent absolument comme l'action verticale des charges.

Considérons d'abord le cas le moins simple où le vent agit à 170^{kg} par m^2, la circulation des trains étant encore maintenue, et faisons, pour simplifier, abstraction de la distribution des surfaces exposées dans le sens vertical, ainsi que de celle des efforts incombant aux contreventements inférieur et supérieur (cette question est traitée plus loin au N° *XLII*). Examinons donc l'action que le vent exerce généralement sur la construction métallique et sur le train ainsi que la répartition de ses effets dans le sens de la longueur.

Représentons dans la figure ci-contre par le rectangle plein $A\,B\,B'\,A'$ la surface exposée effectivement à l'endroit de l'une des maîtresses-poutres du pont sans charge, et par le rectangle plein $A\,C\,C'\,A'$ la surface correspondante pour l'autre maîtresse-poutre réduite d'après l'échelle de l'ordonnance. Désignons par $AA' = l$, $A\,B = W$ et $A\,C = \theta\,W$ la portée du pont et les surfaces exposées par mètre courant au droit de l'une et de l'autre des maîtresses-poutres, θ étant le coefficient de réduction prescrit par l'échelle qui est indiquée au § 3 lit. *f* N° 1 et 2 de l'ordonnance autrichienne.



La surface totale à compter pour le pont supposé non chargé sera représentée, sur la figure, par le rectangle plein $C\,B\,B'\,C'$, en faisant abstraction bien entendu, de la répartition de cette surface entre les diverses pièces de la construction. La Hauteur $C\,B = \mathcal{W} = W\,(1 + \theta)$ représente la surface d'application du vent par mètre courant.

Supposons maintenant qu'un train, considéré comme un rectangle plein mobile de 2^m50 de hauteur, couvre la partie du pont comprise entre la section $L\,M$ et l'appui de droite A'. Si le pont est à voie en dessus, la surface additionnelle à compter pour le train pourra être représentée par le rectangle plein $M\,S\,S'\,B'$ de 2^m50 de hauteur et devra être ajoutée simplement à la surface déjà considérée $C\,B\,B'\,C'$ pour avoir l'effet total.

Si au contraire le pont est à voie en dessous (ou à voie intermédiaire), le profil rectangulaire idéal du train, sera couvert en partie par les pièces de l'une des maîtresses-poutres et couvrira lui-même les parties analogues des pièces de l'autre. Si on représente ces surfaces couvertes pour la première maîtresse-poutre par le rectangle plein $M\,T\,T'\,B'$ de hauteur $M\,T = \text{w}$, elles seront représentées pour la seconde par le rectangle plein $L\,K\,K'\,A'$ de hauteur $L\,K = \theta\,\text{w}$. Au lieu maintenant de déduire ces deux rectangles du contour total $C\,B\,M\,S\,S'\,C'$, on fait descendre le rectangle $M\,S\,S'\,B$ qui représente le train, d'une hauteur totale $SR + RN = MT + LK = \text{w}\,(1 + \theta)$; le rectangle partiel $M\,N\,N'\,B'$ de hauteur $w = 2^m50 - \text{w}\,(1 + \theta)$ qui se trouve encore au-dessus de $B\,B'$, représente évidemment la surface qu'il faut ajouter pour tenir compte du train, au rectangle plein $C\,B\,C'\,B'$ représentant le pont non chargé.

Les calculs, compliqués en apparence, qui résultent des prescriptions du § 3 lit. *f*, 2. de l'ordonnance pour les effets du vent sur un pont en charge, se réduisent donc à l'estimation des surfaces W et w par mètre courant ainsi que du coefficient θ qui résulte de l'échelle prescrite*. On pourra ensuite effectuer les calculs absolument comme cela est d'usage pour les charges verticales et on aura à considérer à cet effet:

(52) 1. une charge permanente uniforme de $170^{kg} \times \mathcal{W} = 170^{kg} \times W\,(1 + \theta)$ par mètre, agissant horizontalement sur toute la portée,

(53) 2. une charge mobile uniforme de $170^{kg} \times w = 170^{kg}\,[2^m5 - \text{w}\,(1 + \theta)]$ par mètre, agissant horizontalement sur toute la partie de portée qui est couverte par le train.

* La surface des ouvertures libres des mailles est la différence entre la surface contenue dans le contour général enveloppe de la construction et le rectangle $W \times l$, elle se déduit donc immédiatement de W. Notre figure suppose du reste que la surface exposée effectivement au droit d'une maîtresse-poutre peut être représentée par un rectangle, ce qui n'est qu'approximativement admissible pour les ponts à bandes courbes.

La deuxième hypothèse d'un ouragan de 270^{kg} par m^2 agissant sur le pont non chargé, qui est également prévue par l'ordonnance, n'entre généralement en ligne de compte que pour des ponts à grandes portées; cela résulte des systèmes de construction à mailles larges actuellement préférés par les ingénieurs. Les efforts produits par un vent de 270^{kg} par m^2 se déduiront de reste immédiatement de ceux que donne la formule (52) en multipliant tous les résultats trouvés par le rapport de $210 : 170$.

Les ponts dont la portée ne dépasse pas 20^m reçoivent toujours un contreventement suffisant sans calcul, pourvu qu'on y mette des calibres de fers encore pratiquement admissibles; leurs bandes n'ont pas besoin d'être renforcées en vue des effets du vent (§ 3 lit. *f* et § 4 lit. *e* de l'ordonnance). Ces considérations et celles qui précédent nous ont conduit à dresser le tableau graphique ci-contre (voir aussi Tab. VII du Tome II) pour l'estimation rapide des effets du vent à l'aide des valeurs $\mathcal{W}$ et w dans tous les ponts dont la portée ne dépasse pas 80^m et qui sont construits avec des poutres reposant librement sur deux appuis. Ce tableau composé en réalité de deux abaques peut être utilisé d'une manière générale; nous expliquerons toutefois d'abord son usage pour une portée de 80^m et un vent de 170^{kg} par m^2, sauf à généraliser ensuite les résultats trouvés*.

L'abaque de droite concerne les pressions $\mathcal{W} \times 170^{kg}$ par mètre de portée données par la formule (52), il contient les lignes droites représentatives des efforts tranchants horizontaux résultant du vent, et les valeurs de $\mathcal{W} = 1, 2, 3 \ldots . 7^{m^2}$ servant d'entrée sont inscrites aux sommets de toutes ces droites. La lecture des efforts cherchés s'effectue sur l'échelle de droite divisée en tonnes. Chacune des droites représentatives a son origine au milieu du pont (à gauche en dehors du tableau) et son point le plus élevé au-dessus de l'appui de droite, où elle indique la réaction d'appui provenant du vent. On se sert d'une de ces droites en prenant les abscisses comptées à partir du milieu de portée sur l'échelle du bas divisée en mètres, et en se servant du canevas millimétrique de l'abaque pour lire les efforts tranchants cherchés, sur l'échelle à droite.

L'abaque de gauche du tableau concerne les pressions de $w \times 170^{kg}$ par m de portée provenant de la formule (53) par suite de la présence du train de surcharge; il contient les paraboles représentatives des efforts tranchants horizontaux résultant du vent; les valeurs de $w = 10, 9 \ldots . 1^{m^2}$ servant d'entrées, sont inscrites sur toutes ces paraboles à leur point le plus élevé. La lecture des efforts tranchants s'effectue sur l'échelle du haut divisée en tonnes**. Chacune des paraboles a son axe horizontal sur le bord inférieur, du tableau et son sommet au coin de gauche, qui représente l'un des appuis du pont; la plus grande ordonnée horizontale se trouve donc à l'autre appui marqué 80^m au haut de la table, et y donne la réaction d'appui provenant du vent. On se sert d'une de ces paraboles en prenant l'abscisse comptée à partir de l'appui du bas sur l'échelle de gauche divisée en mètres, et en se servant du canevas millimétrique de l'abaque pour lire les efforts tranchants cherchés, sur l'échelle du haut.

On remarquera que cette échelle est divisée de 0 à 20^t et se termine à la parabole marquée 3^{m^2} (parce que $w < 2^m50$), tandis que dans les parties inférieures de l'abaque on trouve encore les paraboles $w = 4, 5, 6 \ldots . 10^{m^2}$ tracées partiellement. Cette disposition va se trouver justifiée par les explications suivantes concernant la manière d'utiliser le tableau graphique pour des portées de pont quelconques inférieures à 80^m et même pour une pression de vent par m^2 tout à fait quelconque.

Etant donné un pont avec une portée de l mètres quelconque et les surfaces $\mathcal{W}$ et w calculées comme il a été explique (52) (53), on pourra se servir de l'abaque des lignes droites en y entrant avec $\mathcal{W}$ absolument comme nous l'avons indiqué pour la portée de 80 mètres. Par contre on devra utiliser l'abaque des paraboles relatif au train, en y entrant avec $w \times (80 : l)$ et non pas avec w comme précédemment, ainsi que cela résulte de la théorie connue des poutres reposant librement sur deux appuis***. C'est cette surélevation proportionnelle à $80 : l$, toujours nécessaire pour les valeurs d'entrée de l'abaque, qui y réclame aussi la présence des paraboles $w = 4, 6 \ldots . 10^{m^2}$ que nous avions signalées précédemment.

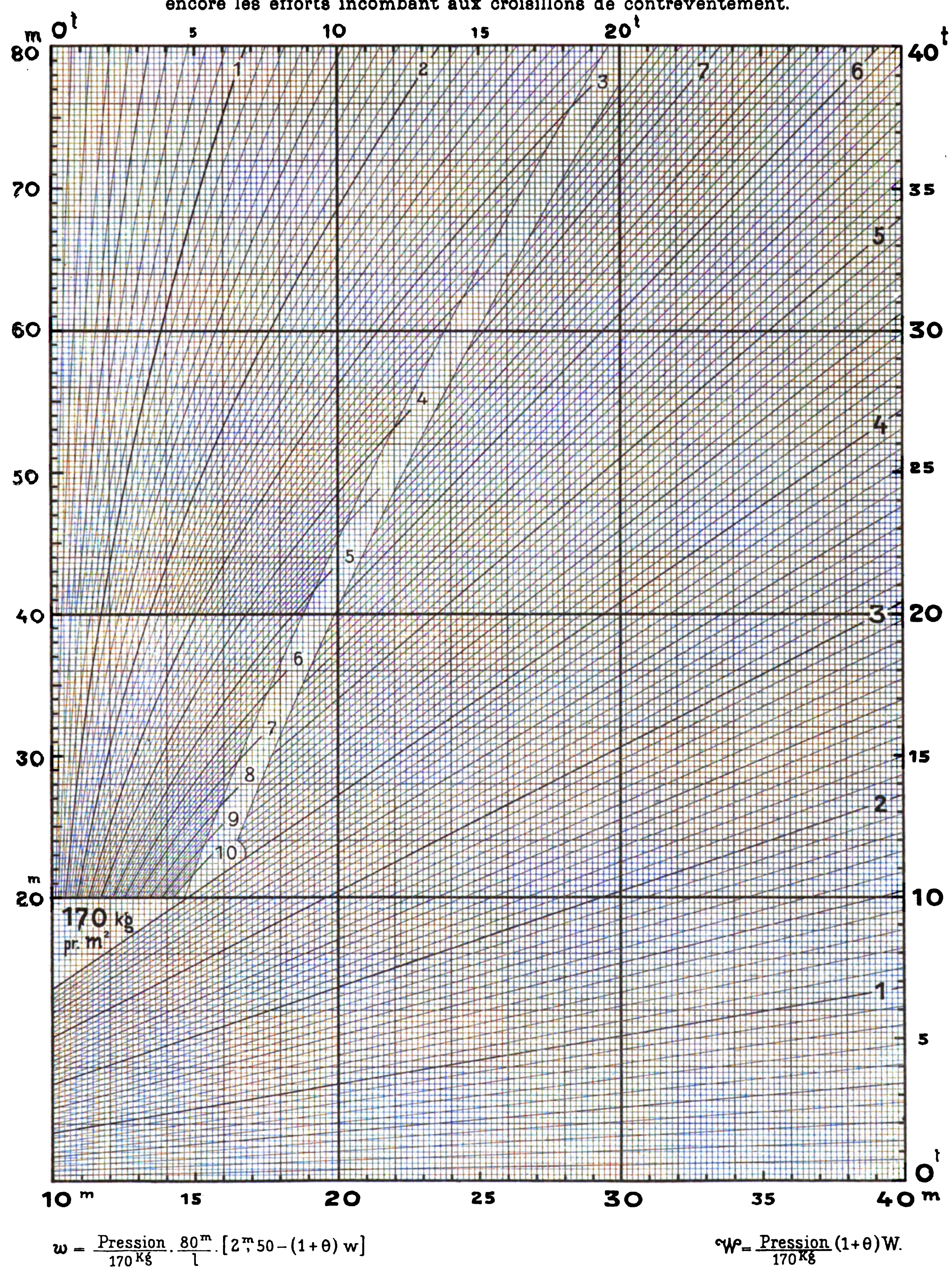
* Il ne s'agit ici que de ponts de chemins de fer. Pour les ponts-routes à construire il faudrait d'après le § 15 lit. *c* de l'ordonnance, faire le calcul de w indiqué (53) en admettant pour la charge mobile une hauteur théorique de 2^m au lieu de 2^m50.

** Cette division est identique avec celle qui se trouve sur le bord de droite du tableau concernant l'abaque les lignes droites.

*** Voir la démonstration donnés en note au N° *XVII*: 4 concernant l'action verticale d'un train et que l'on peut appliquer ici au rectangle représentatif du train et aux efforts tranchants suscités horizontalement, déduits d'une des paraboles (qui remplace le polygone funiculaire). Voir encore le polygone funiculaire au N° *XLVII*: 2.

Abaque.

Sur lequel on obtient à vue les efforts tranchants résultant des effets du vent ou bien encore les efforts incombant aux croisillons de contreventement.



$w = \frac{\text{Pression}}{170^{\text{Kg}}} \cdot \frac{80^{\text{m}}}{l} \cdot [2^{\text{m}},50 - (1+\theta)\,w]$

$\mathcal{W} = \frac{\text{Pression}}{170^{\text{Kg}}} (1+\theta)\,W.$

Etant donné maintenant un pont de portée quelconque, soumis à un vent de 270^{kg} par m^2, il suffirait de procéder comme il a été indiqué ci-dessus pour le vent de 170^{kg} par m^2, quitte à augmenter ensuite tous les résultats trouvés dans le rapport de 270 : 170. Mais il est plus simple toutes les fois qu'il s'agit d'une intensité du vent autre que celle de 170^{kg} par m^2 d'augmenter préalablement de valeur $\mathcal{W}$ (ou bien w) qui sert d'entrée, dans le rapport des intensités de vent connues, et de faire ensuite toutes les lectures directement comme nous l'avons expliqué*. C'est en prévision de cette augmentation possible de l'entrée $\mathcal{W}$ qu'on a prolongé l'abaque des lignes droites jusqu'aux droites marquées 6 et 7^{m^2}**.

Si l'on veut encore utiliser le tableau graphique pour y lire directement les efforts dirigés suivant les croisillons de contreventement, au lieu des efforts tranchants qui les provoquent, il suffira de modifier en conséquence les valeurs $\mathcal{W}$ et w qui servent d'entrée aux abaques, en tenant compte du nombre de systèmes de croisillons admis, et de l'angle que ceux-ci font avec les maîtresses-poutres***.

Enfin s'il s'agit de ponts à poutres continues on devra toujours, comme dans le cas des travées indépendantes, commencer par déterminer les surfaces $\mathcal{W}$ et w d'après les formules (52) (53) dans l'hypothèse d'une charge permanente et d'une charge mobile agissant horizontalement. On effectuera ensuite les calculs conformément à la théorie détaillée que nous exposons aux N^os^ *XLVIII* à *LVII* de cet ouvrage. Dans bien des cas d'ailleurs, on pourra déduire approximativement les efforts tranchants horizontaux provenant du vent, des mêmes efforts calculés pour les charges verticales.

3. Effets dynamiques de la charge mobile.

Au § 3 lit. *g* de l'ordonnance autrichienne il est dit:

„On aura en outre, s'il y a lieu, à tenir compte des effets dynamiques conformément aux conditions de tracé et aux vitesses admises. Pour des constructions directement exposées aux chocs provenant du matériel roulant et non atténués par un intermédiaire élastique, on fera entrer dans les calculs la charge mobile avec un surplus de 10 pour cent.“

Ces prescriptions, comme on le voit, ne contiennent que des indications; la dernière fixe seule un chiffre (10 %), elle a été rédigée en prévision des voies trop dures (rails sur longrines en fer, rails sur coussinets et traverses métalliques, poutres en doubles-rails . . . etc.). En général il n'a pas été possible de donner pour les effets dynamiques souvent fort compliqués, qui résultent de la circulation des trains, autre chose que des indications concernant surtout les grandes vitesses.

Les effets dynamiques les plus importants pour lesquels les ingénieurs autrichiens cherchent dans certains cas à évaluer un excès de travail probable sont les suivants:

1. Les oscillations latérales des constructions en courbe raide, provenant de la force centrifuge.
2. Le mouvement de lacet de la locomotive dans les alignements droits très-longs.
3. Les oscillations verticales des constructions dues surtout à la vitesse des trains.
4. Les effets de poussée produits par le serrage des freins sur les constructions, surtout dans le cas d'un changement brusque de pente.

Nous rappellerons à ce sujet qu'en Autriche la plus grande vitesse autorisée sur les chemins de fer d'intérêt général a été limitée à 80^{km} à l'heure pour les trains

---

* Dans le cas de très-grandes portées où l'hypothèse du pont non chargé exposé à un vent de 270^{kg} doit servir à calculer le contreventement, nous recommandons de supposer cette pression composée d'une charge horizontale permanente de 100^{kg} par m^2 et d'une charge horizontale mobile de 170^{kg} par m^2, toutes deux appliquées à $\mathcal{W}$. Cette hypothèse donne une bonne distribution du contreventement vers le milieu.

** En désignant par H la hauteur moyenne du contour enveloppe de la construction, et par θ_0 le rapport de la surface des ouvertures des mailles à la surface totale du contour enveloppe, on a:

(54) . . . . . $W = H\,(1 - \theta_0)$ $\qquad \mathcal{W} = W\,(1 + \theta) = H\,(1 - \theta_0)\,(1 + \theta)$

D'après cela pour $\theta_0 = 0{\cdot}4,\ 0{\cdot}6,\ 0{\cdot}8$ et par suite $\theta = 0{\cdot}2,\ 0{\cdot}4,\ 1{\cdot}0$ on aurait: $\mathcal{W} : H = 0{\cdot}72,\ 0{\cdot}56,\ 0{\cdot}40$ et d'ordinaire $\mathcal{W} < 6^m$.

*** Pour un pont de 80^m de portée avec deux systèmes de croisillons de contreventement inclinés à 45° sur les maîtresses-poutres, les valeurs servant d'entrée aux abaques seraient $\mathcal{W} : (2 \sin 45^\circ)$ et $w : (2 \sin 45^\circ)$. — Pour un pont de 40^m de portée et un contreventement analogue, les valeurs d'entrée seraient $\mathcal{W} : (2 \sin 45^\circ)$ et $w : \sin 45^\circ$.

de voyageurs et à 40^{km} à l'heure pour les trains de marchandises*. Pour les lignes d'intérêt local, les actes de concession fixent généralement comme limite supérieure, une vitesse de 20 à 25^{km} à l'heure. Pour les tournées d'épreuve seules, il n'y a pas de limite de vitesse fixée, mais on peut admettre avec toute sécurité que cette vitesse n'excède généralement pas 90^{km} à l'heure en Autriche.

En ce qui concerne les conditions de tracé des chemins de fer, nous rappellerons qu'en Autriche la plupart des lignes d'intérêt général ont été concédées** avec courbes de 250^{m} de rayon au moins et des pentes de 25‰ au plus, tandis que pour les lignes d'intérêt local le rayon minimum est généralement 150^{m} (exceptionellement 120 et 100^{m}).

Il est clair toutefois que dans tous les réseaux en exploitation, les plus grandes vitesses ne peuvent être admises que sur des lignes à tracé favorable; on pourra affirmer par exemple que la vitesse maxima de 80^{km} à l'heure, exige pour pouvoir se développer, un tracé avec courbes d'au moins 300^{m} de rayon, que par suite dans des courbes de 250, 200, 150^{m} . . . . de rayon, les plus grandes vitesses possibles seront moins élevées. Nous avons tenu compte de ces considérations dans les recherches qui suivent, à savoir:

ad 1. Les oscillations latérales d'une construction en courbe raide, par suite de la force centrifuge constituent en réalité un phénomène dynamique fort compliqué. Supposons d'abord que la construction non chargée, par l'effet d'un coup de vent ou de toute autre action de courte durée, éprouve une flexion horizontale. Il en résultera, en vertu des lois de l'élasticité, une série d'oscillations horizontales autour de la position d'équilibre et un travail supplémentaire dépendant de leur amplitude.

Un effet dynamique analogue, mais moins simple, se produira encore si l'on suppose que la force qui a produit la première flexion contenue à agir sur le premier point d'application, ou même sur un point d'application mobile le long du pont. Les oscillations, bien plus compliquées dans ce cas, se produisent de part et d'autre d'une position moyenne de la construction déjà fléchie; c'est cette position qui doit intéresser principalement l'ingénieur, car la pratique des épreuves de ponts par charge roulante a depuis longtemps démontré que les mouvements oscillatoires proprement dits ont bien moins d'importance que la flexion latérale elle-même, que l'on voit subsister pendant toute la durée du passage d'un train.

Ces considérations ont amené les ingénieurs à résoudre ce problème, en apparence très-compliqué, d'une façon aussi simple que pratique. Supposons qu'un train de longueur infinie pesant p par mètre courant circule sur le pont avec une vitesse constante de v mètres par seconde, et le maintienne par suite de l'action de la force centrifuge résultant de la voie courbe, dans une flexion constante c. a. d. dans un véritable équilibre dynamique (sans oscillations),

On trouve alors en désignant par g l'accébration de la pesanteur et ρ le rayon de la courbe:

(55)

Rayon en mètres ρ	Vitesse en kilomètres à l'heure	Vitesse en mètres par seconde v	Hauteur due en mètres $\frac{v^2}{2g}$	Force centrifuge pour $p = 1$ $\frac{v^2}{2g} \times \frac{2}{\rho}$	Observations
m	km	m	m		
325	90	25·00	31·86	0·1961	Epreuves des locomotives
300	80	22·22	25·17	0·1678	Trains rapides et à voyageurs
250	60	16·67	14·16	0·1132	Trains rapides et à voyageurs
200	40	11·11	6·29	0·0629	Trains de marchandises
150	20	5·56	1·57	0·0210	Trains de lignes d'intérêt local

* Voir les „Grundzüge für den Verkehrsdienst. 18 Oct. 1876. Art. 20. p. 24.“ rendus obligatoires par l'ordonnance du Ministère I. R. du commerce en date du 18 Oct. 1876, N° 30084.

En France il n'existe aucune limite fixée de vitesse; sur les grands réseaux les trains rapides atteignent des vitesses dépassant 100^{km} à l'heure.

** Exceptionellement on a admis des pentes plus fortes allant jusqu'à 31·4‰ pour la ligne de l'Arlberg et même jusqu'à 37·2‰ pour la ligne de Klostergrab à Moldau.

En France le cahier des charges de chaque concession fixe les limites des rayons et des déclivités. Les rayons ne descendent guère au-dessous de 300^{m} et les déclivités ne dépassent 15^{mm} par mètre que dans les lignes de montagnes. Parmi ces dernières on peut citer: le rayon minimum de 250^{m} sur la ligne de Clermont à Tulle, la déclivité maximum de 33‰ sur les lignes, d'Orb à Tournemire, de Millau à St. Chély, de Montréjan à Tarbes, celle de 30‰ sur les lignes d'Aurillac à Murat, de Chambéry à Modane, de Firminy à Annonay.

Pour les lignes d'intérêt local il n'y a en France pas de règles spéciales.

où nous supposons pour simplifier que les forces centrifuges développées le long du pont soient parallèles et que la voie courbe affecte même après la déformation, exactement la forme circulaire.

La force centrifuge à admettre par *m* courant varie d'après cela de $0{\cdot}20 \times p$ à $0{\cdot}02 \times p$, où l'on doit évidemment admettre pour p la charge uniforme par mètre équivalente au train quant aux moments. Cette charge toutefois ne pourra que bien rarement être regardée comme égale à celle de l'échelle a prescrite au § 3 de l'ordonnance, car les trains à grande vitesse qu'il y a lieu de considérer pour les effets dynamiques sont presque toujours beaucoup moins lourds (surchargeants) que les trains de marchandises d'après lesquels on a dû établir les échelles de surcharge prescrites.

ad 2. Le mouvement de lacet de la locomotive, qui se produit dans les alignements droits, imprime à la voie des chocs horizontaux assez violents; il a déjà beaucoup occupé les ingénieurs, mais on n'est pas parvenu jusqu'ici à traduire l'effet de ces chocs en chiffres susceptibles d'être introduits dans les calculs de résistance. D'après les uns ce serait 1 : 10 du poids de la locomotive qu'il suffirait d'admettre dans tous les cas, d'après d'autres ce serait une fonction de la course des pistons, de l'écartement des cylindres, de la vitesse . . . etc. qu'il s'agirait d'établir. Des expériences directes faites en Allemagne sur les rails en service, n'ont pas conduit à des résultats bien concluants et l'on peut seulement affirmer avec sécurité que le mouvement de lacet se développe pour de très-grandes vitesses sur les alignements droits et qu'il disparaît si on ralentit suffisament vitesse, ou si le train entre en courbe, en sorte que cet effet dynamique ne vient jamais s'ajouter à ceux de la force centrifuge.

Nous nous conformerons à l'usage établi parmi les ingénieurs des ponts métalliques, et nous représenterons les effets du mouvement de lacet par une force unique appliquée horizontalement en tête du train, en admettant pour cette force 5, 4 ou 3 tonnes, pour les trois classes de lignes assujétties à 100%, 80% ou 60% des échelles de surcharge prescrites, en supposant toutefois que le mouvement de lacet ne se développe que pour des vitesses d'au moins 40^{km} à l'heure*.

ad 3. Les oscillations verticales des constructions métalliques sous le passage des trains rapides constituent un effet dynamique qui a une grande analogie avec ceux que nous avons déjà mentionnés ad 1. pour la force centrifuge; la construction qui forme le corps élastique oscillant se trouve toutefois placée ici dans des conditions encore plus compliquées, puisqu'elle se trouve soumise simultanément à une charge permanente et à une charge mobile, et on est porté à en conclure à priori que ces oscillations ont une action très-dangereuse.

Dès l'époque de la construction du „Britanniabridge" les ingénieurs des ponts métalliques, ont cru devoir faire sur cette intéressante question les études théoriques et expérimentales les plus complètes**. Ces recherches faites successivement par Stokes, Phillips, Fairbairn . . . . etc. furent reprises en 1859 par Bresse et soumises à une étude théorique*** approfondie qui permit à ce savant calculateur d'introduire dans l'analyse de M. Phillips quelques perfectionnements réclamés par les progrès de la science; il compléta ces recherches par une étude du cas spécial d'un train indéfini à vitesse constante, que nous avons déjà cité comme exemple d'équilibre dynamique à propos de la force centrifuge. Nous ne pouvons naturellement citer ici que les principaux résultats théoriques de ces interessants travaux. Désignons par:

. (56)

l . . . . la portée du pont,	g . . . . l'accélération de la pesanteur,
q . . . . la charge permanente par mètre,	v . . . . la vitesse du train en mètres,
J . . . . le moment d'inertie de la section,	U^2 . . . la valeur auxiliaire $U^2 = \frac{Pl}{EJ} \cdot \frac{v^2}{2g}$
E . . . . le coefficient d'elasticité du fer,	

* En France on ne tient généralement pas compte des effets du mouvement de lacet, dans le calcul des ponts métalliques.

** Voir sur les expériences et recherches faites en Angleterre dès 1847:

1. Stokes: Transactions of the Cambridge philosophical Society 1849 dont on trouve une analyse dans les ann. des P. et Ch. de 1851.

2. Phillips: Ann. des mines, tome VII. 1855, puis: comptes rendus de l'académie des sciences 3 déc. 1866, sur les rapports de similitude à observer en faisant des expériences à petite échelle.

3. G. H. Love: Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte (Paris 1852, p. 75) une critique des expériences anglaises.

4. Fairbairn: Civil engin. and archit. Journal 1860. Expériences sur la répétition des efforts.

*** L. Bresse. Cours de mécanique appliquée professé à l'Ecole des P. et Ch. Paris 1859. Pages 353—361. Les calculs et formules de cet ouvrage ne suffisent pas pour le lecteur, que l'auteur renvoie en certains points aux calculs de M. Phillips. — Dans les Annales des P. et Ch. (Mars 1883). M. Résal ing. des P. et Ch. étudie encore les effets des charges roulantes sur les ponts métalliques; nous considérons les déductions aux quelles il arrive comme exagérées.

Supposons d'abord le poids de tout le train de surcharge concentré dans une charge P unique, ce qui constitue une hypothèse défavorable extrême.

On trouve* alors pour le plus grand moment de flexion produit par le train et la charge permanente sur le pont considéré dans ces conditions:

(57) . $\left\{\begin{array}{l}\text{sur le milieu de la portée d'une construc-}\\ \text{tion reposant librement sur deux appuis}\end{array}\right\}$ $\mathcal{M}_{max} = \frac{ql^2}{8}\left(1 + \frac{1}{2}U^2\right) + \frac{Pl}{4}\left(1 + \frac{2}{3}U^2\right)$

(58) . $\left\{\begin{array}{l}\text{sur un appui d'une construction}\\ \text{encastrée à ses deux extrémités}\end{array}\right\}$ . . . $\mathcal{M}_{max} = \frac{ql^2}{12}\left(1 + \frac{1}{8}U^2\right) + \frac{Pl}{8}\left(1 + \frac{1}{4}U^2\right)$

Ces formules, qui ne sont approximativement exactes que pour des valeurs très-petites de U, sont identiques pour $U = o$ ou $v = o$ aux formules statiques connues. La deuxième formule, quoique ne concernant aucune des construction qui se présentent en pratique, met cependant en évidence les conditions de résistance excellentes des ponts à poutres continues comparativement aux ponts à travées indépendantes, en ce qui concerne les effets dynamiques que nous venons de mentionner.

Considérons maintenant le cas d'équilibre dynamique, étudié par Bresse, où un train de longueur indéfinie, d'un poids uniforme p par mètre, passe avec la vitesse v sur un pont à travée indépendante et maintient sur la construction fléchie (sans oscillations) une certaine flèche f en permanence. Nous remarquons à ce sujet que la flexion permanente se trouve produite non seulement par les charges verticales permanente et mobile, mais encore par la force centrifuge qui résulte de la flexion elle-même et qui dépend de la vitesse. En traitant le problème à ce point de vue, on trouve pour le plus grand moment de flexion provoqué au milieu de la portée:

(59) . . . . . . $\mathcal{M}_{max} = \frac{l^2}{8}(p + q)\left[1 + 16 \cdot \frac{p}{p+q} \cdot \frac{f}{l^2} \cdot \frac{v^2}{2g}\right]$

Cette formule, qui pour $v = o$ ou $f = o$, se confond avec la formule statique usuelle, contient un deuxième facteur entre parenthèses, supérieur à l'unité qui représente l'augmentation résultant de la vitesse ou de la flèche. Les deux variables v et f ne sont en pratique pas absolument dépendantes l'une de l'autre, car on peut, comme cela se fait pour certains ponts en fonte ou en bois, donner à la voie ou à la construction elle-même, un certain bombement, de façon à empêcher la formation d'une flèche quelconque, pratiquement parlant. Dans le cas idéal où l'on suppose la flèche f produite par les charges p et q et la vitesse**, Bresse l'exprime en fonction des variables p, q, v en intégrant l'équation différentielle qui résulte de l'équilibre dynamique considéré. La substitution de la valeur ainsi trouvée pour f dans l'équation (59) conduit à la formule très-simple:

(60) . . $\mathcal{M}_{max} = \frac{l^2}{8}(p + q)\left[\frac{1}{\cos U'} - 1\right]\frac{2}{U'^2}$, avec $U'^2 = \frac{l^2 p}{2EJ} \cdot \frac{v^2}{2g}$

Cette formule qui ne met malheureusement pas suffisamment en évidence l'augmentation du moment due à la vitesse, a conduit Bresse et d'après lui d'autres ingénieurs à des déductions exagérées sur l'action dynamique qu'il s'agit d'étudier***. Remarquons à cet effet que U' n'est autre chose que la valeur auxiliaire U que nous avons déjà considérée précédemment (56), pourvu que l'on prenne de part et d'autre $P = {}^1/_2\, pl$ comme l'exige la théorie des charges concentrées ou uniformément réparties équivalentes au train de surcharge dans les deux cas. Nous ferons voir ci-après que U ou U' est toujours très-petit ce qui autorise l'emploi de la transformation:

(61) . . . . . . $\frac{1}{\cos U} = 1 + \frac{1}{2}U^2 + \frac{5}{24}U^4 + \frac{61}{721}U^6 + \ldots$

et la formule (60) du moment maximum devient alors en négligeant les termes de degré supérieur:

(62) . . . . $\mathcal{M}_{max} = \frac{l^2}{8}(p + q)\left[1 + \frac{5}{12}U^2\right]$

* La valeur auxiliaire U^2 introduite ici pour simplifier les formules, nous servira plus loin pour comparer les effets trouvés.

** Le cas ne se présente jamais dans la pratique des constructions métalliques, où la voie est posée horizontalement après l'achèvement du montage, de façon à annuller au moins la flèche résultant de la charge permanente q, ou bien il ne se présente que plus tard par suite de déformations permanentes.

*** Bresse admet $U = \frac{\pi}{4} = 0{\cdot}7854$, $U^2 = 0{\cdot}6168$ mais nous faisons voir que U^2 n'atteint pas $0{\cdot}1$; on pourra donc dans la série (61) négliger les termes de degré supérieur.

En comparant cette valeur obtenue pour l'équilibre dynamique avec celles (57) (58) que nous avons trouvées pour les oscillations sous une chargé concentrée mobile, on trouvera que les effets additionnels produits dans les deux cas sont à peu près dans le rapport $\frac{2}{3} : \frac{5}{12}$ ou $8:5$. On se rendra compte de l'importance relative que peuvent atteindre en réalité tous ces effets (57) (58) (62) signalés par la théorie, en étudiant les valeurs que peut prendre U^2 dans les ponts convenablements construits. Nous avons fait ce calcul en supposant le cas extrême d'une vitesse de 90^{km} à l'heure ou d'une hauteur due $v^2 : 2g = 32^m = 3200^{cm}$ et appliquant les formules aux ponts de portées diverses construits d'après l'ordonnance autrichienne sur les lignes d'intérêt général. On trouve ainsi en prenant $E = 2{,}000.000^{kg}$ par cm^2 et en acceptant les charges mobiles de l'échelle **a** de l'ordonnance:

(63)

Fonctions calculées	$l = 10m$	$l = 20m$	$l = 30m$	$l = 40m$
Charge mobile par mètre de voie (scala a) . .	8500 kg	6500 kg	6050 kg	5600 kg
Charge concentrée P équivalente au milieu . .	42500 kg	65000 kg	90770 kg	112000 kg
Moment de flexion au milieu (voir Tab. du IIe volume) { charge mobile . .	106250 kgm	325000 kgm	680625 kgm	1120000 kgm
{ charge permanente	16256	83850	224605	454720
Moment de flexion total	122506	408850	905230	1574720
Travail admissible du fer (Tab. I)	720 kgcm	740 kgcm	760 kgcm	780 kgcm
Hauteur de la construction ($^1/_{10}$ l)	100 cm	200 cm	300 cm	400 cm
Moment d'inertie J de la section, nécessaire .	850737 cm	5525000 cm	17866383 cm	40377436 cm
Valeur de ..... $\frac{Pl}{E}$	21·25 kgcm	65·00 kgcm	136·15 kgcm	224·00 kgcm
Valeur de ..... $\frac{Pl}{E} \cdot \frac{v^2}{2g}$	68000 kgcm	208000 kgcm	435680 kgcm	716800 kgcm
Valeur cherchée $U^2 = \frac{Pl}{EJ} \cdot \frac{v^2}{2g}$	0·07993	0·03765	0·02439	0·01775

Ces calculs font voir que malgré l'hypothèse extrême d'une vitesse de 90^{km} à l'heure et de charges exagérées, qui ne seraient tout au plus admissibles que pour les trains de marchandises les plus lourds, la fonction auxiliaire U^2 ne prend des valeurs notables que pour les petites portées, et ces valeurs ne conduisent même pour les ponts de 10^m et dans le cas le plus défavorable de la formule (57), qu'à des effets additionnels ne dépassant pas 5%.

En résumant les résultats de ces études, nous arrivons à conclure en toute sécurité que, pour les ponts actuellement construits, les oscillations verticales provenant de la vitesse des trains, et que l'on avait tant redoutées, n'ont en réalité aucune importance pratique*, et peuvent être rangées parmi tous ces effets qu'on ne peut généralement faire entrer dans les calculs et pour lesquels l'ordonnance autrichienne a prévu au § 4 l'échelle croissante du travail admissible dans le fer, suivant la portée.

ad 4. Le serrage des freins produit sur les constructions métalliques des effets de poussée qui peuvent souvent devenir assez considérables.

Considérons par exemple le cas défavorable d'un pont de 30 à 40^m de portée sur lequel un train attelé de deux locomotives-Arlberg pesant ensemble 192^t avec leurs tenders, doit s'arrêter, et supposons que par l'action simultanée de la contre-vapeur et du serrage des freins on arrive à faire patiner les 14 paires de roues, il en résultera une poussée appliquée au pont dans le sens du mouvement et comprise entre 0·1 et 0·2 de la charge, soit $0{\cdot}15 \times 192 = 28^t2$ en moyenne. Cette force suffira dans le cas d'une voie en dessus reposant directement sur les bandes supérieures, pour provoquer dans ces dernières un supplement de travail; elle pourra aussi modifier les efforts prévus dans les croisillons et, dans le cas où la voie repose sur un système de poutres transversales et de longerons, influer sensiblement sur ces dernières pièces.

* Les résultats que l'on observe lors des surcharges d'épreuve, par charge morte et charge roulante, et qui restent toujours très-peu différents dans les deux cas, confirment encore pratiquement cette conclusion.

Tous ces effets sont du reste atténués par la résistance au frottement des rails sur leurs appuis, par l'élasticité des traverses ou longrines en bois des voies usuelles . . . etc.

Une complication très-défavorable toutefois résulte de la présence d'un changement de pente sur le pont ou aux abords et l'on ne saurait trop recommander de maintenir le profil en long en pente constante au-dessus des ponts et même jusqu'à 15 ou 20^m au-delà des culées.

XXIX. Prescriptions de surcharge pour les ponts par-dessus les chemins de fer, et les ponts de routes-d'accès (§ 15 de l'ordonnance autrichienne).

1. Généralités sur les trois classes de surcharge.

En rangeant les ponts-routes à construire en trois classes de surcharge on a eu spécialement en vue les conditions dans lesquelles se trouvent les routes en Autriche. Les charrettes-type de la première classe pesant 12^t, concernent les routes nationales (ärarische Strassen) et les routes départementales (Landesstrassen) le plus fatiguées*. Les charrettes-type de la deuxième classe pesant 6^t peuvent être regardées comme suffisamment lourdes pour couvrir les effets de surcharge incombant à la grande majorité des ponts à construire par-dessus les chemins de fer. Sur la plupart des chemins vicinaux ruraux ou particuliers toutefois, il serait impossible de faire circuler des véhicules aussi lourds, qui exigent la présence d'une chaussée bien entretenue; les charrettes-type de troisième classe pesant 3^t seulement, représentent en pareil cas une limite convenable.

Les charrettes-type des trois classes pesant** 12, 6 et 3^t, avec les dimensions indiquées au § 15 de l'ordonnance, représentent comme nous le verrons, les prescriptions les plus importantes dont on ait à tenir compte dans les calculs de résistance, car en raison de l'ouverture relativement faible de la grande majorité des passages supérieurs, la deuxième hypothèse de surcharge (§ 15 lit. *b*, charge de piétons), ne donnera que rarement des résultats plus forts que la première, sauf pour les ponts de la troisième classe de surcharge et les maîtresses-poutres de grande portée. Remarquons encore qu'en limitant pour les trois classes les largeurs de caisse à 2^m50, 2^m40 et 2^m30 ainsi que les largeurs de voie à 1^m60, 1^m50 et 1^m40, on a tenu compte de la réduction des pièces de construction et en particulier des bandages de roue.

En ce qui concerne les charges uniformément réparties admises dans les trois classes pour rassemblement de piétons, qui sont fixées à 460, 400 et 340^{kg} par m^2, et entrent seules en ligne de compte pour l'hypothèse lit. *b*, il importe d'observer que la charge de 460^{kg} par m^2 ne peut être obtenue qu'à l'aide d'un rassemblement tellement compacte que les hommes n'y peuvent plus remuer***.

En préparant l'ordonnance autrichienne on a eu à se demander s'il y avait lieu de prescrire dans les trois classes de surcharge sans distinction, la charge maxima toujours possible, ou s'il n'était pas préférable de tenir compte de la probabilité, atténuée pour ainsi dire suivant la classe, qu'un pareil rassemblement de 460^{kg} par m^2 puisse jamais se produire.

Le choix de la seconde solution a été déterminé notamment par cette considération que le rassemblement de 460^{kg} par m^2 constitue pour un pont en rase campagne de 3me classe p. e. un évènement encore plus rare et plus improbable que la présence d'un vent d'orage de 170 ou 270^{kg} par m^2, pour lequel l'ordonnance fixe au § 4 lit. *e* une limite de travail du fer, tolérée jusqu'à 1000^{kg} par cm^2. Si l'on voulait en pareil cas estimer l'augmentation de travail du fer, qui pourrait résulter de la présence d'une charge de 460^{kg} par m^2, on trouverait que dans les petits ponts ce travail ne surpasse guère $750 \times 460 : 340 = 1014^{kg}$ par cm^2. Les ponts de grande portée ne seront pas rangés dans la 3me classe de surcharge †, et dans chaque cas particulier il appartient aux autorités compétentes de fixer la classe qui convient ††.

---

* Dans la ville de Vienne et la banlieue, ce sont des charrettes à houille pesant 14^t que l'on prend en considération, mais les recherches faites à ce sujet en 1885 ont fait voir qu'il n'existe pas de pareils véhicules en service qui, en charge complète, pèsent plus de 12^t.

** Les charges de 12, 6 et 3^t adoptées depuis aussi dans d'autres contrées, sont comprises en Autriche, comme étant également réparties sur 4 roues. En France la circulaire ministérielle du 9 Juillet 1877 a fixe à 11^t pour les charrettes à 2 roues et à 16^t pour les charrettes à 4 roues les poids les plus lourds à faire entrer dans les calculs; elle a autorisé dans les localités où ces charges paraitraient exagérées, leur réduction à 6^t et 8^t.

*** D'après cela la charge de 560^{kg} par m^2 que l'on trouve souvent fixée pour trottoirs sur consoles (Allemagne) est une charge fictive, destinée à établir pour les consoles un surcroît de sécurité, que l'on peut aussi bien déduire d'autres considérations.

† Pour les grands ponts de 3me classe le travail ne pourrait dépasser 1220^{kg} par cm^2, mais on peut affirmer que jamais la charge de 460^{kg} par m^2 ne viendra couvrir tout le tablier d'un pareil pont.

†† Pour les trottoirs de ponts ou passerelles à construire sur le plan des stations, on devra admettre une charge de 460^{kg} par m^2.

Barêmes des charges pour une voie charretière.

Première Classe.

Chevaux Chevaux Charrette Chevaux Chevaux Charrette

07·5 0·75 0·75 0·75 0·75 0·75 0·75 0·75 0·75

(64) 6 1·5 1·5 6 6 1·5 1·5 6 6

× 2·9 × 1·8 × 1·8 × 1·8 × 2·9 × 3·8 × 2·9 × 1·8 × 1·8 × 1·8 × 2·9 × 3·8 × 2·9 ×

15·0 12·1 10·3 8·5 6·7 3·8 0 2·9 4·7 6·5 8·3 11·2 15·0 17·9

l_n	a_n	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p	Observations
m	m	t	t	tm	tm	t	
0·0	0·0	6·00	6·00	0·000	0·000	∞	
5·8	2·9	0·75	6·75	2·175	2·175	2·069	
7·6	3·8	6·00	12·75	22·800	24·975	1·628	L'hypothèse *a* convient exclusivement pour les portées ci-contre
9·4	4·7	0·75	13·50	3·525	28·500	1·580	
13·0	6·5	0·75	14·25	4·875	33·375	1·402	
13·4	6·7	0·75	15·00	5·025	38·400	1·383	
16·6	8·3	0·75	15·75	6·225	44·625	1·249	
17·0	8·5	0·75	16·50	6·375	51·000	1·235	
20·6	10·3	0·75	17·25	7·725	58·725	1·121	Pour $p = 1{\cdot}150\,t$ $l = 19{\cdot}68\,m$
22·4	11·2	6·00	23·25	67·200	125·925	1·072	
24·2	12·1	0·75	24·00	9·075	135·000	1·061	L'hypothèse *b* ne conviendrait jamais dans le cas invraisemblable de ponts avec moins de 1 m 09 d'écartement entre les maîtresses-poutres
30·0	15·0	12·00	36·00	180·000	315·000	1·000	
35·8	17·9	0·75	36·75	13·425	328·425	1·028	
37·6	18·8	6·00	42·75	112·800	441·225	1·026	
39·4	19·7	0·75	43·50	14·775	456·000	1·033	
43·0	21·5	0·75	44·25	16·125	472·125	1·037	
43·4	21·7	0·75	45·00	16·275	488·400	1·037	

Deuxième Classe.

Charrette Chevaux Charrette Chevaux Charrette Chevaux

0·75 0·75 0·75 0·75 0·75 0·75 0·75

(65) 3 3 1·5 3 3 1·5 3 3 1·5

× 2·2 × 2·8 × 2·2 × 1·8 × 2·2 × 2·8 × 2·2 × 1·8 × 2·2 × 2·8 × 2·2 × 1·8 ×

14·0 11·8 9·0 6·8 5·0 2·8 0 2·2 4·0 6·2 9·0 11·2 13·0

l_n	a_n	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p	Observations
m	m	t	t	tm	tm	t	
0·0	0·0	3·00	3·00	0·00	0·00	∞	
4·4	2·2	0·75	3·75	1·65	1·65	1·364	L'hypothèse *a* convient exclusivement pour les portées ci-contre
5·6	2·8	3·00	6·75	8·40	10·05	1·129	
8·0	4·0	0·75	7·50	3·00	13·05	1·059	
10·0	5·0	0·75	8·25	3·75	16·80	0·978	Pour $p = 0{\cdot}960\,t$ $l = 10{\cdot}39\,m$
12·4	6·2	3·00	11·25	18·60	35·40	0·894	L'hypothèse *b* ne conviendrait jamais pour moins de 1 m 04 d'écartement entre les deux maîtresses-poutres
13·6	6·8	0·75	12·00	5·10	40·50	0·889	
18·0	9·0	6·00	18·00	54·00	94·50	0·833	
22·4	11·2	0·75	18·75	8·40	102·90	0·854	

Troisième Classe.

Charrette Chevaux Charrette Chevaux Charrette Chevaux

0·5 0·5 0·5 0·5 0·5 0·5 0·5

(66) 1·5 1·5 1·0 1·5 1·5 1·0 1·5 1·5 1·0

× 2·0 × 2·4 × 2·0 × 1·6 × 2·0 × 2·4 × 2·0 × 1·6 × 2·0 × 2·4 × 2·0 × 1·6 ×

12·4 10·4 8·0 6·0 4·4 2·4 0 2·0 3·6 5·6 8·0 10·0 11·6

l_n	a_n	P_n	ΣP_n	$a_n P_n$	$\Sigma a_n P_n$	p	Observations
m	m	t	t	tm	tm	t	
0·0	0·0	1·5	1·5	0·00	0·00	∞	Pour $p = 0{\cdot}782\,t$ $l = 3{\cdot}84\,m$
4·0	2·0	0·5	2·0	1·00	1·00	0·750	
4·8	2·4	1·5	3·5	3·60	4·60	0·660	L'hypothèse *b* resterait encore exclue pour moins de 0 m 78 d'écartement entre les maîtresses-poutres
7·2	3·6	0·5	4·0	1·80	6·40	0·617	
8·8	4·4	0·5	4·5	2·20	8·60	0·578	
11·2	5·6	1·5	6·0	8·40	17·00	0·529	
12·0	6·0	0·5	6·5	3·00	20·00	0·531	

2. Choix des hypothèses *a* et *b* de surcharge.

Il est possible de donner quelques règles pratiques sur la manière de choisir celle des deux hypothèses de surcharge *a* et *b* qui donne les effets les plus défavorables, de façon qu'il ne reste plus doute à ce sujet que dans des cas rares.

Remarquons d'abord que, pour le calcul des menues pièces du tablier de voie, des poutres transversales et des longerons, c'est généralement l'hypothèse *a* qui prime. Il ne ne pourra y avoir d'exception que pour les ponts de la 3me classe si les longerons ont plus de 2m de portée en nombre rond*.

Le problème, en apparence compliqué, du choix à faire entre les hypothèses *a* et *b* quant aux maîtresses-poutres, se simplifie notablement pour le cas spécial d'un pont à une seule voie charretière n'ayant que deux maîtresses-poutres et muni de trottoirs un peu surélevés ou de rails garde-voie spéciaux, obligeant les véhicules à rester à égale distance de ces pourtres qui supportent alors chacune la moitié des charges. La comparaison à faire dans ce cas fort simple, peut être étudiée au moyen des procédés de calcul (12) (31) (50) que nous avons employés pour les ponts de chemins de fer. On détermine pour toutes les portées les charges *p* par *m* courant de voie, qui sont équivalentes à un train de véhicules conformes aux prescriptions des trois classes de l'ordonnance quant aux moments de flexion, et on compare ensuite les charges *p* trouvées aux charges uniformes par *m* courant de voie résultant des charges de piétons fixées pour les trois classes et appliquées aux largeurs de caisse:

$$460 \times 2{\cdot}5 = 1150^{kg} \qquad 400 \times 2{\cdot}4 = 960^{kg} \qquad 340 \times 2{\cdot}4 = 782^{kg}$$

Le tableau (page 89) qui contient les barêmes des charges pour les trois classes de surcharge, met en évidence les principaux résultats de cette comparaison.

Ces calculs font voir que, pour des portées ne dépassant pas 19m68 pour la 1re classe, 10m39 pour la 2me classe et 3m84 pour la 3me classe, c'est l'hypothèse *a* qui sera toujours la plus défavorable**. Pour toute autre disposition des maîtresses-poutres et de la voie que celle du cas spécial examiné et à portée égale, l'hypothèse *a* restera la plus désavantageuse, si elle l'est dans le cas spécial, car une maîtresse-poutre ne peut jamais être considérée comme supportant moins que la moitié de la charge qui d'après le barême représente les charrettes, tandis que dans le cas d'écartement faible elle supportera moins de la moitié des charges de piétons (1150kg, 960kg ou 782kg par *m*) que l'on met en comparaison.

Il y a doute dès que la portée atteint une des limites (19·68, 10·39 ou 3·84) indiquées, parceque beaucoup de constructeurs aiment mieux employer un plus grand nombre de maîtresses-poutres portant immédiatement le tablier de voie, que de recourir aux poutres transversales et aux longerons, et parce que souvent les largeurs de chaussée adoptées surpassent d'une quantité notable les multiples des largeurs de caisse prescrites (2·5, 2·4, 2·3) . . . . Dans ces divers cas, ainsi que dans le cas très-fréquent d'un système de poutres transversales et de longerons portant plusieurs voies charretières et reposant sur deux maîtresses-poutres seulement, on pourra estimer la charge uniforme équivalente aux trains de véhicules, en se servant toujours encore des charges de notre barême, mais en y appliquant un certain coefficient de réduction pour tenir compte de la répartition des charges dans le sens transversal. On comparera ensuite les charges ainsi obtenues, avec les charges de piétons par *m* courant convenablement réduites (à l'aide d'un autre coefficient).

On remarquera que les hypothèses spéciales que nous avons faites pour établir notre barême des charges peuvent, sans préjudice des résultats obtenus, être remplacées par d'autres hypothèses équivalentes, concernant spécialement les constructions dépourvues de poutres transversales et de longerons, et où l'on admet que l'écartement des maîtresses-poutres soit 1m25 dans la 1re classe, 1m20 dans la 2me classe et 1m15 dans la 3me classe***. En considérant le barême des charges à ce point de vue, on reconnaîtra que toute réduction ultérieure de l'écartement des maîtresses-poutres est favorable au choix de l'hypothèse *a* en sorte que, conformément aux obser-

* On trouve d'après le barême de la charge mobile par voie charretière, que l'hypothèse *b* peut être applicable à partir de 3m84 de portée pour les maîtresses-poutres. Ceci correspond à un écartement moyen de 1m92 pour les poutres transversales d'après la relation expliquée au No *XXVII*: 1.

** Ces portées limites s'obtiennent à l'aide de l'équation établie pour les ponts de chemins de fer.

(67) . . . . $p = \frac{\Sigma P_n}{a} - \frac{\Sigma a_n P_n}{a^2}$ avec $l = 2a$ d'où l'on tire l'inconnue *a*.

*** Ecartements égaux aux demi-largeurs de caisse prescrites (2·5, 2·4, 2·3) et pour lesquels une maîtresse-poutre est soumise à la surcharge maxima d'une file de roues et de pieds de chevaux c. a. d. encore à la demi-charge mobile incombant à une voie charretière.

vations inscrites au barême, pour des ponts où l'écartement des maîtresses-poutres comporterait moins de $1^{m}09$ en 1re classe, $1^{m}04$ en 2me classe et $0^{m}782$ en 3me classe, on n'aurait jamais à considérer l'hypothèse *b* *.

En réalité les constructions métalliques, telles qu'on les exécute, se trouvent dans des conditions un peu différentes. Dans la 1re classe la limite de portée $19^{m}68$ ou 20^{m} en nombre rond, peut être considérée comme décisive de fait, car pour des portées plus grandes on fait presque toujours usage de poutres transversales et de longerons, de façon que l'hypothèse de maîtresses-poutres écartées de moins de $1^{m}25$ est presque inadmissible. Dans la deuxième classe au contraire, la limite de portée $10^{m}39$ ou 10^{m} en nombre rond n'est que théorique et la limite pratique à considérer oscillera entre 10^{m} et 15^{m} eviron, où l'on aura par conséquent toujours à examiner les deux hypothèses *a* et *b* de surcharge. Dans la 3me classe enfin la limite de portée $3^{m}84$ ou 4^{m} en nombre rond ne sera presque jamais à considérer, parce que pour de semblables petits ponts on fait généralement usage de maîtresses-poutres écartées de $0^{m}80$ à $1^{m}50$ et portant directement le tablier de voie; il conviendra donc entre $4^{m}50$ et 10^{m} de portée environ, de considérer toujours les deux alternatives de surcharge.

Dans les cas douteux on pourra, comme nous l'avons fait voir, utiliser le barême des charges pour choisir rapidement celle des deux hypothèses qu'il faut admettre.

c) Prescriptions sur le travail admissible dans les matériaux (§§ 4, 6 et 16 de l'ordonnance autrichienne).

XXX. Généralités.

Au point de vue théorique comme au point de vue pratique c'est avec raison, que les auteurs de l'ordonnance autrichienne ont renoncé au système usité précédemment en France en Angleterre et en Autriche, et qui consiste à fixer pour le fer employé dans les constructions de ponts, sans distinction aucune, une seule et même limite supérieure de travail par unité de surface **.

Depuis une vingtaine d'années, les ingénieurs des ponts métalliques ont pu se convaincre que l'on ne doit admettre dans les constructions que des qualités de fer répondant à des conditions déterminées, et que le travail à admettre par unité de surface du métal mis en œuvre, doit être réglé par une limite plus élevée pour les grands ponts que pour les petits, car dans ces derniers les effets dynamiques de la charge mobile et les conséquences des inégalités de structure intérieure dépendant du mode de fabrication, ont une influence beaucoup plus considérable.

C'est seulement sur l'application de ces principes qu'il règne encore parmi les ingénieurs un certain désaccord, qui a été notablement accru par les théories nouvelles émises depuis quelque temps en Allemagne, et que nous aurons à discuter.

Les conditions accessoires les plus importantes qu'il y a lieu d'étudier pour déterminer les dimensions à donner aux diverses pièces de construction d'après les efforts trouvés par les calculs de résistance, sont à peu près les suivantes.

1. La qualité et la provenance des matériaux de construction;
2. le mode de fabrication comparé au mode de travail à subir après la mise en œuvre;
3. la surélévation du travail élémentaire par suite de la répartition inégale entre toutes les fibres de la section;
4. la considération des efforts répétés un grand nombre de fois;
5. la considération des efforts alternés (extension et compression) ou plus généralement de l'intervalle dans lequel oscillent les efforts à supporter;
6. la sécurité plus ou moins grande avec laquelle on peut compter sur les calculs de résistance ***.

Nous examinerons plus loin l'importance relative de ces diverses considérations, mais nous ferons remarquer dès à présent que les prescriptions du § 4 de l'ordonnance autrichienne n'ont pu atteindre que celles qui sont mentionnées aux 1., 2., 3. en premier lieu.

---

* Les charges *p* trouvées dans le barême pour chaque classe de surcharge, diminuent d'abord pour des portées croissantes et atteignent un certain minimum d'après lequel on a calculé les moindres écartements cités dans le texte. Pour des portées plus grandes les valeurs de *p* restent à peu près stationnaires.

** En Autriche par l'ordonnance du 30 Août 1870, R.-G.-B. 114, en France par la circulaire ministérielle du 9 Juillet 1877 N° 15 encore en vigueur, en Angleterre par le „Memorandum“ du „board of trade“ (Railway Dept.) du Juillet 1881. Voir à ce sujet les notes du N° *XIV*.

*** On a souvent mentionné à ce sujet les effets dynamiques, les mouvements oscillatoires, les secousses . . . etc.; mais ces considérations concernent la charge mobile et nous les avons déjà traitées à propos du § 3 de l'ordonnance.

Après examen de ces diverses questions, les auteurs de l'ordonnance ont admis que le travail du fer dans les ponts de petite portée ou dans les conditions les plus défavorables ne devait pas dépasser 700^{kg} par cm^2, tandis que dans les poutres de grandes portées ou dans les conditions favorables on pourrait encore tolérer un travail de 900^{kg} par cm^2 à la compression et à l'extension*. Ces limites concernent du reste exclusivement le „fer soudé" (fer puddlé, Schweisseisen). Les expériences faites en Autriche avec le „fer fondu" (acier doux, Flusseisen) pour les constructions métalliques, n'avaient pas encore montré avec toute sécurité, que ce métal peut être employé couramment pour les ponts et on ne se trouvait pas en mesure de fixer des normes sûres pour son emploi.

Pour la fonte, le bois et d'autres matériaux qui ne sont plus appelés actuellement à jouer un rôle important dans les constructions de ponts, on a admis des limites de travail fort simples.

XXXI. Le fer, sa qualité et son emploi dans les constructions.

1. Fabrication du fer soudé et fondu**.

Depuis la disparition des anciens procédés d'affinage au bois, le seul fer que les ingénieurs aient eu à leur disposition jusqu'à une époque récente, est le fer obtenu au moyen du puddlage de la fonte, cinglé ensuite au marteau-pilon et profilé au laminoir. C'est ce que l'on a appelé pendant longtemps fer puddlé, fer forgé (Schweisseisen) ou fer soudé.

Les convertisseurs Bessemer qui se sont répandus en Europe il y a une vingtaine d'années ont jeté sur le marché une nouvelle sorte de fer, obtenu par la voie de la fusion et ayant en partie les propriétés de l'acier. Ce métal possède, lorsqu'on en choisit les qualités les plus douces, c'est-à-dire les moins carburées, des propriétés qui se rapprochent beaucoup de celles des fers puddlés de bonne qualité. Le procédé Bessemer a été perfectionné il y a quelques années par le garnissage basique des cornues qui permet de déphosphorer la masse en fusion. Ce procédé connu sous le nous de procédé Thomas-Chilchrist ou procédé basique, permet d'obtenir avec des minerais médiocres, tels que ceux de la Bohême ou de la Lorraine, un métal qui, dans les qualités douces, ne le céde en rien aux produits obtenus avec les meilleurs minerais de Styrie ou d'Espagne. Il donne toutefois moins de garantie que le procédé Martin-Siemens, qui consiste à chauffer dans un four à réverbère*** au moyen d'un courant de gaz surchauffé au régénérateur Siemens, un bain de fonte dans lequel on introduit successivement des quantités de fer mesurées de manière à réduire la carburation à une proportion déterminée†. Le principal avantage du procédé Martin-Siemens, au point de vue de la qualité des produits est la lenteur de l'opération qui peut être continuée jusqu'à ce que les éprouvettes prises dans le bain liquide permettent de reconnaître que la qualité cherchée est exactement obtenue.

2. Le fer soudé (fer puddlé, Schweisseisen).

On a admis dans l'ordonnance autrichienne que les deux caractères les plus sûrs pour reconnaître les qualités du métal sont la résistance à la rupture et l'allongement

* Il ne faut pas oublier qu'aux termes de l'ordonnance autrichienne les sections doivent être calculées déduction faite des trous de rivets et des parties pleines ne participant pas au travail.

** Les Annales des ponts et chaussées (décembre 1886, pag. 72) mentionnent une nomenclature internationale des fers de diverses natures qui est citée aussi dans le tome V de l'encyclopédie chimique (article de Mr Bresson sur les aciers). Cette nomenclature établie en 1876 par la commission internationale de Philadelphie, a été adoptée par l'assemblée générale des délégues de l'association des chemins de fer Allemands réunis à Hamburg en 1878 (1re et 2 Août).

Elle se résume ainsi:

a) Fer soudé. Schweisseisen, weld iron, wälljern, fabriqué en réunissant par voie de soudure des masses pâteuses, chauffées au rouge blanc, préalablement obtenues à l'aide de paquets ou de tout autre procédé, non susceptible d'être trempé.

b) Acier soudé. Schweissstahl, Weldsteel, Wällstal, fabriqué comme (*a*) et susceptible d'être trempé.

c) Fer fondu. Flusseisen, ingot iron. gätjern, fabriqué par voie de fusion et à peine susceptible d'être trempé.

d) Acier fondu. Flussstahl, ingot steel. götstal, fabriqué comme (*c*) et susceptible d'être trempé.

En outre de cette classification excellente, qu'il serait très-désirable de voir adopter, il faudrait pourtant ajouter encore bien des conditions pour préciser une qualité de fer donnée (Zeitschrift des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen N° 62 du 12 Août 1878. p. 851 et 858).

*** On peut employer le garnissage basique avec le four Martin Siemens comme avec le convertisseur Bessemer.

† On peut au lieu de fer, ajouter du minerai; ce dernier procédé est appliqué sur une grande échelle en Angleterre.

mesuré dans le sens du laminage. La résistance à la rupture prévue au § 4, lit. *a*, avec une limite inférieure de 3300 à 3600^{kg} par cm^2 a été fixée de façon à ne pas exclure les excellents fers doux de Styrie. La prescription complémentaire qui fixe des allongements variant de 20 à 12 p. °/₀ selon la résistance à la rupture a pour objet d'éviter l'emploi des fers de mauvaise qualité et concerne surtout les fers importés de l'étranger en Autriche, qui sont généralement plus aigres *. Les éprouvettes types prescrites (5$^{cm^2}$ de section et 20^{cm} d'écartement entre repères ** répondent à l'usage établi dans la plupart des usines de l'Europe centrale ***. Ces prescriptions assez larges déterminent au point de vue spécial du service de la surveillance des chemins de fer par l'Etat, le minimum des conditions à remplir. C'est aux administrations de chemins de fer qu'il appartient de s'assurer des garanties plus complètes en inscrivant dans leurs cahiers des charges des conditions spéciales (résistance dans le sens transversal, résistance à la flexion et au martelage) suivant la qualité et la provenance du fer commandé.

La plupart des fers du commerce ne sont laminés que dans un seul sens; certaines tôles doivent toutefois être laminées successivement dans les deux sens. Ces particularités du mode de fabrication sont en relation avec le mode d'emploi et il ne serait pas possible dans une ordonnance générale de prévoir ces cas particuliers.

3. Le fer fondu (Flusseisen).

L'ordonnance autrichienne ne renferme aucune prescription relative à l'emploi du fer fondu. Ce métal a en effet été presque abandonné en Autriche après quelques essais faits de 1879 à 1881 qui n'ont pas paru encourageants. Le fer fondu, employé dans les ponts où il a été essayé, devait avoir une résistance à la rupture de 45^{kg} par mm^2 avec une striction de 45 p. °/₀. (La formule usitée à cette époque prescrivait d'une manière plus générale que la somme des nombres représentant la résistance à la rupture et la striction devait être égale à 90 †.) Les cahiers des charges étaient très-sévères et les usines n'étaient pas arrivées encore, à une fabrication très-régulière, car il y eut beaucoup de refus des fers présentés à la réception. Un accident arrivé au pont sur la Talfer (de 31^{m} de portée) dans lequel plusieurs pièces ont été rompues par le choc d'un wagon vide déraillé et des accidents plus récents encore, semblaient confirmer l'impression défavorable caussée en Allemagne par des expériences comparatives faites à l'usine Harkort de Duisbourg †† sur des poutres en fer et en acier, ils ont amené momentanément en Autriche l'abandon du métal fondu. Toutefois on recommence actuellement à construire quelques ponts avec ce métal, tel qu'il provient des fours Martin-Siemens.

L'emploi du fer fondu pour la construction des ponts ne provoque pas en France les mêmes défiances qu'en Autriche; il a été admis depuis quelques années dans plusieurs ponts importants ††† et il paraît devoir prendre une extension rapide *†. Nous croyons, donc utile de

---

* Ces règles ont été fixées d'accord avec les usines suivantes: Usine de l'archiduc Albert à Teschen société des Forges et ateliers de construction de Wittkovitz; société métallurgique de Prague.

** Les résultats d'essai sur l'allongement ne sont comparables que si les éprouvettes ont des dimensions identiques ou géométriquement semblables. En France, on emploie ordinairement pour mesurer le rapport de la longueur à la section les deux formules: $l^2 = 80\,S$ et $l^2 = 50\,S$. Les conditions fixées par l'ordonnance autrichienne satisfont à la première de ces deux formules, où la longueur l et la section S sont évaluées en *cm*. Les éprouvettes de forme cylindrique ont alors huit diamètres pour longueur.

*** En France, il n'y a pas eu jusqu'ici de règle ayant un caractère général pour déterminer la qualité du fer employé dans les ponts. En ce qui concerne la résistance à la rupture, les conditions du cahier des charges sont en général sensiblement les mêmes que celles qui sont prescrites par l'ordonnance autrichienne; mais beaucoup d'Ingénieurs au lieu de fixer l'allongement prescrivent des essais mécaniques (pliage, forgeage etc.) qui en tiennent lieu. Ces essais ont le grave inconvénient de donner des résultats très-différents selon l'habilité de l'ouvrier chargé de plier ou de forger les échantillons et par suite de n'être pas comparables d'une manière générale. Aussi la plupart des administrations de chemins de fer, l'Artillerie et la Marine exigent-elles aujourd'hui des épreuves d'allongement. Tous les établissements métallurgiques de quelque importance possèdent d'ailleurs les machines nécessaires pour ces mesures.

† Comme il est facile de s'en rendre compte, cette formule donne des garanties de qualité, mais non d'homogénéité, et ne fait pas obstacle à l'emploi du métal dur c'est-à-dire susceptible de prendre la trempe et de devenir cassant.

†† Voir ci-dessous (page 95) la discussion de ces expériences.

††† Pont-route sur la Seine à Rouen (trois arches de 40^{m}, 48^{m}80 et 54^{m}60 de portée). — Viaduc de la rue Caulaincourt à Paris, pont Morand et de Lafayette à Lyon (deux arches de 62^{m}25 et une de 66^{m}90 d'ouverture). — Pont sur la Braye (une travée de 57^{m} de portée). — Pont-route d'Arène près Marseille (deux travées de 31^{m}35 de portée). Pont de Gagnières (trois travées indépendantes de 52^{m} de portée). Pont de Rochechien (une travée de 70^{m} de portée).

*† La compagnie Paris-Lyon-Méditerranée a décidé de construire en fer fondu tous les ponts d'une ouverture supérieure à 30^{m} qui seront établis à l'avenir sur son réseau.

résumer les conditions auxquelles doit satisfaire ce métal pour donner des garanties complètes de sécurité*. C'est à la Marine française que l'on doit les grands progrès réalisés en France, depuis dix ans environ, dans l'emploi du métal fondu pour les constructions; son succès, qui a été complet, est dû à deux causes. Elle a cherché dans ce métal, du fer de qualité supérieure et non de l'acier, et elle a exigé des usines auxquelles elle a confié sa fabrication une homogénéité absolue dans les fournitures. Ses exigences sous ce dernier rapport ont certainement rendu à la métallurgie un service considérable; les usines françaises sont aujourd'hui en mesure de fabriquer même au convertisseur, du fer fondu dont la résistance ne s'écarte pas de plus de 2^{kg} en plus ou en moins du type qu'elles se proposent de produire et dont l'allongement, pour une résistance donnée est presque constant. Les ingénieurs de la Marine française considèrent aujourd'hui que, pour les constructions navales, le fer fondu (qu'ils désignent sous le nom d'acier) est préférable au fer soudé non-seulement au point de vue de l'économie et de la légèreté, mais au point de vue de la résistance aux chocs**.

Le succès obtenu dans la construction des navires exposés à des chocs violents et à des déformations incessantes, ne peut manquer dans la construction des ponts, à la condition qu'on emploie la même qualité de métal et qu'on s'astreigne aux mêmes précautions; c'est d'ailleurs, avec l'outillage actuel des usines, uniquement une question de soin.

Comme pour le fer soudé, le meilleur moyen de constater la qualité du fer fondu consiste dans la mesure de la résistance à la traction et de l'allongement***; mais ces mesures acquièrent ici une importance beaucoup plus grande par ce qu'elles permettent seules de se rendre compte

* On peut consulter sur cette question Knap (fabrication et emploi de l'acier. — Paris, Steinheil 1889). Bresson (fabrication et emploi de l'acier déphosphoré. — Liège revue ministérielle des Mines. 1888). Les articles de M. M. Considère et Flamant dans les Annales des Ponts et Chaussées (1885, 1e semestre et 1886, 1e semestre) le rapport de la commission des ponts du Danube (Annales des Ponts et Chaussées, 1888, 2e semestre) et l'ouvrage de Mr Deshayes sur le classement et l'emploi des aciers (Paris — Dunod), enfin une note de Mr Hallopeau sur l'emploi de l'acier doux dans la construction des ponts métalliques pour chemins de fer (Revue Générale des chemins de fer, 1889, 1er semestre).

** Voir dans les bulletins de la société des Ingénieurs civils (1884) une très-intéressante discussion sur l'acier. Mr Périssé dans cette discussion cite des accidents arrivés au navire français „la Dévastation" construit en fer fondu et au navire anglais „l'Azincourt" construit en fer soudé. Ces deux accidents conduisent à une conclusion exactement inverse de celle qu'on a tirées des accidents du pont de la Talfer et des expériences de Duisbourg, ce qui prouve que la sécurité tient non à la nature mais à la qualité du métal.

*** Il serait utile de déterminer aussi la limite d'élasticité; on a reculé jusqu'à présent devant l'incertitude qu'offre cette mesure qui est très-délicate lorsqu'elle est effectuée par les procédés ordinaires. C'est donc en général la résistance à la rupture, l'allongement et la striction (contraction de la section rompue) dont il est question dans les cahiers des charges. Nous donnons ci-après deux tableaux relatifs à ces limites; le premier résume les opinions recueillies en France par la Comm.-minist. du Danube déjà citée, le second résume quelques résultats-types des essais que l'on fait actuellement en Autriche sur les meilleurs fers et aciers à employer pour les ponts métalliques:

Enquête de la Comm. minist. française du Danube.

Administrations consultées et ponts considérés	Limite d'élasticité	Rupture		Travail admissible	Rivure	
		Résistance	Allongemt		Rivets	Trous
	kg	kg	%	kg	fer	—
Us. de Batignolles .	—	45 à 50	20 à 18	10 à 15	fondu	alésés
Us. de Fives-Lille .	—	45 à 50	20	9 à 11	soudé	alésés
Us. du Creusot . .	24	42 à 45	22 à 20	—	fondu	poinç
Usine Cail	24	45	20	12	—	—
Us. de Terre Noire .	22 à 25	42 à 45	22 à 20	10	—	—
Compagnie P. L. M. .	26	42	20*	8 à 10	soudé	alésés
Marine franç. Tôle 6 à 8mm	—	43	21	—	f. ou s.	alésés
Marine franç. Tôle 8 à 20mm	—	42	22	—		
Amirauté anglaise .	—	42 à 49	20	10·5	—	—
Pont Firth of Forth compress.	—	52 à 57	—	11·8	fondu	forés
Pont Firth of Forth extension	—	47 à 52	—	11·8	fondu	forés
Pont de Lyon . .	24	47	24*	10	fondu	—
Ponts Tours-Sargé .	24	44±4	24*	10	fondu	—
Pont de Rouen . .	22	50	18	—	soudé	—
Pont tourn. de Caen	25	50	25*	10	fondu	forés
Commiss. Minis. du Danube Tôles . .	24	42 à 45	23 à 21	9 à 12	fondu	—
avec recuit, planage, et rabotage des bords						
Commiss. Minis. du Danube Rivets . .	—	38	28	7	fondu	alésés

* Eprouvettes de 100mm de longueur seulement.

Enquête autrichienne sur les fers et aciers.

Fers fondus essayés et leur provenance	Eprouvettes		Limite d'élasticité	Rupture		
	Section	Longueur		Résistance	Allongemt	Striction
	mm²	mm	kg	kg	%	%
Wittkowitz						
Thomas-Chilchrist	368·7	170	—	38·8	29·6	63·4
Martin-Siemens .	382·8	175	—	41·0	27·1	43·6
„ „ Tôle .	333·7	165	—	42·9	25·5	42·9
„ „ Chaudière	Eprouvettes normales*		—	43·5	24·0	54·8
„ „ „ .			—	47·2	21·3	53·0
„ „ „ .	„		—	51·4	20·9	52·5
Donawitz						
Martin-Siemens Tôle	341·0	200	—	33·6	31·5	65·8
„ „ „	392·0	200	—	35·7	30·0	55·6
Neuberg						
Martin-Siemens Tôle	Eprouvettes normales*		—	43·4	25·0	57·0
„ „ „			—	45·0	24·7	54·3
„ „ „	„		—	47·6	24·2	50·5
Kladno						
Thomas-Chilchrist	235·4	200	25·2	39·2	20·0	59·4
„ „	220·1	200	24·9	41·5	18·5	58·7
Resicza						
Martin-Siemens Tôle	Eprouvettes normales*		—	43·8	26·0	56·1
„ „ „			—	45·7	25·0	52·5
„ „ „	„		—	47·0	22·1	50·9

* Equivalentes à celles de 200mm pour 500mm² de section.

de la nature du métal et de son homogénéité*. En effet, tandis que les différentes qualités de fers marchands produites par la même usine ne présentent entre elles que des écarts de résistance et d'allongement relativement peu considérables, on peut avec le même minerai produire dans le convertisseur Bessemer et même dans le four Martin-Siemens toutes les variétés de métal fondu depuis le fer doux presque pur jusqu'à l'acier dur; la même coulée peut même fournir des lingots de duretés différentes et les lingots eux-mêmes ne sont homogènes que si la coulée a été faite avec certaines précautions. On ne connaît donc, en réalité, la qualité du fer fondu ou de l'acier que par les essais auxquels on le soumet***; mais ces essais ne peuvent être considérés comme concluants que s'ils fournissent la preuve que les fers présentés à la réception satisfont d'une manière générale aux conditions posées. On ne peut en effet essayer les pièces même qu'on emploie, et il serait presque impossible d'essayer des échantillons détachés de toutes les barres dans lesquelles sont découpées ces pièces. Le refus des lots sur lesquels ont été prélevées les éprouvettes qui ont donné des résultats défectueux, ne garantit donc contre l'emploi de barres de même qualité que si on peut avoir l'assurance que les lots sont homogènes. Or, il est facile de se rendre compte que, non-seulement l'emploi d'acier dur au lieu de fer fondu introduit dans l'ouvrage un élément de fragilité, mais que la juxtaposition dans une même pièce d'éléments non homogènes a pour effet de diminuer sa résistance dans une proportion souvent très-forte†. Pour s'en rendre compte il suffit de reporter sur une même épure les courbes représentant la résistance des aciers en prenant pour abscisses les allongements et pour ordonnées les résistances de barres de qualités différentes. Si on suppose ces barres assemblées de manière à ce qu'elles ne puissent s'allonger indépendamment les unes des autres, comme les tôles des bandes d'une poutre**

* Contrairement à une opinion encore répandue, la teneur en carbone ne permet pas, à elle seule, de se rendre compte même approximativement, de la dureté de l'acier ou du fer fondu. Celle-ci dépend en effet d'autres éléments (manganèse, phosphore, silicium etc.) qui y sont toujours associés dans une proportion plus ou moins grande. Le manganèse notamment y est introduit par la fabrication même dans les procédés Bessemer et Thomas-Chilchrist où il est indispensable.

** Lorsque la garniture du convertisseur est basique on ne peut produire de l'acier très-dur, mais la résistance du métal peut encore varier couramment de 40kg à 60kg et même davantage. On se rendra compte des écarts énormes qui peuvent se présenter dans la nature et dans la qualité du métal fondu par le fait suivant:

Pour la construction du pont d'Arnhem construit en 1876, les ingénieurs hollandais avaient prévu l'emploi d'acier offrant une résistance, minima de 60k et un allongement minimum de 17%. La résistance des barres soumises à la réception a varié de 50k à 78k et leur allongement de 5·1 à 22·5%. La proportion des refus a été de 40%: Pour le pont de Nimègue construit vers la même époque, le résistance a varié de 56k à 71k et l'allongement de 4% à 27% il y a en 49% de refus.

*** Dans les usines françaises les plus réputées pour la qualité de leurs aciers (Le Creusot, Denain etc.) la qualité du métal fourni par chaque coulée est déterminée non seulement par des essais mécaniques mais aussi par une analyse chimique, alors même qu'aucune épreuve n'est exigée par les acheteurs.

† C'est à des effets de cette nature qu'il faut très-probablement attribuer les résultats défavorables à l'acier donnés par les essais comparatifs faits en 1877, à la demande des ingénieurs hollandais, par l'usine Harkort à Duisbourg. Ces essais ont été faits à la suite des nombreux refus auxquels avait donné lieu la fourniture de l'acier aux ponts d'Arnhem et de Nimègue, sur des poutres à double T composées de tôles, et de cornières dont la portée variait de 5m35 à 8m50. On a comparé l'acier dur ayant 75k de résistance 14% d'allongement, l'acier demi-dur ayant 60k de résistance et 17% d'allongement, le fer fondu ayant une résistance de 45k et un allongement de 5%, enfin le fer soudé, ayant une résistance de 36k et un allongement de 8%.

La rupture s'est produite lorsque l'effort exercé au milieu de la poutre a atteint:

Pour l'acier dur les	73%	de l'effort théorique de rupture, tel qu'on le mesure sur les éprouvettes en usage.
Pour l'acier demi-dur de 30 à	83%	
Pour le fer dur environ . .	85%	
Pour le fer soudé environ .	85%	

Les déformations ont été plus régulières avec le fer soudé qu'avec le fer fondu.

En se reportant aux essais faits sur des éprouvettes découpées dans les poutres après leur rupture on a constaté que l'acier dur était assez homogène (la résistance variait de 81 à 86 et les allongements de 9 à 15), que la qualité de l'acier dit demi-dur était un mélange de fer fondu et d'acier de qualités entièrement différentes dont la résistance variait de 53 à 70k et l'allongement de 5 à 16, que le fer fondu était assez homogène au point de vue de la résistance (42 à 49kg) mais avait des allongements beaucoup trop faibles (13 à 19), enfin que le fer soudé était de qualité supérieure (résistance 38 à 40kg, allongement de 10 à 14% dans les tables et de 21 à 25 dans les âmes).

Les expériences de Duisbourg ont été refaites récemment par la société de construction des Batignolles en comparant quatre poutres en fer fondu d'une résistance de 44k à 48k avec quatre poutres en fer soudé d'une résistance de 36 à 38k; les résultats ont été exactement l'inverse de ceux qu'avaient donnés les expériences de Duisbourg; les poutres en fer fondu ont résisté jusqu'au moment ou l'effort de traction calculé atteignait en moyenne 53k, tandis que le même effort dans les poutres en fer soudé n'a pas dépassé en moyenne 40k15. En outre ces dernières se sont rompues, tandis que les poutres en fer fondu se sont déformées sans se rompre.

à double **T** par exemple, on voit que, pour chaque valeur de l'allongement, la résistance de l'ensemble sera environ la somme des ordonnées des courbes, mesurées pour l'abscisse correspondante. Au moment de la rupture de la barre la plus dure, les autres barres pourront, si la différence des allongements est grande, être encore assez éloignées de l'effort qui correspond à leur résistance; la barre rompue elle même, si elle n'est pas en acier très-dur, présentera à ce moment une résistance notablement inférieure à sa résistance maximum.

C'est à des effets de même nature se produisant dans une barre elle même et aux tensions moléculaires résultant d'une trempe irrégulière ou d'efforts mécaniques qu'il faut attribuer dans la plupart des cas la fragilité si souvent reprochée à l'acier*. Ces efforts, ne se produisent pas dans le fer fondu, au moins dans des proportions notables, lorsque la résistance de celui-ci est inférieure à 50^{kg}, parce qu'il est très-peu sensible aux effets de la trempe et que sa malléabilité rend peu appréciables les conséquences des efforts mécaniques; aussi est-ce au-dessous de cette limite que les constructeurs ont été jusqu'ici d'accord pour fixer la résistance du fer fondu à employer dans les ponts. Il existe toutefois, à ce sujet, de légers écarts d'appréciation: tandis que les uns, s'attachant avant tout à éviter les effets de la trempe, limitent le maximum de résistance à 44 ou 45^{kg}**, les autres cherchant à élever résistance et la limite d'élasticité autant que le permet la prudence, préfèrent un métal un peu moins doux dont la résistance peut aller jusqu'à 50^{kg}***; on a même admis pour le pont du Forth, mais seulement pour les pièces travaillant à la compression, la limite de 57^{kg}. L'allongement varie environ en raison inverse des résistances; il convient de l'éxiger aussi grand qu'une fabrication normale permet de l'obtenir; on peut admettre que l'allongement, mesuré sur des éprouvettes de 200^{mm} de longueur et de 500^{mm^2} de section doit être d'au moins 24°/₀ pour une résistance de 42^{kg} et d'au moins 20°/₀ pour une résistance de 50^{kg}†.

On ne peut déterminer d'une manière générale quelle est la qualité dont l'emploi est préférable. Pour les grands ouvrages, dans lesquels il importe de pouvoir élever le coefficient de travail du métal pour réduire les poids et qui comportent une surveillance très-complète, il y a évidemment tout intérêt à employer du fer fondu aussi résistant que possible; pour les ouvrages de faible portée, dans lesquels le coefficient de travail influe moins sur le poids et dont l'exécution se prête moins à une surveillance minutieuse, il sera en général préférable d'employer un métal plus doux.

L'emploi du fer fondu dans les ponts exige des précautions particulières; il faut aléser les trous de rivets au lieu de les poinçonner, ou, ce qui est plus simple, percer les trous à un diamètre inférieur de 2^{mm} à 3^{mm} au diamètre définitif et les aléser en suite; il faut également éviter de cisailler les barres et de brocher les trous. Encore ces précautions ne sont-elles réellement indispensables que lorsque la résistance dépasse 45^{kg}††.

Disons enfin qu'on s'exposerait à de graves mécomptes si on se contentait, pour construire un ouvrage en fer fondu, de réduire les dimensions indiquées par le calcul pour un projet rédigé en vue de l'emploi du fer soudé. Non seulement on arriverait à des calibres généralement trop faibles (notamment en ce qui concerne les épaisseurs des âmes), mais on éprouverait, en exécution, pour la rivure, des difficultés souvent insurmontables. Les rivets en fer fondu, qu'on emploie couramment aujourd'hui, doivent, en effet, en raison de leur emploi à chaud, être en métal entièrement doux, d'une résistance inférieure à 40^{kg} par mm^2; or on ne peut, dans ces conditions, élever au-dessus de 7^{kg}††† le travail par mm^2 tandis que pour les barres et les tôles le travail

---

* Voir (Annales des Ponts et Chaussées 1886 1° semestre) l'article très-important de Mr Considère sur le fer et l'acier.

** Voir dans la Revue des chemins de fer (1889. 1er semestre) un article de Mr Hallopeau sur les ponts en fer construits par la Cie Paris-Lyon-Méditerranée.

*** La Compagnie P. L. M. fixe la résistance à 42^{k} avec 2^{k} de tolérance en plus ou en moins. On a admis pour le pont sur la Braye 44 ± 4; pour le viaduc de la rue Coulaincourt 45 ± 2; pour le pont sur le Rhône à Lyon 47 ± 3 et pour le pont sur la Seine à Rouen 50^{kg}. Le Conseil général des Ponts et Chausées, appelé à donner son avis sur le métal à employer pour deux grands ponts à construire sur le Danube en Roumanie s'est prononcée pour le fer fondu présentant une résistance moyenne de 45^{kg} avec minimum de 42^{kg} (Annales des Ponts et Chaussées, 1888, 1er semestre).

† Les conditions exigées actuellement par la Marine Français pour les barres profilées sont peu différentes de celles qui ont été adoptées par la Cie Paris-Lyon-Méditerranée.

†† Il est possible qu'on arrive, au moins pour les ouvrages courants, à renoncer aux précautions que nous venons d'indiquer, car les altérations que l'on redoute par suite du poinçonnage, du cisaillage et du brochage se produisent également dans le fer soudé pour lequel on évite toutes ces sujétions sans en éprouver d'inconvénients graves.

††† Ce coefficient qui peut être considéré comme élevé, a été indiqué par la commission des ponts sur le Danube. (Annales des ponts et chaussées. 1888. 1er semestre.)

admissible pourra varier de 9 à 12^{kg} par mm^2. Le rapport, de la section des rivets à la section des pièces à assembler est donc beaucoup plus fort avec le fer fondu qu'avec le fer soudé* et il en résulte la nécessité d'étudier en conséquence les dispositions des ouvrages**. En vue des sections faibles il faudra parer au manque de rigidité, d'où résultent des pièces et rivures nouvelles . . . . etc.

XXXII. Augmentation du travail élémentaire par suite de la répartition inégale dans une même section.

1. Travail supplémentaire de divers genres.

On représente toujours l'action de toutes les forces extérieures sur une section d'une barre ou poutre, par une force unique et un couple, qui appliqués ensemble peuvent remplacer toutes les actions moléculaires agissant du même côté sur la section considérée.

Les ingénieurs se sont habitués à ne tenir compte en général de la répartition inégale du travail élémentaire dans une section que dans le cas de la flexion. Dans les autres cas, où il s'agit d'une force agissant dans le sens des fibres, ou d'un effort tranchant agissant perpendiculairement à leur direction, ils se contentent de considérer un travail moyen (quotient de la force par la section) quoique depuis plus d'une vingtaine d'années, la théorie de la répartition inégale du travail dans la section (axe neutre, noyau central . . . etc.) d'après la position qu'y occupe le point d'application de la force . . . etc., soit universellement connue***, et puisse être utilisée dans un grand nombre de cas pratiques.

Ces observations, qui concernent surtout les poutres modernes à triangles, calculées comme systèmes articulés, ainsi que bien des considérations analogues concernant les attaches rigides des croisillons aux bandes, des croisillons entre eux, des poutres transversales aux maîtresses-poutres, des longerons aux poutres transversales . . . etc. font voir qu'il se développe dans la plupart des pièces de ces constructions un travail supérieur au travail moyen que l'on calcule d'ordinaire, mais les causes innombrables qui produisent ces différences ne peuvent être prévues dans une ordonnance ministérielle.

Il appartiendra aux ingénieurs et aux constructeurs qui s'occupent des projets, de tenir compte autant qu'il est possible dans chaque cas particulier des influences que nous venons d'indiquer. On préférera du reste le plus souvent en pratique renforcer les parties trop faibles ou trop peu rigides, suivant les exigences locales de la construction elle-même plutôt que d'entamer des calculs compliqués outre mesure, sur la répartition probable du travail élémentaire.

Les cas spéciaux de surélévation du travail élémentaire dont les ingénieurs autrichiens ont l'habitude de tenir compte dans les calculs de résistance concernent: les rivures (rivets et parois de trous de rivets) les trous, échancrures, ou parties pleines ne participant pas au travail, l'aboutement dans les pièces comprimées, la flexion des éléments de bandes sous l'action des charges locales†, l'augmentation de travail qui se produit dans les fibres extrêmes des bandes de poutres à triangles (à nœuds rigides) par rapport au travail moyen calculé par la méthode des hauteurs théoriques . . . etc.) ††.

---

*) La difficulté est encore plus grande lorsque, comme le font encore un certain nombre d'Ingénieurs on emploie des rivets en fer soudé.

**) Pour ne citer qu'un exemple la hauteur d'une âme en tôle qui serait suffisante pour servir d'attache aux barres d'un treillis devrait être augmentée avec l'emploi du fer fondu, pour tenir compte de l'augmentation du rapport du coefficient de travail des barres à celui des rivets; son épaisseur devrait donc être réduite en conséquence, pour que sa section restât la même; mais, s'il avait été tenu compte de cette section dans les calculs elle devrait aussi être réduite par suite de l'élévation du coefficient de travail. On serait probablement en outre conduit à diminuer le diamètre des rivets, en raison de la diminution de l'épaisseur des assemblages; il en résulterait une augmentation de leur nombre et par suite de la hauteur de l'âme, d'où une nouvelle diminution de l'épaisseur de celle-ci qui finirait par être réduite dans une proportion inadmissible.

*** Ces considérations théoriques tirées de la mécanique rationnelle (ellipsoïde ou ellipse d'inertie, centre de percussion etc.) font voir que l'axe neutre est en général parallèle au diamètre de l'ellipse d'inertie, qui est conjugué avec la ligne joignant le centre au point d'application de la force; on reconnaît en outre que l'axe neutre passe en dehors ou en dedans de la section suivant que la force est appliquée à l'intérieur ou à l'extérieur du noyau central. L. Bresse, cours de mécanique appliquée, Paris 1859, page 39. Collignon, cours de mécanique appliquée, Paris 1869, page 72.

† On ajoute généralement le travail des fibres extrêmes d'après de la flexion locale, au travail calculé pour la poutre entière comme travail moyen.

†† On augmente généralement dans le rapport de la hauteur totale à la hauteur théorique, le travail moyen obtenu avec cette dernière.

Dans le texte de l'ordonnance autrichienne on n'a pu atteindre que les trois premières espèces d'effets que nous venons de mentionner et sur lesquels nous allons maintenant donner quelques explications:

2. Rivets et parois de trous de rivets.

Le travail maximum des rivets au cisaillement fixé à 600^{kg} par cm^2 au § 4 lit. *a* 3. de l'ordonnance, doit être compris comme une limite pour la moyenne obtenue en divisant l'effort à supporter par la somme des sections de rivets de l'attache que l'on considère.

Il en est de même pour la seconde limite de 500^{kg} par cm^2 concernant les rivures soumises dans plusieurs directions à des efforts de cisaillement*.

Les limites de 600^{kg} et 500^{kg} par cm^2 sont relativement élevées, parce qu'on avait en vue les fers à rivets d'excellente qualité dont on dispose en Autriche; on ne saurait donc que recommander aux constructeurs de ne pas craindre de dépasser le nombre de rivets qui en résulte, surtout lorsque ceux-ci sont disposés d'une façon très-irrégulière**. Le Tab. VIII au Tome II de cet ouvrage donne pour chaque cas particulier le nombre de rivets à adopter pour un travail de 600^{kg}; s'il s'agissait d'un travail admissible de 500^{kg} ou 700^{kg} au lieu de 600, il faudrait augmenter d'un $^1/_5$ ou diminuer d'un $^1/_7$ le nombre de rivets donné par le Tab. VIII.

Quant à la limite de 1400^{kg} par cm^2 fixée au § 4 lit. *a*, 3. de l'ordonnance pour le travail des parois de trous de rivets mesurées en projection sur la section diamétrale, elle doit être considérée comme un coefficient pratique pour les calculs de résistance, sans aucune relation avec la limite d'élasticité du fer, généralement plus élevée***. Ici du reste, comme pour les rivets eux mêmes, c'est un travail moyen (quotient de l'effort par la somme des sections de parois de rivets) que l'on entend limiter.

Pour vérifier une attache en ce qui concerne les pressions sur les parois de trous de rivets, on pourra se servir de la Tab. IX du Tome II calculée pour toutes les épaisseurs de tôle et pour un diamètre de rivets égal à 20^{mm}, et cette table peut être utilisée facilement pour tout autre diamètre, puisque la résistance considérée lui est directement proportionnelle.

3. Parties de section ne participant pas au travail.

Les trous de rivets, les échancrures, les diminutions de section de toute espèce font déjà depuis une vingtaine d'années en Autriche l'objet d'une déduction dont on tient compte en déterminant les sections à donner aux diverses pièces comprimées et tendues. On estime à cet égard que les pièces comprimées ne sauraient être considérées avec sécurité comme pressées sur leurs abouts, même si la construction semble l'indiquer, que c'est la rivure qui supporte la pression entière, et que surtout dans les pièces de faible section, il suffit d'un seul rivet relâché pour occasionner une diminution de section notable. Les déductions pour les vides de toute espèce procurent, en somme un surcroît d'approximation et de sécurité d'autant plus motivé, qu'il se produit en realité autour des rivets un surplus de travail considérable dont on ne tient pas compte†.

Les déductions à faire pour tenir compte des parties pleines qui ne participent pas au travail sont indiquées bien moins clairement et dépendent presque entièrement de la manière de voir des ingénieurs qui dressent les projets et de l'autorité qui les contrôle. Les parties

* L'idée du cisaillement est une conception théorique. En pratique lorsqu'il y a rupture d'une attache, il n'y a pas cisaillement des tiges de rivets. Les trous s'ovalisent, les tiges se courbent et les têtes se séparent des tiges, si la rupture des pièces attachées n'est pas déjà opérée. Ajoutons que le frottement des surfaces augmente de beaucoup la résistance des attaches rivées.

** Par exemple aux attaches des barres tendues de grande largeur, dans les poutres à triangle.

*** Cette limite est établie surtout en vue des tôles verticales trop faibles qu'on avait souvent mises dans les bandes.

En France on ne calcule pas habituellement les pressions sur les parois de trous de rivets; on se contente de proportionner leur diamètre à la somme des épaisseurs de tôle à réunir. Morandière (construction des ponts) indique à ce sujet les règles suivantes.

Diamètre des rivets choisis en *mm*		18	20	22	25
Epaisseur totale des tôles à réunir	au minimum en *mm*	12	18	21	30
	au maximum en *mm*	25	35	50	70

En Autriche on ne dépasse guère pour l'épaisseur des tôles à réunir, les $^5/_2$ du diamètre. Remarquons toutefois que ces règles pratiques ne sont pas équivalentes aux limites du texte.

† En France on a jusqu'ici négligé de déduire les sections des trous de rivets et on s'est contenté de la sécurité fournie par la limite de 600^{kg} par cm^2; on considère que la résistance par frottement produite par le serrage des rivets équivant à la résistance de la partie de section supprimée par les trous. Cette appréciation est confirmée sensiblement par l'expérience tant que les efforts reels ne dépassent pas la limite d'environ 15^{kg} par mm^2.

pleines qui d'après l'usage établi en Autriche sont considérées comme ne participant pas au travail sont notamment: les côtés non rivés des cornières tendues dont on déduit de $^1/_3$ à $^2/_3$ de la saillie, les parties excentriques des montants d'appui dont on déduit les parties qui ne servent qu'à raidir l'encadrement de rive de la construction, les sections des rails lorsque ces derniers sont rivés directement sur les poutres en tôle . . . etc.

4. Résistance à l'aboutement (Knickfestigkeit).

Dans le § 4 lit. *d* de l'ordonnance autrichienne on n'a pas jugé à propos de prescrire d'une manière précise les calculs à faire quant à la résistance par aboutement dont il est très-important de tenir compte; l'emploi des formules plutôt empiriques usitées jusqu'ici ne donne, comme on sait, que des résultats sur lesquels on ne peut compter d'une manière absolue, mais il introduit dans les constructions un surplus de sécurité qu'on ne saurait mettre en doute. Désignons par:

Ω, J . . . . . . La surface et le moment d'inertie de la section d'une barre sur l'axe neutre;
$r = \sqrt{J : \Omega}$ . . le rayon de giration par rapport au même axe neutre;
h . . . . la distance de la fibre extrême à l'axe neutre;
L . . . . la longueur de la barre aboutée supposée encastrée aux extrémités;
i, i_0 . . . . . . le travail dans les fibres extrêmes par unité de surface, avec et sans l'aboutement.

La formule qui est la plus usitée jusqu'ici en Autriche, en Allemagne et en Suisse s'écrit alors:

$$(1) \quad \frac{i}{i_0} = 1 + 0{\cdot}00008 \frac{L^2}{J : \Omega} = 1 + 0{\cdot}00008 \left(\frac{L}{r}\right)^2$$

Cette formule n'est d'abord pas justifiée au point de vue théorique. La déformation dont il s'agit ici est produite par la combinaison d'une pression simple et d'une flexion; le second terme qui concerne la flexion ne contient que le rayon de giration de la section et ne tient pas compte des autres particularités de sa forme (symétrique ou non) notamment de la position de l'axe neutre par rapport aux fibres extrêmes, dont on se propose de limiter le travail.

La formule (1) n'est encore pas justifiée non plus au point de vue pratique, car elle ne représente pas suffisamment les résultats de l'observation. Les expériences faites sur une très-grande échelle à partir de 1846 par Eaton Hodgkinson en Angleterre, nous fournissent à cet égard des données précises* que les expériences bien plus récentes faites en Allemagne, ont comme nous le ferons voir, confirmé sur les points qui nous intéressent ici. Nous connaissons ainsi la relation qui lie la résistance des colonnes à leur longueur à égalité de section; il paraît logique à défaut de mieux, d'exiger d'une formule expérimentale comme la formule (1) qu'elle fournisse approximativement ces relations au moins pour les colonnes-éprouvettes que l'on a soumises aux expériences, de façon que l'on puisse conserver pour toute longueur un rapport de sécurité à peu près constant entre la limite de résistance à la rupture et la limite fixée pour le travail maximum dans les fibres extrêmes. La formule (1) toutefois, donne pour des longueurs relativement petites des valeurs trop faibles et pour des longueurs relativement grandes des valeurs beaucoup trop fortes du rapport $(i : i_0)$.

Les formules connues publiées par Eaton Hodgkinson (avec les exposants 1·7 et 3·6) pour les colonnes à sections circulaires paraissent trop compliquées et d'une forme si peu maniable qu'il serait oiseux d'essayer d'en tirer une formule plus générale convenant à nos besoins actuels. Les formules de G. H. Love** (ingénieur civil, 1852) au contraire, bien connues en France et qui représentent les résultats trouvées par Hodgkinson avec une approximation tout aussi satisfaisante, affectent une forme beaucoup plus simple qui concorde avec les idées théoriques universellement acceptées depuis; elles ont paru à l'auteur susceptibles d'être généralisées de façon à donner les formules théoriquement et pratiquement bien fondées, qui faisaient encore défaut. C'est en empruntant à la théorie de la compression et de la flexion les fonctions exprimant les lois cherchées et aux expériences les coefficients capables de les corriger, qu'il est arrivé à la solution que nous allons exposer:

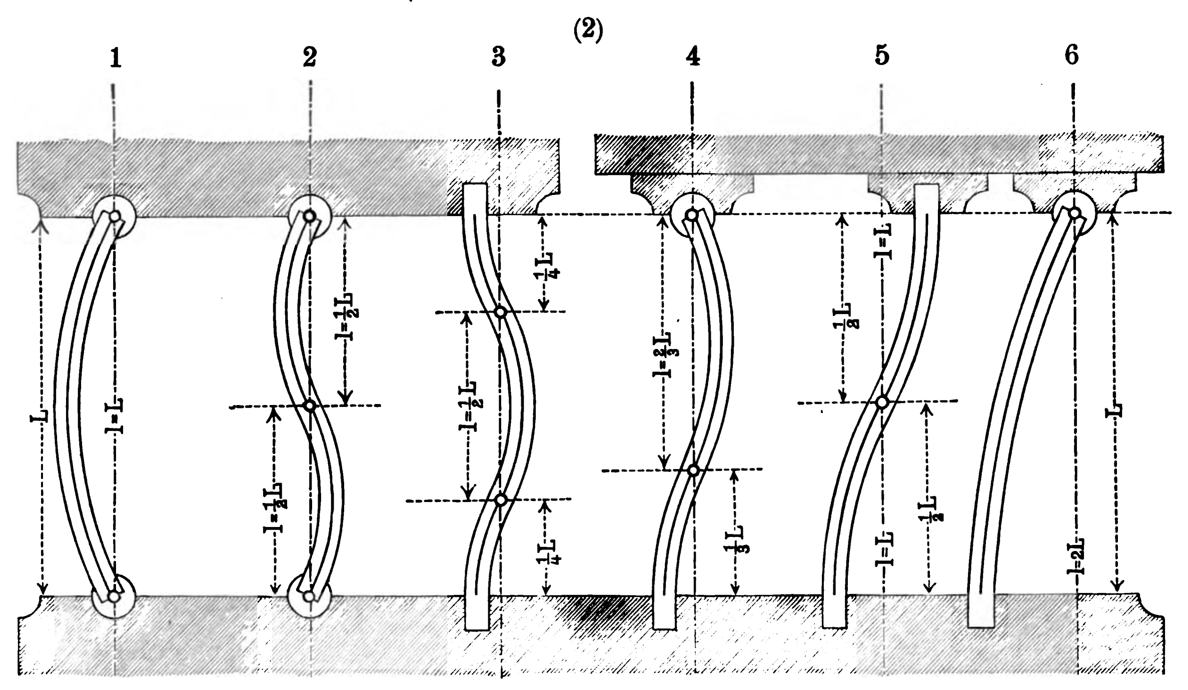
---

* Voir pour la fonte de fer: E. Pirel „Recherches sur la résistance et les diverses propriétés de la fonte . . . etc." Paris. V. Dalmont 1857. Voir pour le fer puddlé: G. H. Love, „Mémoire sur la résistance du fer et de la fonte et l'emploi de ces métaux dans les constructions, basé principalement sur les recherches expérimentales les plus récentes faites en Angleterre. Paris. V. Dalmont 1852. Voir encore les publications de MM. Rondelet, Morin . . . etc.

** Mémoire sur la résistance . . . etc. déjà cité, page 37.

Les différents cas de colonnes aboutées que les ingénieurs des ponts ont à considérer en pratique peuvent être résumés par les 6 colonnes-types de la figure suivante:

(2)



Les types de ce barême se comprendront encore mieux si pour chaque colonne on se représente la fibre moyenne déformée se prolongeant en un nombre indéfini de sinuosités égales alternant de part et d'autre de l'axe vertical pointillé, et que l'on peut considérer comme se trouvant toutes dans des conditions identiques de résistance. La longueur de chacune de ces sinuosités ayant ses extrémités sur l'axe est ce que nous appellerons la longueur libre et que nous désignerons par l. Nous nommerons ensuite longueur vraie de chaque colonne et désignerons par L la longueur mesurée de fait entre les extrémités (2) et qui dans le cas d'aboutement N° 3 du barême (double encastrement) devrait être directement portée dans la formule (1). Nous nommerons enfin longueur calculée la longueur qui, dans l'un quelconque des 5 autres cas du barême (ou dans tout autre cas), doit être substituée à la place de L dans la formule (1) ou dans toute autre formule analogue établie pour le cas usuel des extrémités encastrées (rivées). Cette longueur est dans tous les cas le double $2l$ de la longueur d'une sinuosité ainsi que cela résulte de la comparaison des longueurs libres du barême*:

(3) . . . { Colonne du barême N° . 1 . . . 2 . . . 3 . . . 4 . . . 5 . . . 6
Longueur calculée $2l = 2L$ . . . L . . . L . . $\frac{4}{3}L$ . . . $2L$ . . $4L$

Ces coefficients une fois établis, il n'y a plus lieu de s'occuper de la complication qui résulte des différents cas d'aboutement, et il suffira d'avoir une bonne formule pour l'un des six cas (1 ou 3 par exemple) pour pouvoir l'appliquer immédiatement à tous les autres.

Pour le cas N° 1 dont nous allons nous occuper, Euler, Navier etc. ont déjà depuis longtemps établi théoriquement une formule (Formule dite d'Euler) donnant la plus petite force capable de produire la flexion:

(4) . . . . . . $P_s = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$ . . . où E désigne le coefficient d'élasticité et $\pi = 3{\cdot}1416$ . .

Les valeurs de P_s ainsi calculées ne sont toutefois par d'accord avec les résultats de l'expérience; elles sont pour de grandes longueurs un peu trop petites selon les uns, et pour des longueurs un peu moindres égales aux efforts de rupture selon d'autres**. Enfin pour de petites longueurs P_s dépasse de beaucoup les efforts de rupture, et la formule ne convient plus

* Dans les trois derniers cas on ne peut concevoir le développement des sinuosités qu'en supposant la tête de la colonne déplacée horizontalement; ce qui ne doit pas empêcher d'assimiler à ces colonnes théoriques, les pièces que l'on rencontre dans les constructions.

** Voir: Cahier 15 des „Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium" du prof. Bauschinger.

du tout*. Il faudrait donc pour pouvoir utiliser la formule, la corriger par un coefficient et une constante convenables, comme cela a déjà été proposé.

En considérant dans ces études théoriques, le cas où la force P_g a déjà été dépassée de ΔP_g et où il s'est produit une flèche f, on arrive à trouver pour cette dernière, la formule**.

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{8\,\Delta P_g}{E\Omega}}\cdot\frac{l^2}{r}$$

Nous ne pouvons d'après ce qui précède attribuer une importance absolue, à ces valeurs de f; nous retiendrons seulement pour nos en servir dans la suite que pour des pièces comprimées de même (avec même $\Delta P_g : \Omega$) et constitués de la même matière les flèches produites devront varier proportionnellement à $l^2 : r$.

Considérons maintenant une barre comprimée dans le sens de sa longueur et dans laquelle la fibre moyenne a pris la flèche f, sous l'action de la force P. Le travail dans la fibre extrême, résultant d'une combinaison de la compression simple et de la flexion simple, s'exprimera avec les notations, précédentes, par la formule:

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad i = \frac{P}{\Omega} + \frac{f\,.\,P}{J:h} = \frac{P}{\Omega}\left(1 + fh\,\frac{\Omega}{J}\right) = i_0\left(1 + \frac{fh}{r^2}\right)$$

* Il y a lieu ici de réfuter une interprétation bien erronnée du § 4, lit. d, de l'ordonnance autrichienne, d'après laquelle il suffirait de justifier à l'aide de la formule d'Euler (4) qu'il ne peut pas y avoir de flexion.

** L. Bresse: Cours de mécanique appliquée. Paris 1859. Mallet Bachelier; voir page 213. On a sur la figure pour l'équation connue de la flexion:

$$EJ\frac{dt}{ds} = P\,.\,y \qquad\qquad EJ\frac{d^2t}{ds^2} = P\frac{dy}{ds} = -P\sin t$$

où la longueur variable s est comptée sur la fibre moyenne déformée, et où t représente l'angle de la tangente avec l'axe 0 X de la force P. L'intégration effectuée entre $-t_0$ et $+t$ donne:

$$EJ\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 2P(\cos t - \cos t_0) \qquad\qquad \frac{dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos t_0)}} = ds\sqrt{\frac{P}{EJ}} = d\,\mathscr{X}$$

L'intégration de cette équation est connue par la théorie du pendule simple; nous posons pour ζ et ζ_0 d'après t et t_0

$$\zeta = \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos t) = \frac{t^2}{4}\left(1 - \frac{t^2}{3\,.\,4} + \frac{t^4}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\cdots\right) \qquad \text{avec} \;\ldots\ldots\; dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta-\zeta^2}}$$

L'intégration par série s'effectue alors environ comme suit:

$$d\,\mathscr{X} = \frac{d\zeta}{2\sqrt{\zeta_0-\zeta}\,\sqrt{\zeta-\zeta^2}} = \frac{d\zeta}{2\sqrt{\zeta_0\,\zeta-\zeta^2}}\left(1+\frac{1}{2}\zeta+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\zeta^2+\cdots+\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots.(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots\ldots 2n}\zeta^n+\cdots\right)$$

$$\int_0^{\zeta_0}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta_0\,\zeta-\zeta^2}} = \pi \qquad \int_0^{\zeta_0}\frac{\zeta^n\,d\zeta}{\sqrt{\zeta_0\,\zeta-\zeta^2}} = \frac{(2n-1)\,\zeta_0}{2n}\int_0^{\zeta_0}\frac{\zeta^{n-1}\,d\zeta}{\sqrt{\zeta_0\,\zeta-\zeta^2}}$$

$$\int_0^{\zeta_0}\frac{\zeta^n\,d\zeta}{\sqrt{\zeta_0\zeta-\zeta^2}} = \frac{1\,.\,3\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\ldots\,2n}\,\zeta_0^n\,\pi \qquad \left[\mathscr{X}\right]_0^{\zeta_0} = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\zeta_0+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\zeta_0^2+\cdots\right]$$

Après substitution et réduction, on trouve entre $-t_0$ et $+t_0$

$$\pi\left[1+\frac{t_0^2}{16}+\frac{11t_0^4}{3072}+\cdots\right] = l\sqrt{\frac{P}{EJ}} \qquad\qquad P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left[1+\frac{t_0^2}{8}+\cdots\right]$$

d'où la formule (4) d'Euler pour P_g et si $(P - P_g)$ est très-petit, par suite:

$$t_0^2 = 16\left[\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{EJ}}-1\right] = \frac{16\,l}{\pi\sqrt{EJ}}\left(\sqrt{P}-\sqrt{P_g}\right) = \frac{8l}{\pi\sqrt{EJ}}\cdot\frac{dP_g}{\sqrt{P_g}} = \frac{8\,l^2}{\pi^2 EJ}\,dP_g$$

Pour évaluer d'autre part t_0^2 en fonction de la flèche on élimine $\frac{dt}{ds}$ entre

$$EJ\frac{dt}{ds} = P\,.\,f \;\ldots\quad \text{et} \quad\ldots\; EJ\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 2P(1-\cos t_0)$$

puis en confondant P et P_g ainsi que cela se peut ici, on a finalement:

$$\frac{P_g f^2}{EJ} = 2(1-\cos t_0) = t_0^2\left(1-\frac{t_0^2}{12}+\frac{t_0^4}{360}-\cdots\right) \text{ à peu près } = t_0^2 = \frac{\pi^2 f^2}{l^2}$$

L'identification des deux valeurs t_0^2 conduit à la formule (5) du texte où ΔP_g remplace dP_g.

L'expression qui en résulte pour le rapport $i:i_0$ renferme la flèche f; nous ignorons suivant quelle loi varie cette dernière mais nous savons que pour les colonnes les plus longues rompues par Hodgkinson elle n'avait qu'une valeur très-faible n'atteignant pas le rayon de la section circulaire*. Il semblera justifié dans ces conditions d'admettre (5) que f varie proportionnellement à $l^2:r$ pour toutes les barres pour lesquelles E ainsi que la force excédante par unité de surface $\Delta P_8:\Omega$ restent les mêmes**. La formule cherchée pour $i:i_0$ deviendra alors en y introduisant deux coefficients empiriques: A_0 et A_1.

(7) . . . . $$i:i_0 = A_0 + A_1 \frac{h}{r}\left(\frac{L}{r}\right)^2$$

Dans cette dernière formule l est remplacé par L, car la détermination de la longueur calculée L peut être considérée comme comprise dans la recherche des coefficients A_0 et A_1.

La formule (7) suppose toutefois qu'il s'agit de barres relativement longues où la flexion par aboutement et la flèche f peuvent se produire effectivement. Pour des barres relativement courtes il n'y a pas de flexion et flèche effective; dans ce cas ce que l'on doit prévoir c'est une répartition inégale du travail élémentaire sur toute la section, et on peut l'assimiler au cas bien connu d'un cylindre chargé debout par une force ne passant pas par le centre de gravité de la section. Les déformations élémentaires dans toutes les fibres peuvent alors comme on sait, être considérées comme obtenues par une compression simple combinée avec une flexion simple autour d'un axe passant par le centre de gravité de la section, de façon à pouvoir être représentées en résumé par une flexion simple autour d'un axe généralement situé en dehors de la section, et qui constitue l'axe neutre pour la répartition des compressions élémentaires dans toutes les fibres. L'étude de cette théorie*** conduit pour le travail i dans une fibre quelconque sur la section, à la formule connue:

(8) . . . . $$i = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{h h_1}{r^2}\right) = i_0\left(1 + \frac{h h_1}{r^2}\right)$$

où l'on désigne par h et h_1 les distances de la fibre considérée et du point d'application de la force à l'axe de flexion simple passant par le centre de gravité.

Dans cette formule h_1 caractérise l'excentricité de la compression et constitue en quelque sorte le coefficient d'incertitude inconnu, qui provoque la distribution inégale des efforts. En supposant que l'incertitude provienne de ce que la barre se trouve pressée à ses abouts par des résultantes qui ne passent pas par la fibre moyenne, cette fibre étant légèrement courbe, par suite de la forme ou de la constitution physique de la barre (non fléchie du reste) nous admettrons à défaut de mieux, que h_1 puisse être considéré comme proportionnel à la longueur de la barre†. En tenant compte de cette hypothèse et en introduisant en outre dans la formule deux coefficients de correction B_0 et B_1 à déterminer d'après les résultats des expériences, on aura:

(9) . . . . $$i:i_0 = B_0 + B_1 \frac{h}{r}\left(\frac{L}{r}\right)$$

Pour déterminer maintenant les coefficients numériques à faire entrer dans les formules (7) et (9) il suffira de les identifier à celles qui sont données par Love pour le cas spécial des colonnes en fer à section circulaire. Désignons à cet effet par:

L . . . . . la longueur vraie, D . . . . . la diamètre } des colonnes-éprouvettes de Hodgkinson à bouts rabotés plats;
R . . . . . la résistance avec aboutement, R_0 . . . . la résistance sans aboutement } à la pression qui produit l'écrasement.

* Page 51 du livre déjà cité de G. H. Love. Paris. Dalmont 1852.

** Toutes les formules proposées on employées jusqu'ici ne satisfont même pas à ces conditions permettant au moins de comparer des sections quelconques entre elles, quant à l'aboutement.

*** L. Bresse: Cours de mécanique appliquée déjà cité page 39, Paris 1859. — On y démontre que l'axe de flexion et la ligne joignant le point d'application au centre de l'ellipse d'inertie sont conjugués dans celle-ci. — Consulter aussi: Collignon cours de . . . etc. (1869) pages 42 à 86.

† Ainsi que l'avaient déjà fait voir les expériences de E. Hodgkinson et l'ouvrage de G. H. Love, bien avant que cette théorie fut établie.

Les formules données par Love* s'écrivent alors.

(10) . . . . pour $30 < \frac{L}{D} < 180$ . . . . $R_o : R = 1·55 + 0·0005 \left(\frac{L}{D}\right)^2$

(11) . . . . pour $5 < \frac{L}{D} < 30$ . . . . $R_o : R = 0·85 + 0·04 \cdot \frac{L}{D}$.

Pour identifier ces formules avec les formules (7) et (9) dont elles constituent un cas particulier, nous admettrons que l'on veuille avoir $i : i_0$ égal à $R_0 : R$ comme nous l'avons expliqué et nous calculerons géométriquement pour la section circulaire:

(12) . . $h = \frac{1}{2} D$, ... $J = \frac{\pi h^4}{4}$, ... $\Omega = \pi h^2 = \frac{\pi D^2}{4}$

(13) . . $r = \frac{h}{2} = \frac{D}{4}$, ... $\left(\frac{L}{D}\right)^2 = \frac{1}{32} \frac{h}{r} \left(\frac{L}{r}\right)^2$, ... $\frac{L}{D} = \frac{1}{8} \frac{h}{r} \left(\frac{L}{r}\right)$

En substituant les deux dernières valeurs dans les formules (10) et (11) on obtient les formules généralisées cherchées**:

(14) . . . $i : i_o = 1·6 + 0·000016 \frac{h}{r} \left(\frac{L}{r}\right)^2 = 1·6 + 0·000016 \frac{h L^2}{(J : \Omega)^{2/2}}$

(15) . . . $i : i_o = 0·8 + 0·005 \frac{h}{r} \left(\frac{L}{r}\right) = 0·8 + 0·005 \frac{h L}{J : \Omega} = 0·8 + 0·005 \frac{\Omega L}{(J : h)}$

Pour comparer tout d'abord ces deux formules il faut avant tout en revenir au cas spécial des colonnes à sections circulaires et comparer les valeurs (10) et (11). La droite (11) coupe la parabole (10) aux deux points pour lesquels:

(16) . . $\frac{L}{D} = 40 \pm \sqrt{200} = \begin{cases} = 25·8578 \ . . . \text{ et } . . . \ i : i_o = 1·8843 \\ = 54·1421 \ . . . \text{ et } . . . \ i : i_o = 3·0157 \end{cases}$

Les valeurs citées en dernier lieu ne sont que bien rarement atteintes, ou mieux ne doivent pas être atteintes dans les ponts métalliques bien conçus. Il est facile de vérifier aussi que dans l'intervalle ou $25 < L : D < 55$ les ordonnées de la droite (11) surpassent celles de la parabole (10) de moins de 4°/₀. Il y a lieu d'après cela de recommander pour tous les cas la formule généralisée (15) qui est plus simple et plus maniable.

Pour mettre du reste le lecteur à même de bien comparer la valeur relative des trois formules générales, nous les avons appliquées simultanément à un même profil de fer à ⊥ 100 × 77 : 11, ayant à peu près le même moment d'inertie par rapport aux deux axes principaux menés par le centre de gravité; on trouve ainsi:

(17) $\begin{cases} . . . \perp . . . \Omega = 18·26, \quad J = 92·34, \quad h = 5·62, \quad r^2 = 5·057, \quad r = 2·25 \\ . . . \vdash . . . \Omega = 18·26, \quad J = 92·40, \quad h = 5·00, \quad r^2 = 5·060, \quad r = 2·25 \end{cases}$

Longueur L	$1 + 0·00008 \left(\frac{L}{r}\right)^2$	$1·6 + 0·000016 \cdot \frac{h}{r} \left(\frac{L}{r}\right)^2$		$0·8 + 0·005 \cdot \frac{h L}{r^2}$	
	Position . ⊥ . et ⊢	Position . . ⊥	Position . . ⊢	Position . . ⊥	Position . . ⊢
cm 50	1·039	—	—	1·078	1·047
75	1·089	—	—	1·217	1·170
100	1·158	—	—	1·356	1·294
150	1·356	—	—	1·633	1·541
200	1·632	1·916	1·881	1·911	1·788
300	2·423	2·312	2·232	2·467	2·282
400	3·530	2·865	2·725	3·022	2·776
500	4·952	3·577	3·357	3·578	3·270

* Page 37 de l'ouvrage de Love déjà cité. Paris Dalmont 1852. Cet ingénieur donne en même temps des formules analogues pour les colonnes circulaires en fonte, à savoir

pour $30 < \frac{L}{D} < 120$ . . . $R_o : R = 1·45 + 0·00337 \left(\frac{L}{D}\right)^2$

pour $5 < \frac{L}{D} < 30$ . . . . $R_o : R = 0·68 + 0·10000 \ \frac{L}{D}$

Les formules de Love sont citées dans les aides-mémoire les plus répandus en France parmi lesquels nous citerons: J. Claudel, formules, tables et renseignements usuels . . . etc. Paris. Dunod.

** Les formules généralisées analogues de Love pour la fonte seraient:

$i : i_o = 1·5 + 0·000105 \ \frac{h}{r} \left(\frac{L}{r}\right)^2$ et $i : i_o = 0·7 + 0·0125 \ \frac{h L}{r^2}$

Cette comparaison fournit des résultats tout à fait analogues à ceux que l'on obtient en appliquant la formule ancienne (1) aux colonnes à section circulaire; cette formule devient pour ce cas spécial:

$$i : i_o = 1 + 0{\cdot}00128 \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

Elle donne comparativement aux formules de Love (10) et (11) qui représentent les résultats trouvés par Hodgkinson* des valeurs trop faibles tant que $L : D < 25$ et trop fortes lorsque $L : D > 25$. C'est à peu près la limite que nous avons trouvée (16) pour les colonnes auxquelles on doit appliquer la formule parabolique (10) de Love.

De nouvelles expériences sur la résistance des colonnes aboutées ont été faites dans ces derniers temps par le prof. J. Bauschinger de Munich**; on y a noté avec grand soin les valeurs successives de la flèche produite, ainsi que la résistance à l'écrasement de chaque barre aboutée et de la même matière essayée sans aboutement. Bauschinger exprime sa conviction sur l'impossibilité de tirer parti des études faites au sujet des valeurs croissantes de la flèche***, pour mesurer l'importance de l'aboutement sur une pièce essayée, en raison de l'incertitude relative à la constitution homogène des matériaux et de la difficulté de centrer les colonnes-éprouvettes pour amener l'effort de compression sur la fibre moyenne. Ces recherches mettent bien en relief la grande incertitude qui règne encore sur toutes ces questions concernant l'aboutement et l'insuffisance de toutes les formules proposées jusqu'ici pour représenter les résultats trouvés.

Nous avons réuni dans le tableau comparatif ci-après (voir à la page 105), les grandeurs désignées précédemment par Ω, R_0, $P_0 = \Omega R_0$, J, h, $P = \Omega R$ et que le prof. Bauschinger a toutes mesurées expérimentalement, nous y avons réuni les exemples qui intéressent les ingénieurs des ponts† en leur applicant les 3 formules déjà essayées (17), ce qui donne une excellente base de comparaison.

D'après ce tableau, ce sont encore nos deux formules généralisées de Love, tenant compte de la grandeur h, qui semblent convenir le mieux notamment pour les profils non symétriques. Pour se rapprocher le plus possible des résultats de l'expérience il faut prendre au-dessous de $P_0 : P = 1{\cdot}9$ la formule rectiligne (15) et au-dessus de cette valeur la formule par abolique (14). Toutefois en pratique il est très-désirable d'avoir une formule simple; nous pouvons constater (17) (18) que même jusqu'à $i : i_0 = P_0 : P = 4$ la formule rectiligne peut encore très-bien être appliquée; elle donne même pour des rapports compris entre 2 et 3 (qui sont les plus grands à considérer en matière de ponts) un surcroît de sécurité, qui en vue de la grande incertitude propre aux questions d'aboutement, ne saurait être que désirable††. Dans ces conditions nous recommandons en résumé aux ingénieurs des ponts pour le „fer soudé“ (fer puddlé, Schweisseisen) cette formule:

(19) . . . $i : i_o = 0{\cdot}8 + 0{\cdot}005 \dfrac{hL}{r^2}$ . . . avec $\dfrac{hL}{r^2} = \dfrac{hL}{J : \Omega} = \dfrac{\Omega L}{(J : h)} = \dfrac{(\Omega h) L}{J} = \dfrac{mL}{J}$

en remplacement de la formule (1) plus ancienne. L'une et l'autre de ces formules conviennent pour le cas des extrémités encastrées; on peut du reste s'en servir immédiatement pour tous les autres cas en tenant compte du barême (2).

---

* Voir: Pages 46 et 47 de l'ouvrage de Love, le tableau des colonnes en tôles rivées éprouvées par Hodgkinson. Voir aussi page 54 de l'ouvrage: F. Laissle et A. Schübler: „Der Bau der Brückenträger, Stuttgart, P. Neff. 1869“ (page 62 de l'édition française de Gagnon: Calcul et construction de ponts métalliques) un tableau de colonnes en fer avec les résultats de Hodgkinson qui ne confirment guère la formule (1) préconisée par ces auteurs. Du reste dans la nouvelle édition (1874) du même ouvrage on recommande sans explications nouvelles la formule $1 + 0{\cdot}0001 \left(\frac{L}{r}\right)^2$ pour colonnes à extrémités libres, ce qui équivaudrait au coefficient 0·000025 au lieu de 0·00008 dans la formule (1) qui serait beaucoup trop faible, ainsi qu'on le verra encore ci-après (18).

** Voir: „Mittheilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium der k. techn. Hochschule in München. 15. Heft. Th. Ackermann, 1887“ avec croquis et planches.

*** Suivant les calculs donnés en note au sujet de la formule (5), on aurait entre la flèche f et la tangente t_0 à l'extrémité supposée libre, la relation très-simple $\pi f = l\, t_0$.

† On ne devrait jamais dans les constructions avoir à dépasser pour $R_0 : R$ ou bien $i : i_0$ le rapport 3. Malheureusement les expérimentateurs choisissent leurs pièces trop longues pour pouvoir rester au-dessous des limites indiquées.

†† Ce que l'on doit chercher en pratique, c'est à limiter le travail élémentaire dans les fibres extrêmes. Ce résultat ne nous paraît pas encore atteint avec toute sécurité même avec la nouvelle formule (19), car pour la résistance à l'aboutement déduite uniquement du rapport $P_0 : P$ constaté, les fibres extrêmes n'ont pas à jouer le rôle important que nous voudrions leur attribuer.

(18)

Désignation des pièces éssayées (avec cm et kg)	Longueur avec bouts pointus	Longueur avec bouts plats	Longueur pour la formule L	Valeurs mesurées de P	Rapports: $(P_o : P)$ d'après: l'observation	la formule $1+0·00008\left(\frac{L}{r}\right)^2$	la formule $1·6+0·000016\frac{h}{r}\left(\frac{L}{r}\right)^2$	la formule $0·8+0·005\frac{hL}{r^2}$
	cm	cm	cm	t				
1. (lab. 2692 a)	Pour barres courtes			60·3	1·00	—	—	—
H....9·89 × 4·80, $J = 18·68$	—	42·0	42·0	40·5	1·49	1·09	—	1·13
$\Omega = 12·30$, $r^2 = 1·519$	—	82·9	82·9	35·0	1·72	1·36	—	1·46
$R_o = 4900$, $h = 2·40$	—	137·5	137·5	28·5	2·11	1·99	1·99	1·89
2. (lab. 2696 a)	Pour barres courtes			99·3	1·00	—	—	—
T...11·77 × 7·91, $J = 66·80$	—	107·4	107·4	55·5	1·79	1·26	1·77	1·70
$\Omega = 19·10$, $r^2 = 3·497$	—	149·5	149·5	52·0	1·91	1·51	1·92	2·05
$R_o = 5200$*, $h = 5·84$	—	221·8	221·8	47·0	2·11	2·13	2·30	2·65
3. (lab. 2695 a)	Pour barres courtes			88·0	1·00	—	—	—
⊔....7·70 × 5·28, $J = 26·91$	63·4	—	126·8	42·0	2·09	1·79	2·01	2·09
$\Omega = 16·45$, $r^2 = 1·635$	97·9	—	195·8	40·0	2·20	2·87	2·57	2·79
$R_o = 5350$, $h = 3·32$	155·2	—	310·4	30·0	2·93	5·72	4·04	3·96
4. (lab. 2690 a)	Pour barres courtes			82·4	1·00	—	—	—
H...12·40 × 7·20, $J = 37·99$	89·0	—	178·0	61·0	1·85	2·22	2·21	2·34
$\Omega = 18·30$, $r^2 = 2·076$	151·0	—	302·0	30·2	2·72	4·51	3·36	3·42
$R_o = 4500$, $h = 3·60$	223·0	—	446·0	17·2	4·78	8·32	5·25	4·67
	Pour barres courtes			83·9	1·00	—	—	—
5. (lab. 2694 a)	—	160·0	160·0	46·0	1·82	2·07	2·25	2·55
⊔...14·48 × 6·08, $J = 41·20$	93·4	—	186·8	40·0	2·10	2·46	2·48	2·84
$\Omega = 21·50$, $r^2 = 1·916$	—	314·5	314·5	29·5	2·84	5·12	4·10	4·24
$R_o = 3900$, $h = 4·19$	248·5	—	487·0	17·7	4·74	10·49	7·60	6·12
	328·5	—	657·0	9·7	8·65	19·40	12·51	—

5. Longueurs et moments d'inertie à considérer pour le calcul des bandes et des croisillons de ponts.

Pour tenir compte de l'aboutement soit au moyen de l'ancienne formule (1) soit au moyen de notre nouvelle formule (19) on aura toujours à choisir convenablement la longueur calculée L et le moment d'inertie J qu'il y faut faire entrer, et comme à cet égard on rencontre souvent des divergences d'opinions parmi les ingénieurs, nous croyons utile d'indiquer ici quelques règles tirées de la pratique des constructeurs:

1. Pour les éléments des bandes supérieures comprimées, on admettra la distance entre deux nœuds consécutifs comme longueur vraie et on l'introduira comme longueur calculée à la place de L dans les formules, toutes les fois que ces nœuds se trouveront maintenus horizontalement par des entretoises et des croisillons de contreventement. On procédera d'une manière analogue pour les bandes supérieures qui quoique dépourvues d'entretoisement et contreventement spécial, se trouveront cependant maintenues horizontalement au droit des nœuds par les tôles contrefiches assemblées aux montants verticaux et poutres transversales, ainsi que par des diagonales rigides**; il convient toutefois en pareil cas de choisir

* Inséré d'après les résultats indiqués par Bauschinger immédiatement avant et après, concernant les barres lab. 2695*a* et 2697*a*, livrées également par l'usine „Phönix" puisque pour les trois barres la limite d'élasticité observée a été la même. Ce qui frappe du reste ce sont les valeurs généralement élevées citées pour R_0 par M. Bauschinger, qui sembleraient plutôt convenir pour de l'acier que pour du fer.

** L'omission d'une étude convenable de l'aboutement dans les bandes supérieures a déjà occasionné plusieurs ruptures de ponts. Voir à ce sujet: Sur la rupture du pont route de la Töss entre Rykon et Zell (Suisse) en Août 1883 (sans entretoisement supérieur), ainsi que sur la rupture du pont de Haag-Salez (Suisse) en Novembre 1884 (avec entretoisement supérieur) les notes insérées aux Nos 4 et 51 de la „Wochenschrift des öst. Ing.- und Arch.-Vereines".

suivant le mode de construction adopté une longueur calculée un peu plus grande (voir N° 4, 1 et 6 du barême 2) pour la substituer à L dans les formules*.

2. Pour les diagonales ou montants comprimés, solidement rivés aux nœuds des bandes dans une poutre à triangulation simple, la longueur vraie entre les nœuds des bandes servira de longueur calculée L.

3. Pour les croisillons comprimés, dans une poutre à double triangulation, avec extrémités solidement rivées aux nœuds des bandes et avec croisements rivés ou boulonnés, on admettra comme longueur vraie la longueur comprise entre nœud et croisement, et on en déduira la longueur calculée à substituer pour L, d'après le barême (2) suivant le mode de construction adopté (dans la plupart des cas d'après la colonne N° 4).

4. Pour les croisillons comprimés dans une poutre à triangulation triple quadruple ou multiple, avec extrémités solidement rivés aux nœuds des bandes, et avec croisements rivés ou boulonnés, on admettra comme longueur vraie la longueur comprise entre deux croisements consécutifs et on en déduira la longueur calculée à substituer pour L, d'après le barême (2) conformément au mode d'attache adopté dans les croisements et à la direction probable d'une flexion par aboutement (le plus souvent d'après la colonne N° 1)**.

5. Pour les croisillons de contreventement on procédera suivant les mêmes principes que pour les croisillons des poutres, en tenant compte toutefois s'il y a lieu des attaches intermédiaire fixant le contreventement aux poutres transversales ou aux longrines.

En résumé la longueur vraie sera toujours la longueur de la pièce comprise entre les deux points d'attache les plus voisins, et la longueur calculée s'en déduira d'après le barême (2) suivant le mode d'attache adopté et la direction probable d'une flexion par aboutement.

Les attaches à considérer (rivets, boulons, rivets d'espacement) peuvent être souvent regardées comme des charnières dans une direction, et comme des encastrements dans une autre, de façon que la barre paraîtra pouvoir fléchir plus facilement dans un sens quant à la longueur à admettre pour L et dans un autre sens quant au moment d'inertie correspondant de la section.

Le plus souvent, les directions probables d'une flexion par aboutement sont indiquées à priori par la construction elle-même, et dans le cas seulement où il s'agit de barres relativement longues, avec attaches également rigides dans toutes les directions, on aura à résoudre le problème posé depuis longtemps déjà qui consiste à trouver le plus petit de tous les moments d'inertie de la section rapportés à des axes quelconques passant par son centre de gravité.

Si l'on désigne par J l'un quelconque de ces moments, et que sur l'axe qui le concerne on porte à partir du centre de gravité la longueur $1 : \sqrt{J}$ comme rayon vecteur, le lieu géométrique des points ainsi obtenus forme, comme on sait, l'ellipse centrale d'inertie*** de la section, dont le grand axe sera l'axe de flexion cherché correspondant au minimum de J. Désignons par:

(21) . . .
- J_{min}, J_{max} . . . . . le plus petit et le plus grand de tous les moments d'inertie;
- ω . . . . l'angle aigu que fait un autre axe quelconque avec le grand axe de l'ellipse d'inertie, qui correspond à J_{min}, angle compté de $-\pi : 2$ à $+\pi : 2$;
- J_ω . . . . le moment d'inertie par rapport à cet axe;

la loi connue de l'ellipse d'inertie conduit alors à la formule:

(22) . . . . $J_\omega = \cos^2 \omega \, . \, J_{min} + \sin^2 \omega \, . \, J_{max}$

qui donne immédiatement un moment quelconque J_ω une fois que J_{min} et J_{max} sont connus.

* On remarquera par ex. que les poutres à bandes droites parallèles dans lesquelles les efforts de compression diminuent bien plus rapidement entre le milieu et les appuis, que les efforts analogues dans les bandes courbes, sont aussi un peu mieux constituées de ce fait, contre l'aboutement. De même les poutres à deux triangulations symétriques avec montants et diagonales rigides paraissent généralement plus rigides que les poutres à double triangulation avec diagonales tendues en tôles simples ou fer plats. La question des longueurs calculées offre du reste bien moins d'inertitude avec notre nouvelle formule rectiligne (19) qu'avec l'ancienne formule parabolique (1).

** Pour s'opposer à la déformation de toute une paroi de croisillons comprise entre les bandes, déformation qui s'est produite dans quelques poutres anciennes à petites mailles, il ne suffit pas toujours de renforcer les calibres des barres comme nous le supposons dans le texte; il convient alors de raidir l'ensemble au moyen de montants verticaux à section large (Pont sur le Danube à Tulln).

*** Voir: M. Ch. Delaunay „Traité de mécanique rationnelle“, Paris 1857, p. 432; la théorie de l'ellipsoïde d'inertie y est exposée dans sa plus grande généralité, d'une façon très-simple et claire.

Dans les sections usuelles qui présentent presque toujours au moins un axe de symétrie, le calcul de ces moments ne présente pas grande difficulté, mais dans le cas d'une section tout à fait quelconque on est obligé de déterminer d'abord les axes principaux d'inertie ce qui complique le problème. C'est pour ce cas très-général que nous proposons le procédé de calcul suivant:

Supposons que l'on calcule trois moments J_1 J_2 J_3 rapportés à trois axes faisant avec l'axe inconnu de J_{min} les angles ω, $(\omega + \pi : 4)$ et $(\omega + \pi : 2)$, où ω quoique inconnu peut toujours être maintenu* compris autre $-\pi : 2$ et $+\pi : 2$ si l'on trace l'axe de J_1 dans le sens de la longueur de la section.

On aura alors pour les angles ω et $\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$ d'après (22)

(23) . . . . $$J_1 = \cos^2\omega \,.\, J_{min} + \sin^2\omega \,.\, J_{max}$$

(24) . . . . $$J_3 = \sin^2\omega \,.\, J_{min} + \cos^2\omega \,.\, J_{max}$$

(25) . . . . $$J_1 + J_3 = J_{min} + J_{max}$$

La même équation (22) pour l'angle $\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)$, avec les transformations bien connues:

(26) . . $$\cos^2\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1 - \sin 2\omega) \qquad \sin^2\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\omega)$$

conduit à la formule relative à J_2:

(27) . . . . $$J_2 = \frac{J_{min} + J_{max}}{2} - \frac{\sin 2\omega}{2}(J_{max} - J_{min})$$

Le calcul des trois inconnues ω, J_{min} et J_{max} au moyen de cette équation et des précédentes s'effectue facilement en n'y introduisant partout que l'angle 2ω; on a:

(28) . . . . . $$\cos^2\omega = \frac{1 + \cos 2\omega}{2} \qquad \sin^2\omega = \frac{1 - \cos 2\omega}{2}$$

en substituant dans (23) 24) on trouve après réduction avec l'équation (27) ci-dessus:

(29) . . . . $$\sin 2\omega\,(J_{max} - J_{min}) = 2J_2 - J_1 - J_3$$

(30) . . . . $$\cos 2\omega\,(J_{max} - J_{min}) = J_3 - J_1$$

Ces équations donnent avec (25) directement les trois inconnues**:

(31) . . . . $$\operatorname{tg} 2\omega = 2\,\frac{J_2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_3)}{J_3 - J_1}$$

(32) . . $$J_{min} = \frac{1}{2}(J_1 + J_3) - \frac{J_2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_3)}{\sin 2\omega} = \frac{1}{2}(J_1 + J_3) - \frac{J_3 - J_1}{2\cos 2\omega}$$

(33) . . $$J_{max} = \frac{1}{2}(J_1 + J_3) + \frac{J_2 - \frac{1}{2}(J_1 + J_3)}{\sin 2\omega} = \frac{1}{2}(J_1 + J_3) + \frac{J_3 - J_1}{2\cos 2\omega}$$

Ces formules très-générales, appliquées au cas spécial où il existe un axe de symétrie et où par suite on peut prendre $J_1 = J_3$ se réduisent aux formules très-simples:

(34) . . . . $$J_1 = J_3 = \frac{1}{2}(J_{min} + J_{max}) = J$$

(35) . . . . . . $$\omega = \frac{\pi}{4} \qquad J_{max} = J_2 \qquad J_{min} = 2J - J_2$$

---

* On disposera naturellement le quadrant formé par les trois axes de J_1 J_2 et J_3 de telle manière sur la section, que les moments puissent se calculer simplement. Pour des cornières à cotés inégaux par exemple, ceux-ci l'indiquent d'avance.

** Comme par hypothèse $J_3 > J_1$ l'angle ω ne sera $< o$ que si $J_2 < \frac{1}{2}(J_1 + J_3)$. En pareil cas les fractions des formules (32) (33) de la première forme ont leurs deux termes negatifs. Nous renvoyons du reste au N° *XXXVII* quant aux procédés servant à calculer généralement J_1 J_2 J_3 et en particulier $(J_3 + J_1)$ et $(J_3 - J_1)$ pour les cornières à côtés inégaux.

Les dernières formules sont en particulier très-commodes pour les calculs concernant les cornières à côtés égaux, et ont été utilisées pour dresser le Tab. X : 3 du Tome II*. Ce tableau permet de comparer trois espèces de moments d'inertie pour les cornières à côtés égaux seulement, parce que, comme nous allons le faire voir ci-après à l'aide des formules (31) (32) (33), pour les cornières $80 \times 120 : 10$ et $100 \times 100 : 10$, les cornières à côtés inégaux sont toujours moins avantageuses quant à l'aboutement, que les cornières analogues de même section à côtés égaux.

Pour la cornière $80 \times 120 : 10$ on trouve d'abord dans le sens des côtés**:

(37) . . c' $\quad u' \ldots\ldots \left.\begin{matrix} u' = 6{\cdot}026316^{cm} \\ v' = 1{\cdot}973684 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots J_1 = 100{\cdot}3202^{cm^4} \ldots\ldots \Omega = 19^{cm^2}$; $v' \ldots\ldots$

(38) . . c $\quad u \ldots\ldots \left.\begin{matrix} u = 8{\cdot}026316^{cm} \\ v = 3{\cdot}973684 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots J_2 = 278{\cdot}3202^{cm} \ldots\ldots \Omega = 19^{cm^2}$; $v \ldots\ldots$

Avec ces expressions et les désignations ci-après

(39) . . . $u + v = c = 12^{cm}$ $\qquad u' + v' = c' = 8^{cm}$ $\qquad$ Epaisseur $= \delta = 1^{cm}$

on trouve pour le moment d'inertie J_2 rapporté ici à un axe également incliné sur les deux côtés, la formule générale**:

(40) . . . . $J_2 = \frac{1}{24}\left[c^4 + c'^4 - (c-\delta)^4 - (c'-\delta)^4\right] - \frac{1}{2}\,\Omega\,(v - v')^2$

d'où $J_2 = 286{\cdot}5833^{cm^4}$ et les formules (31) (32) (33) donnent alors immédiatement les valeurs

(41) . . . . $\omega = +\,23^\circ\,46'\,12{\cdot}14''$, $\qquad J_{min} = 57{\cdot}4826^{cm^4}$, $\qquad J_{max} = 321{\cdot}1578^{cm^4}$

Pour déterminer maintenant les modules d'inertie $(J : h)$ qui s'y rapportent il faut d'abord évaluer les distances h des fibres extrêmes à l'axe neutre dans les deux cas; on a sur la figure***:

(42) . . . . pour J_{min} . . . . $(h)_{min} = u' \cos\omega - (v - \delta)\sin\omega = 4{\cdot}31651^{cm}$

(43) . . . . pour J_{max} . . . . $(h)_{max} = u\cos\omega + v'\sin\omega = 8{\cdot}14775^{cm}$

Les modules d'inertie cherchés pour le minimum et le maximum seront d'après cela:

(44) . . . . $\left(\frac{J}{h}\right)_{min} = 13{\cdot}317^{cm^3}$ $\qquad \left(\frac{J}{h}\right)_{max} = 39{\cdot}417^{cm^3}$

A ces valeurs et à celles que nous avons trouvées (41) nous devons maintenant comparer celles que l'on obtient pour les cornières $100 \times 100 : 10$ à cotés égaux†:

(45) . . . . $\omega = 45^\circ\,0'\,0''$ $\qquad J_{min} = 73{\cdot}42533$ $\qquad J_{max} = 286{\cdot}5833$

(46) . . . . $\left(\frac{J}{h}\right)_{min} = 18{\cdot}092^{cm^3}$ $\qquad \left(\frac{J}{h}\right)_{max} = 40{\cdot}520^{cm^3}$

* Les valeurs de J par rapport à un axe parallèle à un côté sont données très-exactement au Tab. X : 1 et on obtient J_2 par la formule très-simple:

(36) . . . $J_2 = J_{max} = \frac{1}{12}\left[c^4 - (c-\delta)^4\right]$ . . . . . où c et δ désignent le côté et l'épaisseur de la cornière.

La formule (35) du texte donne alors J_{min}. La formule (36) ne constitue qu'un cas spécial de la formule plus générale (40) donnée plus loin.

** Cette formule généralement applicable à toutes les cornières à côtés inégaux s'obtient en utilisant la formule $J = c^4 : 24$ qui donne le moment d'inertie d'un triangle isocèle par rapport à sa base lorsque celle-ci fait avec les côtés l'angle $\pi : 4$. Voir du reste à ce sujet les développements ultérieurs donnés au N° *XXXVII* : 6 relativement aux cornières et à une expression encore plus simple de J_2.

*** La fibre extrême se trouve située ici dans les deux cas au bout d'un des côtés de la cornière, tandis qu'au contraire elle se trouve au sommet de l'angle de la cornière $100 \times 100 : 10$ lorsqu'il s'agit de J_{min}.

† On trouve dans le Tab. X : 1. du Tome II, ou par calcul direct:

(47) . . . . . . $u = 7{\cdot}131579$ $\qquad v = 2{\cdot}868421$ $\qquad J = 180{\cdot}00433$

Les valeurs de J_{max} et J_{min} se calculant par les formules (36) (35) et l'on a en outre:

(48) . . . . . $(h)_{max} = c : \sqrt{2} = 7{\cdot}0711$ . . . . $\qquad (h)_{min} = v \,.\, \sqrt{2} = 4{\cdot}0556$ . . . .

Les calculs comparatifs appliqués à d'autres cornières à côtés inégaux et à côtés égaux de même section conduisent à des résultats analogues; il est donc bien établi que les cornières à côtés égaux doivent être préférées lorsqu'elles constituent des pièces simples comprimées. Il conviendra donc de n'employer les cornières à côtés inégaux que comme parties composantes de profils combinés, et c'est dans cet ordre d'idées que l'on a dressé les Tab. X : 1, 2, 3 du Tome II pour les bandes et croisillons.

Nous ferons enfin remarquer aux constructeurs que toutes les valeurs $(J:h)_{min}$ de la Tab. X : 3 représentent à très-peu près* les 7 : 10 des valeurs $(J:h)$ analogues du module d'inertie que l'on obtient par le calcul usuel rapporté à un axe parallèle à un côté, et que ce coefficient approximatif suffit pour dispenser de nouveaux calculs, eu égard à l'incertitude très-grande propre à toutes les questions d'aboutement.

XXXIII. Méthodes usitées antérieurement pour déterminer les dimensions des sections d'après les calculs de résistance. — Efforts répétés ou alternés.

1. Echelles pratiques du travail admissible.

Abstraction faite de la qualité et de la constitution des matériaux employés, et des effets de la répartition inégale non prévue du travail élémentaire, dont nous avons déjà parlé, il reste à examiner comment il convient de déterminer les sections à donner aux pièces d'une poutre à triangles d'après les efforts moyens calculés qui leur incombent.

Comme nous l'avons déjà dit, la pratique des constructeurs à fait admettre déjà depuis longtemps que pour les petits ponts, pour les poutres transversales et les longerons et plus généralement pour toutes poutres et parties de constructions où le poids mort est relativement faible comparativement à la charge mobile, on doit user de la plus grand prudence, que pour les maîtresses-poutres des grands ponts au contraire, on pourra accepter des limites plus élevées pour le travail élémentaire maximum des matériaux. Les ingénieurs les plus expérimentés ont dressé dans cet ordre d'idées des formules ou échelles de limites pour le travail maximum à admettre, en faisant croître ce dernier suivant la portée, suivant le rapport de la charge mobile à la charge permanente** . . . . etc. Ces formules et échelles de travail admissible n'avaient, jusqu'en 1865 environ, que le caractère de règles purement empiriques et étaient considérées comme une sorte de perfectionnement pratique des limites fixes acceptées et souvent même prescrites par l'Administration.

Les expériences très-étendues faites de 1859 à 1870 par Wöhler***, puis continuées et confirmées par Spangenberg, au sujet de l'influence de la répétition des efforts sur les matériaux, ont fait entrer le calcul des dimensions des sections dans une voie entièrement nouvelle†.

Les essais prolongés (Dauerversuche) avaient trait seulement à l'altération que la répétition des efforts fait subir à la résistance à la rupture; ils ont conduit à formuler à cet égard des lois que l'on se hâta de mettre sous une forme mathématique. En partant des

---

* La formule pour le calcul immédiat de J_{min}, facile à trouver, s'écrit

(49) . . . . $J_{min} = \frac{7}{12}\left[c^4 - (c-\delta)^4\right] - u \cdot \left[c^3 - (c-\delta)^3\right]$ ou bien encore

(50) . . . . $J_{min} = \frac{7}{12}\left[c^4 - (c-\delta)^4\right] - \frac{1}{2}\left[c^3 - (c-\delta)^3\right]^2 : \left[c^2 - (c-\delta)^2\right]$

Si l'on désigne par C_4, C_3, C_2 les fonctions de c et δ qui y figurent entre [ ] servant aussi à calculer:

(51) . . . . . . $\Omega = C_2$ $\qquad u = \frac{1}{2}\frac{C_3}{\Omega}$ $\qquad J = \frac{1}{3}C_4 - u^2\Omega$

ou pourra inversement exprimer C_4, C_3, C_2 en fonction de J, Ω, u et la substitution donne alors

(52) . $J_{max} = \frac{1}{4}\left(J + u^2\Omega\right)$ $\qquad J_{min} = \frac{1}{4}\left(7J - u^2\Omega\right)$ $\qquad \left(\frac{J}{h}\right)_{min} : \left(\frac{J}{u}\right) = \frac{1}{\sqrt{32}}\frac{u}{v}\left(7 - \frac{u^2\Omega}{J}\right)$

Avec les valeurs J, Ω, u tirées d'une table (X : 1) dressée pour les cornières usuelles de la manière ordinaire, on constate que ce rapport reste toujours voisin de 7 : 10.

** Voir le mémoire très-étendu du prof. Dr. E. Winkler, Cahiers III et IV ex 1877 „Zeitschrift des österr. Ing.- und Architekten-Vereines".

*** A. Wöhler: Sur la résistance du fer et de l'acier. Erbkam, „Zeitschrift für Bauwesen", 1870, p. 74. — Voir aussi les mémoires de Spangenberg dans le même journal: 1874 p. 474 et 1875 p. 77.

† Voir: Annales des Ponts et Chaussées Avril 1885. page 693 le ch. IV. du mémoire de M. Considère sur le fer et l'acier.

lois ou fonctions ainsi établies pour les limites de résistance à la rupture seulement, on ne craignit pas d'établir des théories entières se rapportant au travail élémentaire usuel des matériaux, quoique celui-ci demeure bien au-dessous de la limite d'élasticité et reste indépendant des lois plus ou moins compliquées déduites de la rupture, d'après lesquelles on a voulu déterminer les dimensions à attribuer aux sections.

De même que vers 1847—1857 après la publication des résultats obtenus par Hodgkinson sur la flexion de la fonte, chaque représentant des théories de résistance s'efforçait d'établir son système de sections-types non symétriques pour poutres en fonte les plus avantageuses d'après les limites de rupture de Hodgkinson, de même vers 1870 à 1880 chaque calculateur croyait devoir démontrer numériquement et graphiquement au monde des ingénieurs la supériorité et l'efficacité de son système spécial d'utiliser les limites de rupture trouvées par Wöhler, pour en déduire les dimensions des surfaces de section, les plus convenables. Les erreurs commises autrefois et récemment, proviennent au fond de la même cause. Toutes les conceptions qui dérivent de nos théories de résistance des matériaux concernent des efforts relativement faibles qui n'altérent point l'élasticité de la matière*. Nous nous reportons à la limite de rupture pour caractériser en quelque sorte le degré de sécurité qu'offre au point de vue de la rupture la limite admise pour le travail en construction, mais cette comparaison est dans bien des cas peu logique et d'une valeur douteuse, par ce que la matière possède dans les deux cas un groupement moléculaire qui est tout autre, et qu'il ne saurait être admissible de déduire des phénomènes observés près de la rupture c. a. d. pour des efforts tout à fait exclus des constructions, des formules et théories entières applicables à la recherche des profils de section à admettre, c'est-à-dire à nos théories de la résistance des matériaux qui ne concernent que les efforts très-faibles (700 à 900^{kg} par cm^2) respectant l'élasticité de la matière.

On est vite revenu vers le milieu de ce siècle, aux poutres en fonte à profils de section symétriques** et l'on est, après plus de 15 ans de discussions stériles sur les nouvelles théories, en voie de revenir simplement aux lois connues concernant l'élasticité des matériaux***, que l'on peut mettre fort bien d'accord avec les règles pratiques mentionnées plus haut, sans sortir des limites assez restreintes imposées aux constructeurs.

Les formules et théories, d'après lesquelles la limite de travail élémentaire à admettre dans tous les cas possibles, dépendrait uniquement de l'intervalle dans lequel oscillent les efforts agissant sur une pièce considérée, n'ont jamais été acceptées au Ministère I. R. du commerce à Vienne, où on les trouvait en désaccord avec les principes admis dans les calculs de résistance. Au moment de l'instruction qui a précédé la publication de l'ordonnance autrichienne les résultats d'expériences obtenus récemment par le prof. Bauschinger de Munich sur les limites d'élasticité des matériaux† étaient déjà connues dans leur partie la plus importante; il n'y avait donc plus lieu de discuter sur des méthodes de calcul dont le peu de valeur etait manifeste.

Toutefois comme les formules concernant ces méthodes et connues sous le nom de Wöhler, Gerber, Launhardt, Weyrauch . . . . etc. ont été très-répandues et fréquemment appliquées en Allemagne, et sont même en faveur en France auprès de quelques ingénieurs nous croyons devoir les résumer ici sous la forme la plus usitée dans ces derniers temps††, en laissant d'ailleurs à leurs auteurs la responsabilité des raisonnements qui vont suivre.

* Élasticité, comprise comme l'ont admise les praticiens de toute époque, et non pas comme la définissent M. Bauschinger et d'autres expérimentateurs savants.

** Voir p. 62 à 74 de l'ouvrage déjà cité de Love puis p. 79—111, de l'ouvrage déjà cité de Pirel, pour les études concernant les profils non symétriques. Voir ensuite p. 23 de l'ouvrage déjà cité de L. Bresse (éd. 1859), pour le revirement constaté alors en faveur des profils symétriques et reposant sur ce que les coefficients d'élasticité sont à très-peu près égaux pour la compression et l'extension.

*** Voir entre autres un article de M. M. Laissle et Schübler du 4 Avril 1885 (Centralblatt für Bauverwaltung N° 14) où ces praticiens bien connus font opposition formelle contre la propagande de Winkler.

† Voir: „Mittheilungen aus dem techn.-mechan. Laboratorium der k. techn. Hochschule in München v. J. Bauschinger, Th. Ackermann, München, 1886. 13 Heft. Voir aussi les mémoires insérés en Déc. 1886 et en Déc. 1887 dans les Ann. des Ponts et Chaussées.

†† Il serait inexact d'affirmer que les théories et les formules en question se soient vulgarisées entièrement en Allemagne; l'association des réunions allemandes d'architectes et d'ingénieurs s'est occupé des constructions métalliques en 1886. Le résultats des délibérations fut une sorte de cahier des charges-type: „Normalbedingungen für die Lieferung von Eisenconstructionen für Brücken und Hochbau, aufgestellt vom Verbande deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine etc. . . .“ le cahier des charges précise d'une manière detaillée les normes à admettre pour les fournitures, mais non les limites de surcharge et de travail élémentaire.

2. Formules censées fondées sur les expériences de Wöhler* pour la limite du travail élémentaire.

Appelons (comme les auteurs des publications antérieures):

(53)
- $\mathcal{T}$ . . . („Tragfestigkeit") résistance absolue, la résistance de la matière à la rupture lorsque l'effort n'agit qu'une seule fois (ce qu'on appelle vulgairement la limite de rupture);
- $\mathcal{U}$ . . . („Ursprungsfestigkeit") résistance primitive, la résistance à la rupture lorsque l'effort varie un nombre indéfini de fois de 0 à $\mathcal{U}$ (qui concorde à peu près avec ce qu'on appelle vulgairement la limite d'élasticité);
- $\mathcal{S}$ . . . (Schwingungsfestigkeit) résistance à l'oscillation, la résistance à la rupture lorsque l'effort oscille un nombre infini de fois entre $+\mathcal{S}$ (traction) et $-\mathcal{S}$ (compression), résistance qui d'après les auteurs des formules dépasse très peu la moitié de $\mathcal{U}$**.

(54)
- $\mathcal{A}$ . . . (Arbeitsfestigkeit) résistance au travail, la résistance analogue à $\mathcal{U}$ lorsque les efforts répétés et de même sens oscillent entre $\mathcal{A}$ et une certaine limite inférieure $\mathcal{C}$;
- $+\mathcal{A}'$ et $-\mathcal{A}''$, $+\mathcal{A}''$ et $-\mathcal{A}'$ (Arbeitsfestigkeiten für Wechselspannungen) résistances au travail alterné (extension et compression) les résistances conjuguées ensemble, comprises comme $\mathcal{A}$ pour le cas où les efforts oscillent entre la traction $\mathcal{A}'$ et la compression $\mathcal{A}''$ ou entre la traction $\mathcal{A}''$ et la compression $\mathcal{A}'$.

(55) $\mathcal{D}$ . . . (Spielraum der Beanspruchung) amplitude de l'oscillation des efforts, la différence algébrique entre le plus grand et le plus petit des efforts c'est-à-dire $\mathcal{D} = \mathcal{A} - \mathcal{C}$ dans le cas d'efforts de même sens et $\mathcal{D} = \mathcal{A}' + \mathcal{A}''$. dans celui d'efforts alternés.

Avec ces dénominations*** et désignations, on aura d'abord pour des barres soumises seulement à des efforts de même sens (extension ou compression).

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} + \mathcal{D} \qquad\qquad \mathcal{D} = \mathcal{A} - \mathcal{C}$$

et il en résultera en particulier:

$$(56) \quad \begin{cases} \text{. . . . pour } \mathcal{C} = o & \mathcal{A} = \mathcal{U} = \mathcal{D} \\ \text{. . . . pour } \mathcal{D} = o & \mathcal{A} = \mathcal{C} = \mathcal{T}\dagger \end{cases}$$

La résistance au travail $\mathcal{A}$ et évidemment une fonction de la limite inférieure $\mathcal{C}$, répondant aux conditions ci-dessus pour laquelle on admet, sans justification d'ailleurs, la valeur connue sous le nom de Launhardt, comme suit:

$$(57) \quad \mathcal{A} = \frac{\mathcal{T} - \mathcal{U}}{\mathcal{T} - \mathcal{A}}(\mathcal{A} - \mathcal{C}) \text{ . . ou . . } \mathcal{A} = \frac{\mathcal{U}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{U}}{2}\right)^2 + \mathcal{C}(\mathcal{T} - \mathcal{U})}$$

laquelle représente dit-on aussi bien que possible les résultats trouvés par Wöhler††.

Cette relation dans sa première forme convenablement réduite, n'est autre chose la formule souvent citée:

$$(58) \quad \mathcal{A} = \mathcal{U}\left(1 + \frac{\mathcal{T} - \mathcal{U}}{\mathcal{U}} \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}\right) = \mathcal{U}\left(1 + \frac{\mathcal{T} - \mathcal{U}}{\mathcal{U}} \frac{S_{min}}{S_{max}}\right)$$

---

* Pour les lois très connues dites de Wöhler sur la manière dont diminue la limite de rupture pour des efforts répétés en nombre croissant, nous renvoyons aux publications déjà citées de Wöhler, Spangenberg, Winkler etc. . . ainsi que à la p. 693 à 710 du mémoire, de M. Considère, Ann. de P. et Ch. 1885. Les expériences de Wöhler ont du reste été faites spécialement en vue des essieux et bandages et non en vue des ponts.

** Voir: J. Weyrauch, „Festigkeit und Dimensionirungsberechnung", Leipzig, Teubner. 1876. Ouvrage qui défend très-chaudement l'application des nouvelles formules (traduit en français par Svilokossitsch, Paris, Bernard et Cie 1888).

*** Nous avons emprunté la traduction de ces dénominations à la publication déjà citée de M. Svilokossitsch pour ne pas changer des termes déjà introduits en France; nous n'attachons aucune importance à cette nomenclature, puisqu'à notre avis tout ce système de spéculations est destiné à disparaître avec le temps du langage technique.

† Considération inadmissible à priori puisque $\mathcal{A}$ est par definition soumis à la condition d'un nombre infini répétitions, qui est exclue pour $\mathcal{T}$.

†† D'après Gerber on aurait au contraire pour l'effort moyen $\frac{1}{2}(\mathcal{C} + \mathcal{A})$: une formule simple que nous citons (62) plus loin à la page 112.

C'est aussi la formule d'après laquelle on veut faire varier la limite du travail élémentaire d'après le rapport toujours positif $S_{\min} : S_{\max}$ du plus petit au plus grand effort à supporter; on y substitue pour des raisons mal définies $(\mathscr{T} - \mathscr{U}) : \mathscr{U} = 1 : 2$ *.

Pour le cas des efforts alternés d'autre part on a:

$$\mathscr{D} = \mathscr{A}' + \mathscr{A}'' \qquad\qquad \mathscr{A}' = \mathscr{D} - \mathscr{A}''$$

d'où il devra résulter en particulier:

(59) . . . . pour $\mathscr{A}' = \mathscr{A}'' = \mathscr{S}$ . . . . $\mathscr{D} = 2\,\mathscr{S}$

Si l'on considère $\mathscr{A}'$ comme une fonction de $\mathscr{A}''$, celle-ci devra satisfaire aux conditions suivantes:

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{pour } \mathscr{A}'' = o \quad \dots\dots & \mathscr{A}' = \mathscr{U} = \mathscr{D} \\ \text{pour } \mathscr{A}'' = \mathscr{S} \quad \dots\dots & \mathscr{A}' = \mathscr{S} = \frac{1}{2}\,\mathscr{D} \end{array} \right\} \text{ où } \mathscr{D} \text{ peut varier.}$$

On satisfait à ces conditions a l'aide de la formule suivante qui n'est pas plus justifiée que les précédentes:

$$(61) \quad \mathscr{A}' = \frac{\mathscr{U} - \mathscr{S}}{2\mathscr{U} - (\mathscr{S} + \mathscr{A}')}(\mathscr{A}' + \mathscr{A}'') \dots\dots \mathscr{A}' = \frac{\mathscr{U}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\mathscr{U}}{2}\right)^2 - \mathscr{A}''(\mathscr{U} - \mathscr{S})}$$

Cette relation dans sa première forme convenablement réduite n'est autre chose que la formule souvent citée**:

$$(63) \quad \dots\dots \mathscr{A}' = \mathscr{U}\left(1 - \frac{\mathscr{U} - \mathscr{S}}{\mathscr{U}}\frac{\mathscr{A}''}{\mathscr{A}'}\right) = \mathscr{U}\left(1 - \frac{\mathscr{U} - \mathscr{S}}{\mathscr{U}}\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)$$

C'est aussi la formule d'après laquelle on veut faire varier le travail élémentaire pour des efforts alternés, en fonction du rapport toujours positif $S_{\min} : S_{\max}$ du plus petit au plus grand effort. On y substitue sans motifs bien définis $(\mathscr{U} - \mathscr{S}) : \mathscr{U} = 1 : 2$.

En introduisant dans les formules (58) (63) les simplifications mentionnées, en y considérant $S_{\min}$ et $S_{\max}$ comme des valeurs algébriques affectées du signe + pour l'extension du signe — pour la compression, on pourra les réduire à une seule formule, qui appliquée au travail élémentaire en partant de 700^{kg} par cm^2, s'écrit alors:

$$(64) \quad \dots\dots\dots\dots \quad i = 700^{kg}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{S_{\min}}{S_{\max}}\right)$$

XXXIV. Manière dont la question a été traitée dans l'ordonnance autrichienne; limites et coefficients à admettre pour le fer fondu; sécurité résultant des calculs.

1. Comparaison avec les procédés de calcul usités en Allemagne, en tenant compte des expériences de M. Bauschinger.

Si l'on considère la formule (64) citée ci-dessus comme établie par voie purement expérimentale pour la pratique des constructeurs, l'application de cette formule aux ponts de chemins de fer doit conduire à des sections qui offriront toute sécurité — et pour bien des pièces même beaucoup plus que la sécurité nécessaire.

Considérons d'abord les ponts les plus usuels, à poutres reposant librement sur deux appuis. Comme on peut s'en convaincre à l'inspection de la Tab. V du Tome II, le rapport de la charge permanente à la charge mobile dans tous les ponts de portée $l > 40^m$ est à peu près

---

* Cette valeur prise $(\mathscr{T} - \mathscr{U}) = 1 : 2$ implique la relation $\mathscr{U} = \frac{2}{3}\,\mathscr{T}$. Si l'on voulait introduire dans ces calculs la rapport $\mathscr{U} = \frac{1}{2}\,\mathscr{T}$ que les partisans de cette théorie désignent comme plus exact, ce serait le coefficient 1 et non $1/2$ qu'il faudrait mettre dans la formule (64). Les défenseurs de cette formule conviendront donc de son caractère purement empirique s'il ne veulent laisser croire qu'ils n'ont qu'à moitié le courage de donner une expression précise à leur opinion.

** D'après Gerber on aurait au lieu de (58) et (63) pour $\frac{1}{2}(\mathscr{C} + \mathscr{A})$, l'équation unique:

$$(62) \quad . \; . \; (\mathscr{C} + \tfrac{1}{2}\,\mathscr{D})^2 + \mathscr{K}\mathscr{D} = \mathscr{T}^2 \qquad\qquad \mathscr{C} + \tfrac{1}{2}\,\mathscr{D} = -\mathscr{K} + \sqrt{\mathscr{T}^2 + \mathscr{K}(\mathscr{K} + 2\,\mathscr{C})}$$

où $\mathscr{C}$ représente la limite inférieure positive ou négative des efforts et où l'on détermine $\mathscr{K}$ au moyen de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{U}$ ou $\mathscr{S}$, soit par la condition du cas spécial $\mathscr{C} = o$ pour des efforts de même sens, soit par la condition du cas spécial $\mathscr{C} = -\frac{1}{2}\,\mathscr{D}$ pour des efforts alternés.

représenté par $l : 100$ en moyenne*. Si l'on admet ce rapport approximatif il en résulte que pour tous les éléments de bandes on aura $S_{\min} : S_{\max} = l : (l + 100)$ ce qui permet de comparer très-simplement les limites prescrites par le § 4 lit. *a*, 1. et 2. de l'ordonnance autrichienne à celles que donnerait la formule (64). On trouve ainsi pour les bandes de ponts de diverses portées:

(66)						
	portée	$l = 0$	40^m	80^m	120^m	160^m
	d'après l'ordonnance	$i = 700^{kg}$	780^{kg}	840^{kg}	880^{kg}	900^{kg}
	d'après (64)	$i = 700^{kg}$	800^{kg}	855^{kg}	891^{kg}	915^{kg}

Les différences entre les résultats calculés des deux manières n'ont comme on le voit, aucune importance.

Il n'en est pas de même pour les croisillons, et la différence est surtout manifeste pour celles des barres qui se trouvent placées vers le milieu de la portée où les efforts tranchants alternent d'une façon complète et donnent $S_{\min} : S_{\max} = -1$, ce qui exigerait d'après la formule (64) *que le travail du fer fut limité à* 350^{kg} *pour tous les cas possibles* (pour des ponts de 20^m comme pour ceux de 160^m de portée). *L'ordonnance autrichienne fixe des valeurs* qui varient avec la portée; les limites choisies croissant avec le rapport de la charge mobile à la charge totale, comme le fait voir indirectement la comparaison (66) elle-même, doivent convenir également bien à ce point de vue pour toutes les parties composantes d'une même poutre.

Ce que nous venons de constater pour les croisillons des ponts à travées indépendantes, pourrait se répéter pour les croisillons analogues des ponts à poutres continues ou pour les éléments de bandes qui, dans ces ponts, correspondent aux points de l'épure des moments de flexion, où les paraboles rabattues vers le haut coupent la courbe des moments positifs. En voulant appliquer strictement la formule (64) à ces parties de bandes qui correspondent comme on sait aux moments les plus faibles en valeur absolue, et n'y admettant qu'un travail du fer inférieur à 350^{kg} par cm^2, on serait conduit non seulement à ne pas diminuer les sections des bandes en cet endroit mais encore à les augmenter par suite de la continuité. On pourrait presqu'en dire autant des bandes situées sur toute la partie médiane des travées, où comme l'on sait, les moments négatifs sont supérieurs aux moments positifs, quoique ces derniers atteignent aussi des valeurs notables.

Cette théorie spéciale conduirait donc à admettre pour les poutres continues un système de sections qui entraînerait non seulement une extrême complication des calculs** mais aussi une importante augmentation du poids du métal; elle aurait pour conséquence l'abandon du système de la continuité sanctionné par une longue expérience à moins qu'on n'en conclue au contraire que la formule (64) et toutes les déductions qu'on en tire, conduisent à des résultats inadmissibles***.

Le principe erroné représenté par la formule (64), d'après lequel la limite de travail admissible devrait, dans tous les cas possibles, dépendre uniquement de l'intervalle dans lequel oscillent les efforts et pourrait être choisi d'autant plus haut que cet intervalle est plus petit, est en contradiction avec la pratique des constructeurs, avec les lois de l'élasticité dans les métaux enfin et plus encore avec les résultats que M. Bauschinger de Munich a publié en 1886 sur ses expériences concernant les limites d'élasticité dans les fers et aciers.

Les poutres de pont à âme pleine, travaillant à 700^{kg} par cm^2 lors du passage des trains et à 70^{kg} à peine par cm^2 tout le reste du temps, conserveront sans aucun doute leur élasticité bien mieux† que les poutres analogues des constructions soumises d'une manière continue au

* En exprimant par θ le rapport en centièmes de façon que $q : p = \theta : 100$, on voit sur la Tab. V que de $l = 40^m$ à $l = 80^m$ la relation $\theta = l$ rend compte de nos moyennes à quelques centièmes près. De $l = o$ à $l = 40^m$ au contraire $\theta > l$ et l'on peut alors représenter très-bien nos moyennes à l'aide d'un arc de parabole dont la convexité est tournée vers le haut; à savoir avec l en mètres:

$$(65) \quad \ldots \quad l = 0{\cdot}40\,\theta + 0{\cdot}015\,\theta^2 \ldots \qquad \text{ou bien encore} \ldots \quad \theta = \frac{10}{3}\left(\sqrt{16 + 6\,l} - 4\right)$$

Pour $l = 14$ on a $\theta = 20$ au lieu de 14; c'est le plus grand écart absolu, de la loi empirique très-simple $\theta = l$ que nous avons citée. L'écart relatif est plus grand encore pour les petites portées et de $l = 1^m$ à $l = 4^m$, θ dépasse $2l$.

** Pour pouvoir appliquer la formule il faudrait non seulement faire les calculs d'usage qui donnent $S_{\max}$, mais renouveler ensuite toutes ces recherches pour obtenir les efforts $S_{\min}$ dont on n'a que faire en général. Il en résulterait un travail presque double pour les calculs de résistance.

*** Les „Normalbedingungen" de 1886 que nous avons déjà mentionnés ne laissent pas supposer que l'on veuille supprimer ces constructions en Allemagne, puisqu'elles contiennent même pour leur exécution certaines normes (§ 9, B. 1).

† Nous faisons abstraction, bien entendu, dans cette comparaison des effets dynamiques qui sont de nature toute différente, et qui donnent lieu aux études détaillées du N° *XXVIII* : 3.

plus grand travail; tout horloger ou mécanicien peut affirmer que l'élasticité d'un ressort se conservera bien mieux, si on lui permet aussi de se développer et détendre, que si on le maintient en permanence à la plus grande tension. C'est avec ces principes bien simples, et accessibles même aux praticiens qui ne sont point ingénieurs, que la formule (64) se trouve en contradiction flagrante, puisqu'elle tend à prescrire précisément le contraire de ce qui convient. Ces conclusions ont été du reste confirmés d'une manière éminemment scientifique, par les expériences déjà citées de M. Bauschinger sur les limites d'élasticité du fer soudé (Schweisseisen) et du fer fondu (Flusseisen); cet expérimentateur a tiré de ses principaux résultats de véritables lois que nous allons citer ici brièvement*.

M. Bauschinger établit avant tout que la limite d'élasticité, telle qu'elle est comprise généralement comme limite au-dessous de laquelle les déformations disparaissent entièrement après la décharge, n'est réellement pas bien précise, pourvu que l'on possède des instruments de mesure très-sensibles permettant de constater encore les légères déformations permanentes; il définit en conséquence la limite d'élasticité comme limite de proportionalité (ut tensio sic vis)**.

Les déformations permanentes, extrêmement faibles au-dessous de la limite de proportionnalité, augmentent rapidement au-dessus de cette limite avec une vitesse qui croît avec les efforts, jusqu'à ce que ceux-ci atteignent une certaine limite plus élevée que le pr. Bauschinger appelle „Streckgrenze“ ou „Quetschgrenze“ et que nous appellerons „limite de grande extension“ ou „limite de grande compression“ en ajoutant qu'au delà les déformations acquièrent subitement une grande importance de façon à produire dans le diagramme qui s'y rapporte la courbure en saillie aigue bien connue.

Ce que M. Bauschinger appelle „dehnen“ ou „drücken“, signifie soumettre une barre à un effort compris entre la limite d'élasticité et la limite de grande extension ou de grande compression; ce qu'il appelle „strecken“ ou „quetschen“ signifie porter l'effort jusqu'au delà de la limite de grande extension ou de grande compression.

M. Bauschinger fait voir qu'en exerçant sur une barre un effort dépassant la limite d'élasticité et même de grande extension, ou en la soumettant à des changements brusques de température on déplace très-sensiblement ces limites; il examine ensuite l'influence que la repétition des efforts en nombre infini, comme dans les expériences de Wöhler (Dauerversuche) peut avoir sur ces mêmes limites et il parvient à formuler un certain nombre de lois*** pour le fer soudé et fondu (Schweisseisen und Flusseisen) que nous citons exactement ci-après†:

„1. Avec des efforts de tension répétés, dont la limite inférieure est à zéro et dont la „limite supérieure est voisine de la limite d'élasticité primitive, on ne pourra atteindre la „rupture même après avoir répété les efforts un nombre de fois allant de 5 „à 16 millions††.

„2. La résistance de rupture à l'extension ne se trouve pas amoindrie „par suite de ces efforts répétés des millions de fois, elle parait plutôt avoir été „surélevée lorsqu'on essaye de nouveau l'éprouvette par charge morte jusqu'à la rupture.

„3. Des efforts répétés souvent, des millions de fois, n'altèrent en rien „la structure des fers et aciers.

„4. Au moyen d'efforts répétés un grand nombre de fois, oscillant entre „zéro et une certaine limite supérieure située dans le voisinage ou un peu „au-dessus de la limite d'élasticité primitive, on élève celle-ci au-dessus, et „souvent beaucoup au-dessus de la limite supérieure des efforts, et cela d'autant plus que le nombre

* „Mittheilungen aus dem mechan.-techn. Laboratorium . . . etc. 13. Heft“, Th. Ackermann, München, 1886. — Ann. de P. et Ch. Déc. 1886 et Déc. 1887.

** Cette définition établit une limite sensiblement différente de celle que nous considérons dans les constructions, lorsque nous voulons y savoir conservée l'élasticité des matériaux. Il nous serait indifférent que l'extension fut une fonction linéaire ou tout autre de l'effort appliqué, pourvu qu'elle disparût après la décharge. Si donc M. Bauschinger fait voir plus loin qu'en exerçant un effort, qui dépasse la limite d'élasticité ou de grande extension (dehnen und strecken) on peut obtenir une surélévation de la limite de proportionalité ceci n'implique nullement à notre point de vue une amélioration des matériaux.

*** L'ordre dans lequel nous citons ces lois répond aux besoins de notre exposé et ne coïncide pas avec celui de la publication de M. Bauschinger, qui est rédigée à un point de vue différent.

† Pour toutes ces lois citées en traduction exacte du texte allemand il est entendu que tout ce qui est dit pour les efforts de tension s'applique tout aussi bien aux efforts de compression.

†† Ceci exige toutefois que les matériaux des éprouvettes soient exempts de tout défaut. Le moindre défaut, surtout dans les matériaux homogènes (Flusseisen, Flussstahl) fait atteindre la rupture pour des efforts s'élevant à un peu plus ou un peu moins de la limite d'élasticité. Le fer soudé (puddlé) au contraire ne parait presque pas affecté par de petits défauts superficiels. Pour cette espèce de matériaux l'énoncé du texte peut donc être admis sans scrupules.

„de ces derniers est plus considérable; cette surélévation ne peut ce pendant pas dépasser une „certaine limite.

„5. Des efforts répétés (oscillations) entre zéro et une certaine limite supérieure, qui „sont capables de surélever encore la limite d'élasticité au-dessus de leur „propre valeur, n'amènent pas la rupture; mais lorsque la limite supérieure des efforts „est tellement élevée que l'on ne peut plus surélever au delà la limite d'élasticité, la rupture „aura lieu après un nombre limité des efforts.

„6. Les limites $\mathcal{S}$ des oscillations comptées de zéro à des efforts de tension et de com- „pression égaux, ne doivent pas dépasser la „limite d'élasticité naturelle“ si l'on veut „que la matière puisse supporter un nombre indéfini de ces oscillations.“

M. Bauschinger n'a pas établi cette dernière loi comme les précédentes à l'aide de mesures directes, mais il est arrivé à la formuler après avoir reconnu la par faite exactitude de l'équation dite de Gerber au moyen des résultats trouvés par Wöhler, et après avoir ensuite appliqué cette équation à ses propres mesures effectuées pour des efforts de même sens oscillant à partir de zéro*. Cette loi doit donc, comme dit M. Bauschinger, être préalablement „envisagée avec prudence“. Ce qu'il entend du reste à cet égard par „limite d'élasticité naturelle“ (natürliche Elasticitätsgrenze) c'est comme il le fait voir numériquement une grandeur coïncidant de fait avec la „résistance aux oscillations“ $\mathcal{S}$ mentionné plus haut, mais qu'il définit cependant d'une nouvelle manière, ressortant des lois citées ci-après:

„7. Au moyen d'efforts sensiblement croissants alternant entre l'extension et la compression, „la limite d'élasticité de nom contraire ne pourra être amoindrie que si les „efforts viennent à dépasser la limite d'élasticité primitive.

„8. Un effort de tension ou de compression dépassant la limite d'élasticité abaisse „la limite d'élasticité pour compression ou tension (c'est-à-dire de nom contraire) d'autant „plus que les efforts appliqués dépassaient d'avantage la limite d'élasticité considérée; un excédant „de charge relativement faible dans un sens suffit pour rejeter jusqu'à zéro la limite d'élasticité „de sens contraire. Lorsqu'une limite d'élasticité abaissée de cette façon est relevée au moyen „d'un effort appliqué dans le même sens, et surélevée ensuite au-dessus de sa valeur primitive, „alors la limite d'élasticité de sens contraire est aussitôt rejetée jusqu'à zéro ou très-près de zéro.

„9. Lorsque la limite d'élasticité pour la tension ou pour la compression a été abaissée „par un effort de compression ou de tension qui dépassait la limite d'élasticité présente à l'origine, „on peut la relever à fur et à mesure au moyen d'efforts croissants et alter- „natifs de tension et de compression, en n'atteignant toutefois ainsi qu'une „certaine limite notablement inférieure à la limite d'élasticité primitive.“

L'expérience que nous venons d'indiquer, et la limite d'élasticité inférieure qu'elle procure servent de définition à ce qu'on appelle „la limite d'élasticité naturelle“. Cette définition

---

* Tout d'abord l'équation dite de Gerber que nous avons déjà citée (62)

(67) . . . . $$\left(\mathcal{C} + \frac{1}{2}\mathcal{D}\right)^2 + \mathcal{K}\mathcal{D} = \mathcal{T}^2$$

fut essayée sur trois espèces de matériaux (éprouvés par Wöhler avec quatre expériences) à savoir: un essieu de fer du „Phönix“, de l'acier fondu „Krupp“ pour essieux et de l'acier à ressorts. L'équation de Gerber établie sur la base des résultats observés par Wöhler pour efforts de même sens, d'après la méthode des moindres carrés, fut ensuite vérifiée comme exacte pour les autres résultats de Wöhler. De l'équation vérifiée on tire:

(68) . . . . . pour $\mathcal{C} = 0$ $$\frac{1}{4}\mathcal{U}^2 + \mathcal{K}\mathcal{U} = \mathcal{T}^2 \qquad \mathcal{K} = \frac{\mathcal{T}^2 - \frac{1}{4}\mathcal{U}^2}{\mathcal{U}}$$

(69) . . . . . pour $\mathcal{C} = -\frac{\mathcal{D}}{2}$ $$2\,\mathcal{K}\mathcal{S} = \mathcal{T}^2 \qquad \mathcal{S} = \frac{\mathcal{T}^2}{2\mathcal{K}} = \frac{\frac{1}{2}\mathcal{U}}{1 - \left(\frac{1}{2}\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{T}}\right)^2}$$

C'est à l'aide de la dernière formule que M. Bauschinger a déduit de ses propres mesures faites entre 0 et $\mathcal{U}$, les valeurs correspondantes de $\mathcal{S}$. La formule tendrait à prouver du reste que $\mathcal{S}$ surpasse toujours très-peu $\frac{1}{2}\mathcal{U}$ comme nous l'avons indiqué (53). On aurait:

1. Tôle de fer soudé (puddlé)	$\mathcal{T} = 3480^{kg}$	$\mathcal{U} = 2000^{kg}$	$\mathcal{S} = 1090^{kg}$	par cm^2
2. Fer plat 80 : 10 „	„ = 4050	„ = 2200	„ = 1190	
3. Fer plat 40 : 10 „	„ = 4020	„ = 2400	„ = 1320	
4. Tôle de fer fondu	„ = 4360	„ = 2400	„ = 1300	
5. Essieu-Bessemer Thomas	„ = 6120	„ = 3000	„ = 1600	

de M. Bauschinger se trouve ainsi liée à l'idée de matériaux déjà altérés dans leur structure par des efforts exagérés ce qui constituerait une notion peu acceptable pour les praticiens.

Toutes les lois de M. Bauschinger citées ci-dessus, à l'exception de la loi N° 6, fournissent toutefois la preuve que l'on pourrait dans tous les cas possibles tolérer des efforts allant jusqu'à la limite d'élasticité, et la loi N° 6 se trouve de fait élargie par la loi N° 7 dans le même sens. Le travail élémentaire que l'on admet dans les constructions ne dépasse jamais la limite que nous avons nommée $\mathcal{S}$, et il est rationnel d'en conclure que dans de pareilles conditions, même les efforts alternés répétés des millions de fois n'altèrent point les matériaux.

Quant aux expériences très-intéressantes concernant des efforts qui dépassent les limites de grande compression et de grande extension des matériaux, elles ont pour objet des efforts exagérés qui sont exclus de nos constructions et servent seulement à nous prouver qu'une barre, même après avoir été fatiguée outre mesure, peut après qu'elle a été déchargée revenir à son état primitif au bout d'un certain temps, et que par conséquent la charge appliquée par intervalles seulement doit être bien moins défavorable que la charge appliquée en permanence; ainsi:

„10. Les efforts dépassant la limite de grande extension font descendre „la limite d'élasticité souvent jusqu'à zéro, de façon que si l'on mesure la limite „d'élasticité des éprouvettes immédiatement après qu'elles ont été déchargées on trouve qu'elle „est nulle ou très-réduite. Toutefois dans la periode de repos qui succède à la „décharge la limite d'élasticité se relève, atteint après plusieurs jours la valeur de „l'effort qui a produit l'extension, et la surpasse même après un délai suffisamment long, sûre„ment après plusieurs années*."

Nous recommandons enfin à l'attention des constructeurs la loi suivante de M. Bauschinger, concernant les changements de température:

„11. Le refroidissement brusque des matériaux chauffés abaisse la limite d'élasticité et la „limite d'extension, bien plus que ne le ferait un refroidissement lent. Un refroidissement brusque „du fer soudé (Schweisseisen) ou du fer fondu (Flusseisen) et de l'acier Bessemer rejette la limite „d'élasticité à zéro ou à une valeur très-réduite, lorsque ces matériaux étaient chauffés à 500°, „sûrement s'ils l'étaient au rouge cerise, tandis qu'un refroidissement lent, même partant du rouge „cerise se saurait produire un abaissement aussi considérable de la limite d'élasticité."

2. Limites de travail prescrites par le § 4, le § 6, lit. *b*, et le § 16 de l'ordonnance autrichienne du 15 Sept. 1887.

Comme le montrent les discussions précèdent, en fixant, l'échelle des limites de travail que l'on trouve au § 4, lit. *a*, de l'ordonnance, pour le fer soudé (puddlé) dans les constructions de ponts, on ne s'est fondé que sur les lois de l'élasticité des matériaux en tenant compte des règles expérimentales concernant les charges mobiles et permanentes.

On était convaincu tout d'abord de la nécessité de substituer à la limite fixe de 800^{kg} par cm^2 précédemment en vigueur (Ordonnance du 30 Août 1870) une limite variable suivant la portée, partant de 700^{kg} pour les portées les plus petites et n'allant pas au-delà de 900^{kg} pour les portées les plus grandes; ces limites constituent en effet des maxima infranchissables, d'après toutes les considérations théoriques et pratiques dont il est raisonnable de tenir compte.

Les limites admises par l'échelle prescrite sont du reste conçues dans un sens assez libéral, pour que les calculateurs et constructeurs qui sont partisans de méthodes spéciales puissent, comme le montre notamment la comparaison (66), tout en respectant l'ordonnance, y appliquer leur règles de construction particulières, s'ils sont d'avis que l'augmentation du poids du métal qui en résulte est véritablement utile.

Les nombres de la comparaison (66) prouvent que l'échelle équivaut à peu près à une fonction linéaire du rapport de la charge mobile à la charge totale. On s'en est tenu dans le texte de l'ordonnance, à la portée seulement comme à la caractéristique la plus claire et la plus simple, et les nombres convenablement arrondis de l'échelle concernent les portées servant aussi d'entrée aux échelles de surcharge du § 3.

---

* N'oublions pas que c'est de la „limite de proportionnalité" dont il s'agit ici. Les praticiens se garderont donc bien d'en vouloir conclure que le matériaux ainsi traités se sont améliorés; ces matériaux d'après les lois N° 8 et 9 ont du reste perdu un grande partie leur élasticité de sens contraire, et ne peuvent être améliorés en ce qui concerne les efforts alternés que jusqu'à la limite d'élasticité naturelle $\mathcal{S}$.

L'échelle des limites du travail ainsi établie, dont on a pour plus de simplicité étendu l'application aux poutres transversales et aux longerons (§ 4, lit. *a*, 1 et 2), peut être représentée graphiquement par une ligne polygonale*, dont les côtés ont des pentes successives de 2, $1\frac{1}{2}$, 1 et $\frac{1}{2}^{kg}$ par mètre, et couvrent tous une longueur de portée de 40^m; les interpolations très-simples qui en résultent pour les portées intermédiaires, n'amènent jamais de fractions périodiques dans les calculs. Le contour représentatif de l'échelle forme ainsi en quelque sorte une ligne enveloppe de tous les contours analogues, représentant les règles pratiques adoptées par un grand nombre d'ingénieurs**.

Pour les limites fixées au § 4, lit. *a*, 3, 4 et 5, concernant les rivures et les qualités diverses des fers à employer nous avons déjà donné aux N^os^ *XXXII* et *XXXI* les explications les plus importantes. Ajoutons que la limite de 500^{kg} pr. cm^2 pour la résistance au glissement longitudinal des fibres est une sorte de coefficient expérimental approprié à ce genre de déformation et implique une résistance à la rupture relativement plus faible. Cette limite sert à vérifier l'épaisseur à donner aux tôles verticales dans les poutres à âme pleine de hauteur réduite et dans les cas analogues . . . ., mais ne doit pas servir pour verifier l'espacement des rivets dans les mêmes poutres; dans ce dernier cas c'est la limite de 600^{kg} pour la résistance des rivets au cisaillement (500^{kg} en cas d'efforts alternés d'après le § 4, lit. *a*, 3), que l'on doit admettre.

Pour les limites invariables prescrites au § 4, lit. *b* et *c*, concernant la fonte et le bois on doit observer que ces matériaux n'ont plus à jouer qu'un rôle secondaire dans les ponts à construire en Autriche; la fonte n'est plus admise pour les poutres de ponts de chemins de fer, et les poutres en bois n'y peuvent figurer que pour des portées faibles. Les limites fixes adoptées répondent aux usages établis en Autriche***.

Pour les indications du § 4, lit. *d*, et du § 6, lit. *b*, concernant la résistance à l'aboutement ou l'emploi de matériaux tels que la pierre, la brique, le plomb . . . etc., pour les consoles, les colonnes etc. . . . le texte de l'ordonnance a seulement pour objet de provoquer une étude suffisamment sérieuse des projets à présenter, pour que l'autorité compétente puisse les approuver immédiatement. Nous avons donné au N° *XXXII*: 4 des explications très-complètes sur la manière de traiter les questions d'aboutement. En ce qui concerne les matériaux de moindre importance on aura en général à tenir compte du rapport usuel de sécurité entre le travail admissible et la limite de rupture. Pour les consoles de fer, les colonnes et d'autres parties des constructions métalliques, que l'on ne saurait ranger parmi les maîtresses-poutres, les poutres transversales et les longerons, il convient en général de n'admettre pour le travail du fer que des limites inférieures à 700^{kg} par cm^2 (le plus souvent bien inférieures) par ce que les pièces en question doivent pour des motifs pratiques être constituées bien plus solidement que ne sembleraient l'indiquer les calculs de résistance.

Les limites surélevées du § 4, lit. *e*, pour le travail élémentaire, évalué en y comprenant l'action du vent, ont été conçues en considérant que les ouragans prévus au § 3, lit. *f*, peuvent être rangées parmi les évènements très-rares, surtout lorsqu'on suppose que le coup de vent le plus violent coïncide avec le passage du train le plus lourd; il a paru plus raisonnable de tolérer en pareil cas un travail du fer un peu surélevé toujours bien inférieur à la limite d'élasticité, plutôt que de vouloir, sous prétexte de ces efforts accidentels, charger les constructions métalliques de masses de fer exagérées.

Les limites du § 16 pour le travail du fer dans les ponts par-dessus les chemins de fer ou les ponts de routes d'accès, sont conçues par analogie avec les limites établies pour les ponts de chemins de fer (au § 4, lit. *a* et *b*); on y trouve toutefois (§ 16, lit. *a*) une formule ($750^{kg} + 2^{kg}$ par *m* de portée) applicable jusqu'à la portée de 75^m, qui réduit et simplifie notablement ces limites. Ce changement paraîtra justifié si l'on réfléchit que, pour les ponts-routes en général, le rapport de la charge mobile à la charge totale est notablement plus faible, et que ces ponts n'ont que bien rarement des portées dépassant 75^m;

---

* Avec les portées comme abscisses et les limites de travail comme ordonnées. Ce contour polygonal indique pour $53\frac{1}{3}$ mètres de portée l'ancienne limite de 800^{kg} pr. cm^2.

** En particulier toutes les échelles expérimentales citées dans le mémoire du Dr E. Winkler (Cahiers III et IV ex 1877. „Zeitschrift des österr. Ing.- u. Arch.-Vereines") y seraient comprises jusqu'à 120^m de portée.

*** En France on a construit des ouvrages très-considérables en fonte pour les viaducs de chemins de fer (Poutres en arc de Tarascon, piles des viaducs de la Bouble, de la Cère, de Busseau d'Ahun . . . . etc) mais l'emploi de ce métal est limité maintenant à peu près exclusivement aux ponts en arc auxquels on désire donner un caractère plus monumental que ne le comporte jusqu'ici l'emploi du fer ou de l'acier (Pont Sully à Paris).

au-delà de ces portées on peut, le cas échéant, tolérer sans scrupule le travail maximum de 900^{kg} par cm^2 dans les maîtresses-poutres, puisque la surcharge maxima prévue par les calculs ne sera presque jamais appliquée de fait.

3. Limite de travail à admettre pour le fer fondu (acier doux).

Le fer fondu est plus résistant que le fer soudé; sa limite d'élasticité est plus élevée, et dans le voisinage de la rupture, il est susceptible de prendre un plus grand allongement: la limite de travail qui peut lui être imposée doit donc être notablement plus élevée que pour le fer soudé. On admet généralement que la limite d'élasticité du fer soudé se rompant à 3600^{kg} correspond à une charge de 1600^{kg} par cm^2, celle du fer fondu dont la résistance est voisine de 4500^{kg} est d'environ 2400; on serait donc conduit par la comparaison des limites d'élasticité à adopter pour le dernier de ces métaux des coefficients d'environ 50°/₀ supérieurs à ceux qui sont admis pour le fer soudé. Si on considère le rapport des résistances, qui est environ celui de cinq à quatre, on est conduit, pour le fer fondu, à majorer du quart en moyenne les coefficients de travail admis pour le fer soudé. On a ainsi, dans le premier cas, des efforts variant de 1050^{kg} (ponts de moins de 40^m de portée) à 1350^{kg} (ponts de 160^m de portée et au-dessus), et dans le second cas des efforts variant de 875^{kg} à 1125^{kg} *. Dans la plupart des ouvrages en fer fondu cités plus haut (Ponts Morand et Lafayette, pont sur la Braye, viaduc de Gagnières, pont d'Arenc, pont de Rochechien) le coefficient de travail est de 1000^{kg}; pour rendre ce coefficient comparable à ceux qui viennent d'être indiqués il faut le majorer d'un septième environ pour tenir compte des trous de rivets que les ingénieurs français ne déduisent pas dans leurs calculs: on arrive ainsi à 1143^{kg}, chiffre qui, pour des ponts dont la portée est généralement supérieure à 40^m, et inférieure à 80^m, se trouve compris entre les chiffres correspondants des deux échelles que nous venons d'indiquer. La Commission du Conseil général des Ponts et Chaussées appelée à formuler, au nom du Gouvernement français, un avis au sujet des ponts à construire sur le Danube en Roumanie a proposé les coefficients de 900^{kg} pour les poutres transversales et de 1200^{kg} pour les maîtresses-poutres, déduction faite des trous de rivets, ce qui, pour des portées de 50 et de 165^m rentre également à peu près dans les limites précitées.

A notre avis le fer fondu (Flusseisen) que l'on devra employer de préférence pour les ponts métalliques est celui qui provient des fours dits Martin-Siemens; ce métal devra posséder une résistance à la rupture d'environ 4500^{kg} par cm^2 en donnant un allongement de plus de 22°/₀ et une limite d'élasticité d'environ 2400^{kg}; il devra être presqu'insensible aux effets de la trempe.

Dans ces conditions, avec les calculs de résistance plus exacts dont on dispose actuellement, et pourvu que l'homogénéité soit comparable à celle que l'on obtient dans les premières usines françaises, on pourra faire varier le travail admissible de 900^{kg} à 1200^{kg} selon la portée. Pour un métal ayant une résistance comprise entre 4000 et 4500^{kg} donnant un allongement de plus de 24 à 22°/₀ et une limite d'élasticité d'au moins 2000^{kg} il conviendra de réduire la limite supérieure à un nombre compris entre 1000 et 1200^{kg}, toujours inférieur à la moitié de la limite d'élasticité.

La limite extrême de 1000 à 1200^{kg} pour le travail maximum pourra, lorsqu'on tient compte des effets du vent, atteindre 1125 à 1350^{kg} dans les contrées où les ouragans sont rares; là où ceux-ci sont fréquents, il sera prudent de s'en tenir aux limites citées, ou de ne les majorer que fort peu.

Pour les rivets en fer fondu très-doux ayant une résistance minima de 3600 à 3800^{kg} et un minimum d'allongement de 30 à 28°/₀ on pourra admettre une limite de travail de 700^{kg}, portée à 1000^{kg} dans le calcul des efforts fait en tenant compte de l'action du vent.

Pour la résistance des tôles et barres au cisaillement longitudinal on pourra admettre les mêmes coefficients. Nous déconseillons l'emploi de tôles de moins de 8^{mm} que ces calculs justifieraient. Remarquons enfin que pour les pays exposés à de grands froids des précautions spéciales sont nécessaires. Ainsi que l'ont exposé les ingénieurs russes au congrès de chemins de fer de Milan en 1887, lorsque la température s'abaisse vers — 25 degrés centigrades, le fer fondu acquiert de plus en plus les propriétés de la fonte. Les bris de rails sont fréquents et on doit ralentir la vitesse des trains. Dans ces pays l'emploi de fer fondu très-doux se recommande.

En résumé pour les ponts à construire en fer fondu ou en acier, la difficulté du travail admissible dans le métal mis en œuvre, a bien moins d'importance que celle qui concerne les conditions de fabrication et de réception des fers et aciers à employer. Les limites que nous

* Les valeurs moyennes que l'on obtiendrait en ne se rapportant ni aux limites d'élasticité ni à celles de rupture mais en cherchant à s'en rapprocher également, seraient 912^{kg} à 1237^{kg}.

recommandons ci-dessus, concernent les ponts à construire en France et en Autriche. Dans des pays moins tempérés il y aura lieu d'admettre des limites moins élevées. Au bord de la mer et dans des contrées où la température varie peu, on aura peut-être avantage à employer des fers et aciers plus durs; il faut alors écarter les défauts superficiels et recuire les pièces de façon à faire disparaître toute trace de trempe, dans le métal mis en œuvre*.

4. Sécurité relative que procurent les calculs de résistance dans les ponts.

Les calculs de résistance très-étudiés que l'on applique actuellement aux projets de ponts en fer, pour déterminer les dimensions à donner à toutes leurs parties, y introduisent une sécurité très-satisfaisante; cette sécurité est cependant très-différente dans les divers cas qui se présentent, suivant que les trains en circulation représentent plus ou moins en grandeur, forme et étendue, les charges mobiles que l'on a prévues dans les calculs.

La grandeur (intensité par *m*) de la charge mobile dépend surtout du matériel roulant en service; la forme et l'étendue de cette charge au contraire, dépendent bien moins de la composition et longueur des trains que du système de construction adopté pour les ponts.

Les ponts usuels à une voie et avec travées indépendantes, ont à subir à très-peu près, lors du passage de chaque train lourd, le travail maximum prévu dans toutes leurs parties composantes.

Les ponts en arc à une voie n'ont à subir par suite de la circulation des trains, que le travail maximum prévu dans les parties voisines des culées. La partie médiane de l'arc ne se trouve soumise à la surcharge la plus défavorable, que lorsqu'elle se trouve seule en charge les reins de l'arc étant alors non chargés, ou bien lorsqu'elle est déchargée les reins se trouvant alors simultanément en charge. Ces conditions de surcharge qui exigent que le train soit préalablement séparé en deux parties au moins, produisant le maximum de charge ensemble ou chacune séparément ne se réalisent que rarement.

Les ponts à une voie et à poutres continues n'auront dans la plupart de leur parties composantes, presque jamais à subir le travail maximum prévu; on aurait dans bien des cas même la plus grande difficulté à produire, avec le matériel roulant disponible, toutes les combinaisons de surcharge théoriquement prévues, et il doit paraître évident à tout praticien que ces hypothèses tout au plus possibles, ne seront jamais réalisées dans le service ordinaire de l'exploitation, en tant qu'il s'agit de ponts à grandes portées.

Quant aux ponts à deux voies construits avec deux maîtresses-poutres seulement des divers systèmes, la probabilité que le travail maximum prévu du métal puisse être réalisé dans les conditions normales, diminuera encore, en tant que les croisements de trains de la plus lourde espèce sur ces ponts, peuvent être considérés comme des évènement rares.

Ces explications suffiront pour faire voir que les ponts à double voie, construits avec deux maîtresses-poutres continues, offrent une sécurité beaucoup plus grande que la plupart des ponts construits différemment; ajoutons que, par suite de la continuité, le rapport des charges mobiles et permanentes se trouve très-notablement abaissé, ce qui augmente encore la sécurité.

d) Mesures restrictives pour le matériel roulant (§§ 12 et 16 de l'ordonnance).

XXXV. Restrictions relatives aux ponts construits conformément à l'ordonnance du 15 Sept. 1887.

1. Mesures prohibitives générales.

Si dans les prescriptions des § 2 et 3 de l'ordonnance, qui sont applicables à tous les ponts à construire dorénavant en Autriche, on a largement tenu compte de tout le matériel roulant actuellement en circulation, il importe qu'inversement dans les commandes de véhicules à venir, et dans la formation des trains les plus lourds, les limites de surcharge fixées d'un commun accord soient respectées. C'est là le but des prescriptions restrictives du § 12 de l'ordonnance; nous nous contenterons de les commenter pour les surcharges du § 3 qui offrent seules quelques difficultés**.

* Au Forth-bridge on exige actuellement une résistance de 4725 à 5197^{kg} avec 20% d'allongement pr. les pièces tendues et de 5353 à 5827^{kg} avec 17% d'allongement pr. les pièces comprimées; on exige les recuits . . .

** En ce qui concerne les prescriptions fort simples limitant l'espace libre à ménager sur les ponts nous remarquerons que d'après l'ordonnance du Ministère I. R. du commerce du 1 Février 1888 N° 2840 le matériel roulant est soumis aux restrictions plus sévères qui résultent des conventions de l'association des administrations de chemins de fer allemands en date du 19 et 20 Mai 1882 à Graz, et en date du 28 et 30 Juillet 1886 à Salzbourg.

Nous avons fait voir en détail, aux Nos *XIV* à *XXVII*, comment et jusqu'à quel point les limites de surcharge établies au § 3 de l'ordonnance au moyen des échelles a et b, peuvent être représentées en quelque sorte par le matériel roulant indiqué pour les lignes d'intérêt général (lit. *d*) et les lignes d'intérêt local (lit. *h*), ainsi que par les trains formés en les combinant dans certaines conditions.

Ces trains ne représentent toutefois que des exemples caractéristiques des trains de surcharge les plus lourds qui sont encore admissibles sur les trois classes de lignes (100, 80 et 60%); il serait impossible de prévoir d'une manière absolue toutes les combinaisons de charges et d'écartements d'essieux lourds, qui peuvent se produire dans le service de l'exploitation et qui provoqueront des effets de surcharge rentrant ou non dans les prévisions des échelles a et b de l'ordonnance. Les prescriptions restrictives du § 12 ne peuvent donc pas conduire à émettre des règles prohibitives précises qui géneraient les progrès possibles dans la construction des locomotives, ou dans la formation des trains, et l'on ne peut à cet égard que citer deux règles pratiques fort simples aux quelles les services de l'exploitation ont déclaré pouvoir se rallier en Autriche.

1. Dans le service courant de la traction on ne devra pas placer plus de deux locomotives l'une à la suite de l'autre; même dans les manœuvres de gare ou de composition de trains, ainsi que dans les transports de locomotives, on devra éviter absolument d'avoir sur les ponts un rassemblement de plus de trois locomotives.

2. Les charges d'essieu seront limitées à 14^t pour les lignes d'intérêt général, à 12^t pour les lignes d'intérêt local jouissant de la réduction de 20% (charge = 80% des échelles) et à 8^t5 ou exceptionnellement 9^t au plus, pour les lignes d'intérêt local jouissant de la réduction de 40% (charge = 60% des échelles)*.

2. Classification des véhicules d'après leur pouvoir surchargeant, et barême des trains de surcharge admissibles.

En général c'est à l'aide du calcul seulement (voir les Nos *XIX* à *XXV*) que l'on pourra vérifier dans chaque cas particulier si un train donné est admissible ou non. Toutefois si l'on veut éviter d'avoir à effectuer ces calculs pénibles, et se contenter de vérifier l'admissibilité approximativement à l'aide d'une sorte de barême de trains de surcharge, dressé pour les trois classes de lignes (100, 80 et 60%), on pourra y arriver par une méthode relativement simple, qui divise en quelque sorte le problême généralement très-compliqué, entre les degrés d'une même échelle; de cette façon l'incertitude qui subsistera encore après cette division sera comprise entre les limites étroites correspondant à deux degrés consécutifs et pourra le plus souvent être négligée en pratique. Cette méthode consiste à ranger les véhicules lourds du matériel roulant en catégories, suivant leur pouvoir surchargeant et à dresser avec les types des diverses catégories un tableau d'un grand nombre de combinaisons de trains, répondant le plus possible aux trains lourds que l'on peut rencontrer dans le service. On trouve toutes ces indications réunies dans le tableau qui suit (page 121):

Le tableau supérieur comprend 6 catégories L_1 L_2 L_3 . . . L_6 pour les locomotives, 5 catégories T_1 T_2 T_3 . . . T_5 pour les tenders et trois catégories W_1 W_2 W_3 pour les wagons**. La dernière colonne du tableau est plus spécialement destinée à servir d'échelle des charges pour ranger un véhicule donné dans l'une des catégories établies, suivant son poids par mètre courant. Pour les tenders et les wagons (à condition que leurs effets de surcharge ne dépassent pas ceux de la locomotive) cette considération du poids par mètre courant suffit en général. Pour les locomotives au contraire il est nécessaire, notamment lorsqu'il s'agit de portées faibles, d'examiner si les quotients indiqués dans la 5me et 6me colonne ne sont pas dépassés par la machine que l'on considère***; cela arrivera du reste très-rarement, parce que les limites inscrites dans

* La charge d'essieu a été limitée à 14^t (cette condition n'est pas absolument obligatoire) aux § 15 et § 105 des conventions techniques de l'association des administrations de chemins de fer allemands en date de Constance 26 et 28 Juin 1876, en date de Graz 19 et 20 Mai 1882 et en date de Salzbourg 28 et 30 Juillet 1886. Les échelles a et b du § 3 de l'ordonnance autrichienne, couvrent encore une charge d'essieu de 15^t pour les petites portées, ce qui correspond à 12^t et 9^t pour les lignes à 80% et 60%. En France il y a des ingénieurs qui voudraient porter la charge d'essieu jusqu'à 16 et même 17 tonnes.

** Ces catégories de wagons concernent le service ordinaire des marchandises. Les voitures sont généralement plus légères pr. *m* sur chaque ligne que les wagons. Pour les wagons lourds spéciaux à réservoir, à canons, à plaques de blindage . . . . etc., il va sans dire qu'il faudra une vérification spéciale, à moins que l'on ne puisse les ranger dans nos catégories, ce qui arrivera le plus souvent pour les wagons-réservoirs.

*** Dans le cas d'un excès constaté il faudra ou ranger la machine dans la catégorie immédiatement supérieure si cela suffit pour la vérification cherchée, ou faire les calculs de détail pour les portées données.

(1) . . . . *Catégories de véhicules, suivant leur pouvoir surchargeant.*

Désignation des véhicules			Essieux		Quotient du poids total (en tonnes) par la		
Exemples		Catégorie	Nombre maximum	Charge maxima	Somme des écartements adjacents à un essieu intermédiaire en m	distance entre les essieux extrêmes en m	longueur totale mesurée entre les tampons en m
				t	t	t	t
Locomotives	(14) (14) (14) (14) 3·1 – 1·2 – 1·2 – 1·2 – 2·8	L_1	4	14	< 23·3	< 15·6	< 5·9
	(13) (14) (13) (12) 3·1 – 1·2 – 1·2 – 1·2 – 2·8	L_2	4	14	< 21·7	< 14·4	< 5·5
	(14) (14) (14) 3·1 – 1·2 – 1·2 – 2·8	L_3	3	14	< 17·5	< 17·5	< 5·1
	(12) (12) (12) 2·9 – 1·2 – 1·2 – 2·4	L_4	3	12	< 15·0	< 15·0	< 4·7
	(9) (10) (10) (9) 2·8 – 1·2 – 1·0 – 1·2 – 2·6	L_5	4	12	< 17·3	< 11·2	< 4·3
	(8·5) (8·5) (8·5) 3·1 – 1·1 – 1·1 – 1·9	L_6	3	8·5	< 11·6	< 11·6	< 3·5
Tenders	(10) (10) (10) 1·7 – 1·4 – 1·6 – 1·4	T_1	3	12	—	environ < que 10·0	< 4·9
	(14) (13) 1·9 – 2·7 – 1·4	T_2	2	14	—	10·0	< 4·5
	(8·5) (8·5) (8) 1·9 – 1·4 – 1·6 – 1·4	T_3	3	8·5	—	8·5	< 4·0
	(12) (10) 1·6 – 2·6 – 1·3	T_4	2	12	—	8·5	< 4·0
	(8·5) (8·5) 1·4 – 2·2 – 1·3	T_5	2	8·5	—	7·5	< 3·5
Wagons	(12) (12) 2·0 – 3·3 – 2·0	W_1	2	12	—	—	< 3·3
	(10) (10) 2·0 – 3·2 – 2·0	W_2	2	12	—	—	< 2·8
	(8) (8) 2·0 – 3·0 – 2·0	W_3	2	8·5	—	—	< 2·3

(2) . . . . . *Barême des principaux trains lourds admissibles.*

No	Lignes d'intérêt général (100%)
1	$3 \times (L_2 + T_1)$ . . + nombre quelconque $\times W_3$
2	$3 \times (L_2 + T_2)$ . . + " " $\times W_3$
3	$2 \times (L_1 + T_1)$ . . + " " $\times W_3$
4	$2 \times (L_1 + T_2)$ . . + " " $\times W_3$
5	$2 \times (L_2 + T_1)$ . . + " " $\times W_2$
6	$2 \times (L_2 + T_2)$ . . + nombre quelconque $\times W_2$
7	$2 \times$ (Tend. L_1) . . + " " $\times W_1$
8	$2 \times$ (Tend. L_2) . . + " " $\times W_1$
9	$3 \times (L_3 + T_1)$ . . + " " $\times W_3$
10	$3 \times (L_3 + T_2)$ . . + " " $\times W_3$
11	$3 \times (L_3 + T_2)$ . . + nombre quelconque $\times W_2$
12	$2 \times (L_3 + T_1)$ . . + " " $\times W_1$
13	$2 \times (L_3 + T_2)$ . . + " " $\times W_1$
14	$3 \times (L_4 + T_1)$ . . + " " $\times W_2$
15	$3 \times (L_4 + T_3)$ . . + " " $\times W_2$
16	$3 \times (L_4 + T_3)$ . . + nombre quelconque $\times W_1$
17	$3 \times (L_4 + T_4)$ . . + " " $\times W_1$
18	$2 \times (L_4 + T_1)$ . . + " " $\times W_1$
19	$3 \times (L_5 + T_1)$ . . + " " $\times W_2$
20	$3 \times (L_5 + T_3)$ . . + " " $\times W_1$

No	Lignes d'intérêt local (80%)
21	$3 \times (L_4 + T_3)$ . . . . . . + nomb.qc. $\times W_3$
22	$3 \times (L_4 + T_4)$ . . . . . . + " " $\times W_3$
23	$2 \times (L_4 + T_1)$ . . . . . . + " " $\times W_3$
24	$2 \times (L_4 + T_3)$ . . . . . . + " " $\times W_2$
25	$2 \times (L_4 + T_4)$ . . . . . . + " " $\times W_2$
26	$2 \times$ (Tend. L_4) . . . . . . + nomb.qc. $\times W_2$
27	$1 \times$ (Tend. L_4) + $1 \times (L_4 + T_1)$ + " " $\times W_3$
28	$1 \times$ (Tend. L_4) + $1 \times (L_4 + T_3)$ + " " $\times W_2$
29	$1 \times$ (Tend. L_4) + $1 \times (L_4 + T_4)$ + " " $\times W_2$
30	$1 \times (L_4 + T_1)$ . . . . . . + " " $\times W_3$
31	$1 \times$ (Tend. L_4) . . . . . . + nomb.qc. $\times W_1$
32	$3 \times (L_5 + T_3)$ . . . . . . + " " $\times W_3$
33	$3 \times$ (Tend. L_5) . . . . . . + " " $\times W_2$
34	$2 \times (L_5 + T_3)$ . . . . . . + " " $\times W_2$
35	$2 \times (L_5 + T_4)$ . . . . . . + " " $\times W_2$
36	$1 \times$ (Tend. L_5) . . . . . . + " " $\times W_1$

No	Lignes d'intérêt local (60%)
37	$3 \times$ (Tend. L_6) . . . . . . + nomb.qc. $\times W_3$
38	$2 \times (L_6 + T_5)$ . . . . . . + " $\times W_3$
39	$1 \times$ (Tend. L_6) + $1 \times (L_6 + T_5)$ + " $\times W_3$
40	$1 \times (L_6 + T_3)$ . . . . . . + " $\times W_3$

le tableau conviennent à peu près aux exemples de la 1re colonne qui sont choisis pour des écartements d'essieux relativement très-petits.

Ces exemples de véhicules lourds ont été appropriés aux types les plus lourds que l'on trouve dans les trains de marchandises circulant en Autriche; ils sont aussi d'accord avec les indications du § 3 lit. *d* et *h* de l'ordonnance autrichienne du 15 Septembre 1887, et pourront en général convenir assez bien pour englober tous les types analogues que l'on rencontre dans l'Europe centrale; nous remarquerons toutefois qu'entre les catégories L_5 et L_6 il subsiste évidemment, une lacune; les machines les plus usuelles pour les lignes d'intérêt local en Autriche se rapprochent généralement des catégories L_4 et L_6, et L_5 n'est adopté que par une seule grande Compagnie. Les locomotives à grande vitesse ou même à trains de voyageurs, n'ont pas été prises en considération ici, parce que, pour chaque ligne, leur pouvoir surchargeant est toujours moindre que celui des machines à marchandises.

Pour vérifier qu'un train proposé est admissible sur une ligne donnée, on commencera par ranger les locomotives, tenders et wagons dans les catégories qui les concernent, et on comparera ensuite le train proposé aux trains lourds admissibles du barême, parmi les quels on trouvera presque toujours celui qui fournit approximativement la preuve que l'on cherche.

Pour dresser et élargir le barême des trains admissibles il ne sera généralement pas nécessaire d'effectuer les calculs expliqués en détail aux Nos *XIV* à *XXVII* à propos des échelles de surcharge de l'ordonnance autrichienne, puisqu'il ne s'agit ici que d'une vérification approximative. On se contentera en pareil cas de vérifier les moments de flexion produits. Pour les ponts à grande portée on supposera à cet effet qu'un seul et même essieu reste placé au milieu de la portée, et on assimilera la charge des wagons placés de part et d'autre du groupe des locomotives et tenders occupant le milieu du pont, à une charge uniformément répartie p_w par mètre de voie pour laquelle on trouve facilement la formule:

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad p_w = \frac{4\,M_{\mathfrak{a}} + 2\,\Sigma\,a_n P_n - l\,\Sigma\,P_n}{(l'_w)^2 + (l''_w)^2}$$

où nous désignons par:

l .... la portée de l'un des ponts considérés;
$M_{\mathfrak{a}}$ .... le moment au milieu d'après l'échelle $\mathfrak{a}$ (Tab. V, Tome II) de l'ordonnance;
l'_w .... l''_w ...... les longueurs de trains de wagons sur les parties de portée disponibles de part et d'autre du groupe des locomotives et tenders;
$\Sigma\,a_n P_n \ldots \Sigma\,P_n$ .. les sommes déjà définies antérieurement et s'appliquant ici à la longueur $(l - l'_w - l''_w)$ du groupe de locomotives et tenders.

Les sommes Σ restent invariables pour des portées l croissantes, dépassant le groupe central de locomotives et tenders; les Moments $M_{\mathfrak{a}}$ sont connus et calculés à l'avance*; le calcul de p_w sera donc fort simple. On trouve ainsi des valeurs qui sont généralement décroissantes lorsque l croît. Les trains de surcharge figurant comme admissibles au barême, y ont été inscrits en tenant compte des erreurs inévitables à tolérer comme nous l'avons expliqué en traitant la question des surcharges. En considérant l'ensemble de tous ces trains on pourra se convaincre que les prescriptions de surcharge de l'ordonnance autrichienne, tiennent compte du matériel roulant en service de la manière la plus complète; nous pouvons même ajouter que les 80% des échelles $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ dépassent en général les charges équivalentes aux trains circulant sur la très-grande majorité des lignes à pente faible. Les charges ainsi calculées doivent d'ailleurs être considérées comme un minimum, pour toutes les lignes de chemins de fer ayant à subir une circulation de transit importante.

XXXVI. Restrictions concernant les ponts qui ne sont pas construits d'après les prescriptions de l'ordonnance autrichienne du 15 Septembre 1887.

1. Généralités.

La plupart des ponts construits antérieurement en Autriche satisfont aux exigences de l'ordonnance autrichienne de 1870, tandis qu'en France c'est la circulaire ministérielle du 9 Juillet 1877 actuellement encore en vigueur**, qui a servi de base aux calculs de résistance d'un grand

* Valeurs Tab. V du Tome II, dont on prendra 80% ou 60% pour les lignes d'intérêt local, suivant le cas.

** Dans l'édition allemande de cet ouvrage, les explications du présent numéro concernent les ponts autrichiens et l'ordonnance autrichienne de 1870, qui n'ont pas d'intérêt pour le lecteur français. Nous avons pour cette raison pris ici la circulaire française de 1877 comme point de comparaison, avec les nouvelles prescriptions autrichiennes de 1887, qui ont un intérêt général au point de vue du progrès dans l'art des constructions métalliques.

nombre de ponts. Cette circulaire constitue vis-à-vis des circulaires ou ordonnances antérieures un progrès très-réel; il sera sans doute intéressant pour le lecteur français de constater que les ponts construits d'après ses prescriptions sont dans des conditions relativement fort bonnes au point de vue de l'application des principes que nous venons d'exposer, et de voir en même temps où et jusqu'à quel point elles sont en défaut. Nous considérons donc successivement les ponts satisfaisant exactement à la circulaire française de 1877, puis ceux qui ont été construits antérieurement en France où dans d'autres pays.

2. Ponts construits d'après la circulaire française de 1877.

Ce qui caractérise la circulaire française de 1877, lorsqu'on la compare à l'ordonnance autrichienne de 1887, c'est que les charges prescrites sont en général trop faibles, et en particulier beaucoup trop faibles pour les croisillons pour lesquels on avait négligé d'émettre des prescriptions spéciales. Les erreurs qui pourraient en résulter pratiquement sont toutefois corrigées en grande partie par la limite relativement faible de 600^{kg} pr. cm^2 admise d'une manière invariable pour le travail du fer dans toutes les pièces et pour toutes les portées*. Il en résulte que la comparaison que nous faisons dans les deux tableaux (4) (5) qui suivent à la page 124 (voir aussi Tab. I et II du Tome II) n'est pas aussi défavorable à la circulaire qu'on pourrait le croire tout d'abord:

Pour mieux faire comprendre la portée de cette comparaison nous rappellons que la circulaire de 1877 ne prescrit pour le travail du fer que la seule limite fixe de 600^{kg} pr. cm^2, tandis que l'ordonnance de 1887 prescrit une échelle de limites variant de 700 à 900^{kg} pr. cm^2 suivant la portée.

Les deux tableaux contiennent chacun cette échelle (i) mais ne mentionnement pas la limite fixe de 600^{kg} qui est bien connue. Le travail comparé $i = (p' : p) \times i$ indiqué dans les deux tableaux pour chacune des trois classes de surcharge (100, 80 et 60%) est un nombre fictif dont le rapport à 600^{kg} indique exactement le rapport cherché entre la rigueur des prescriptions françaises et celle des prescriptions autrichiennes ainsi qu'il est facile de s'en rendre compte:

Supposons d'abord que l'on considère un système de trois ponts de même ouverture qui seraient construits exactement en conformité des prescriptions autrichiennes pour les trois classes de surcharge (100, 80 et 60%) et admettons pour simplifier que les charges permanentes sont proportionnelles aux charges mobiles à supporter**, ou, ce qui revient au même, proportionnelles aux charges totales

(6) . . . . $(p + q)$, $0{\cdot}8\,(p + q)$ et $0{\cdot}6\,(p + q)$, p et q représentant la charge mobile et la charge permanente par m de voie, pour les lignes d'intérêt général.

Si l'on compare maintenant les trois ponts considérés avec un autre qui serait construit pour le même travail limite (i) du fer que les précédents, et pour la charge mobile (p') de la circulaire française ainsi que pour la charge permanente (q') qui en dérive, on trouvera que le rapport entre la rigueur des conditions admises pour le dernier pont et la rigueur de celles qui sont admisses pour les trois premiers, sera exprimé par:

(7) . . $$\frac{p' + q'}{p + q} = \frac{p'}{p} \quad \text{c'est-à-dire aussi} \quad \frac{p'}{0{\cdot}8\,.\,p} \quad \text{et} \quad \frac{p'}{0{\cdot}6\,.\,p}$$

Si maintenant pour le dernier pont le travail du fer était limité à 600^{kg} et non à (i) kg par cm^2, ce pont répondant alors entièrement aux prescriptions de la circulaire française de 1877, on aurait évidemment pour le rapport cherché des rigueurs relatives en France et en Autriche:

(8) . . $$\frac{p'}{p} \times \frac{i}{600} \quad \text{c'est-à-dire aussi} \quad \frac{p'}{0{\cdot}8\,.\,p} \times \frac{i}{600} \quad \text{et} \quad \frac{p'}{0{\cdot}6\,.\,p} \times \frac{i}{800}$$

Si donc pour simplifier nous désignons par (p) la charge pr. m de l'une quelconque des trois classes de l'ordonnance autrichienne, il est prouvé par ce qui précède que le travail comparé $i' = (p' : p) \times i$ divisé par 600, donne bien le rapport mentionné tout d'abord.

Ceci posé on reconnaît immédiatement sur le tableau (4) que quant aux bandes la circulaire française ne se trouve en défaut par rapport l'ordonnance autri-

* Il y a toutefois une réserve à faire en ce qui concerne cette limite de 600^{kg}; elle a été fixée en tenant compte de l'usage admis en France de calculer le travail du fer en supposant les efforts répartis sur les sections entières sans déduction des trous de rivets. La limite à comparer serait donc un peu plus élevée.

** Ceci n'est pas tout à fait rigoureux, car dans les ponts des lignes d'intérêt local par exemple, la charge permanente est un peu plus lourde que ne l'indiquerait la proportion.

(4) . . . . *Travail comparé du fer dans les bandes*

des ponts construits conformément à l'ordonnance du 15. Septembre 1887 (Autriche)

et surchargés conformément à la circulaire ministérielle du 9 Juillet 1877 (France).

Portée	Circulaire de 1877 Charge p'	Nouvelle Ordonnance — Charge p de l'échelle a — 100%	80%	60%	Travail pr. cm² i	Travail comparé $i' = (p' : p) \times i$ — 100%	80%	60%
1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	t	t	t	t	Kg	Kg	Kg	Kg
1	24·000	30·000	24·000	18·000	702	562	702	935
1·5	16·000	20·000	16·000	12·000	703	562	703	937
2·0	12·000	15·000	12·000	9·000	704	563	704	938
2·5	11·250	13·500	10·800	8·100	705	588	735	980
3	10·500	13·100	10·480	7·860	706	566	708	943
4	10·200	12·300	9·840	7·380	708	587	734	978
5	9·800	11·500	9·200	6·900	710	605	756	1008
6	9·500	10·900	8·720	6·540	712	620	775	1033
7	8·800	10·300	8·240	6·180	714	617	771	1028
8	8·300	9·700	7·760	5·820	716	612	765	1020
9	7·800	9·160	7·280	5·460	718	611	764	1018
10	7·300	8·500	6·800	5·100	720	618	773	1030
11	6·900	8·200	6·560	4·920	722	607	758	1012
12	6·500	7·900	6·320	4·740	724	596	745	993
13	6·200	7·600	6·080	4·560	726	592	740	987
14	5·900	7·300	5·840	4·380	728	588	735	980
15	5·700	7·000	5·600	4·200	730	594	743	990
16	5·500	6·900	5·520	4·140	732	583	729	972
17	5·400	6·800	5·440	4·080	734	582	728	970
18	5·200	6·700	5·360	4·020	736	571	714	952
19	5·100	6·600	5·280	3·960	738	570	713	950
20	4·900	6·500	5·200	3·900	740	558	698	930
21	4·820	6·455	5·164	3·873	742	554	693	923
22	4·740	6·410	5·128	3·846	744	550	688	917
23	4·660	6·365	5·092	3·819	746	546	683	900
24	4·580	6·320	5·056	3·792	748	542	678	903
25	4·500	6·275	5·020	3·765	750	538	673	897
26	4·460	6·230	4·984	3·738	752	538	673	897
27	4·420	6·185	4·948	3·711	754	539	674	898
28	4·380	6·140	4·912	3·684	756	539	674	898
29	4·340	6·095	4·876	3·657	758	540	675	900
30	4·300	6·050	4·840	3·630	760	540	675	900
31	4·280	6·005	4·804	3·603	762	543	679	905
32	4·260	5·960	4·768	3·576	764	546	683	910
33	4·240	5·915	4·732	3·549	766	549	686	915
34	4·220	5·870	4·696	3·522	768	552	690	920
35	4·200	5·825	4·660	3·495	770	555	694	925
36	4·180	5·780	4·624	3·468	772	558	698	930
37	4·160	5·735	4·588	3·441	774	561	701	935
38	4·140	5·690	4·552	3·414	776	565	706	942
39	4·120	5·645	4·416	3·387	778	568	710	943
40	4·100	5·600	4·480	3·360	780	571	714	951
41	4·080	5·570	4·456	3·342	781	572	715	953
42	4·060	5·540	4·432	3·324	783	574	718	957
43	4·040	5·510	4·408	3·306	784	575	719	958
44	4·020	5·480	4·384	3·288	786	576	720	960
45	4·000	5·450	4·360	3·270	787	577	721	962
46	3·980	5·420	4·336	3·252	789	579	724	965
47	3·960	5·390	4·312	3·234	790	580	725	967
48	3·940	5·360	4·288	3·216	792	582	728	970
49	3·920	5·330	4·264	3·198	793	583	729	972

Portée	Circulaire de 1877 Charge p'	Nouvelle Ordonnance — Charge p de l'échelle a — 100%	80%	60%	Travail pr. cm² i	Travail comparé $i' = (p' : p) \times i$ — 100%	80%	60%
1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	t	t	t	t	Kg	Kg	Kg	Kg
50	3·900	5·300	4·240	3·180	795	585	731	975
52	3·860	5·240	4·192	3·144	798	587	734	978
54	3·820	5·180	4·144	3·108	801	590	738	983
56	3·780	5·120	4·096	3·072	804	593	741	988
58	3·740	5·060	4·048	3·036	807	596	745	993
60	3·700	5·000	4·000	3·000	810	599	750	998
2	3·660	4·940	3·952	2·964	813	602	753	1003
4	3·620	4·880	3·904	2·928	816	605	756	1008
6	3·580	4·820	3·856	2·892	819	608	760	1013
8	3·540	4·760	3·808	2·856	822	611	764	1018
70	3·500	4·700	3·760	2·820	825	614	768	1023
2	3·480	4·640	3·712	2·784	828	621	776	1035
4	3·460	4·580	3·664	2·748	831	628	785	1047
6	3·440	4·520	3·616	2·712	834	635	794	1058
8	3·420	4·460	3·568	2·676	837	642	802	1070
80	3·400	4·400	3·520	2·640	840	649	811	1081
2	3·380	4·370	3·496	2·622	842	651	814	1085
4	3·360	4·340	3·472	2·604	844	653	816	1088
6	3·340	4·310	3·448	2·586	846	655	819	1091
8	3·320	4·280	3·424	2·568	848	658	822	1097
90	3·300	4·250	3·400	2·550	850	660	825	1100
2	3·280	4·220	3·376	2·532	852	662	828	1103
4	3·260	4·190	3·352	2·514	854	664	830	1107
6	3·240	4·160	3·328	2·496	856	667	834	1111
8	3·220	4·130	3·304	2·478	858	669	836	1115
100	3·200	4·100	3·280	2·460	860	671	839	1118
2	3·190	4·070	3·256	2·442	862	675	844	1125
4	3·180	4·040	3·232	2·424	864	680	850	1133
6	3·170	4·010	3·208	2·406	866	684	855	1140
8	3·160	3·980	3·184	2·388	868	689	861	1148
110	3·150	3·950	3·160	2·370	870	694	868	1157
2	3·150	3·920	3·136	2·352	872	701	876	1168
4	3·140	3·890	3·112	2·334	874	705	881	1175
6	3·130	3·860	3·088	2·316	876	710	888	1183
8	3·120	3·830	3·064	2·298	878	715	894	1191
120	3·110	3·800	3·040	2·280	880	720	900	1200
2	3·100	3·780	3·024	2·268	881	723	904	1205
4	3·090	3·760	3·008	2·256	882	725	906	1208
6	3·080	3·740	2·992	2·244	883	727	909	1211
8	3·070	3·720	2·976	2·232	884	729	911	1215
130	3·060	3·700	2·960	2·220	885	732	915	1220
2	3·050	3·680	2·944	2·208	886	734	918	1223
4	3 050	3·660	2·928	2·196	887	739	924	1231
6	3·040	3·640	2·912	2·184	888	741	926	1235
8	3·030	3·620	2·896	2·172	889	744	930	1240
140	3·020	3·600	2·880	2·160	890	746	933	1243
145	3·010	3·550	2·840	2·130	892	756	945	1260
150	3·000	3·500	2·800	2·100	895	767	959	1278
160	2·990	3·400	2·720	2·040	900	791	989	1318

(5) . . . . *Travail comparé du fer dans les croisillons*

des ponts construits conformément à l'ordonnance du 15 Septembre 1887 (Autriche)

et surchargés conformément à la circulaire ministérielle du 9 Juillet 1877 (France).

Portée	Circulaire de 1877 Charge p'	Nouvelle Ordonnance: Charge p de l'échelle b			Nouvelle Ordonnance: Travail pr. cm² i	Travail comparé i' = (p' : p) × i		
		100%	80%	60%		100%	80%	60%
1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	t	t	t	t	Kg	Kg	Kg	Kg
1	24·000	30·000	24·000	18·000	702	562	702	935
1·5	16·000	25·000	20·000	15·000	703	450	562	750
2·0	12·000	20·000	16·000	12·000	704	422	528	703
2·5	11·250	18·000	14·400	10·800	705	441	551	735
3	10·500	17·200	13·760	10·320	706	431	539	718
4	10·200	15·600	12·480	9·360	708	463	579	772
5	9·800	14·000	11·200	8·400	710	497	621	828
6	9·500	13·200	10·560	7·920	712	512	640	853
7	8·800	12·400	9·920	7·440	714	512	640	853
8	8·300	11·600	9·280	6·960	716	512	640	853
9	7·800	10·800	8·640	6·480	718	519	649	865
10	7·300	10·000	8·000	6·000	720	526	658	877
11	6·900	9·700	7·760	5·820	722	514	643	857
12	6·500	9·400	7·520	5·640	724	501	626	835
13	6·200	9·100	7·280	5·460	726	495	619	825
14	5·900	8·800	7·040	5·280	728	488	610	813
15	5·700	8·500	6·800	5·100	730	490	613	817
16	5·500	8·320	6·656	4·992	732	484	605	807
17	5·400	8·140	6·512	4·884	734	487	609	812
18	5·200	7·960	6·368	4·776	736	481	601	802
19	5·100	7·780	6·224	4·668	738	484	605	807
20	4·900	7·600	6·080	4·560	740	477	596	795
21	4·820	7·530	6·024	4·518	742	475	594	792
22	4·740	7·460	5·968	4·476	744	472	590	787
23	4·660	7·390	5·912	4·434	746	470	588	783
24	4·580	7·320	5·856	4·392	748	468	585	780
25	4·500	7·250	5·800	4·350	750	465	581	775
26	4·460	7·180	5·744	4·308	752	467	584	778
27	4·420	7·110	5·688	4·266	754	469	586	782
28	4·380	7·040	5·632	4·224	756	470	588	783
29	4·340	6·970	5·576	4·182	758	472	590	787
30	4·300	6·900	5·520	4·140	760	474	593	790
31	4·280	6·830	5·464	4·098	762	477	596	795
32	4·260	6·760	5·408	4·056	764	481	601	802
33	4 240	6·690	5·352	4·014	766	485	606	808
34	4·220	6·620	5·296	3·972	768	490	613	817
35	4·200	6·550	5·240	3·930	770	493	616	822
36	4·180	6·480	5·184	3·888	772	498	622	830
37	4·160	6·410	5·128	3·846	774	502	628	837
38	4·140	6·340	5·072	3·804	776	507	634	845
39	4·120	6·270	5·016	3·762	778	511	639	852
40	4 100	6·200	4·960	3·720	780	516	645	860
41	4·080	6·165	4·932	3·699	781	517	646	862
42	4·060	6·130	4·904	3·678	783	519	649	865
43	4·040	6·095	4·876	3·657	784	520	650	867
44	4·020	6·060	4·848	3·636	786	521	651	868
45	4·000	6·025	4·820	3·615	787	522	653	870
46	3·980	5·990	4·792	3·594	789	524	655	873
47	3·960	5·955	4·764	3·573	790	525	656	875
48	3·940	5·920	4·736	3·552	792	527	659	878
49	3·920	5·885	4·708	3·531	793	528	660	880

Portée	Circulaire de 1877 Charge p'	Nouvelle Ordonnance: Charge p de l'échelle b			Nouvelle Ordonnance: Travail pr. cm² i	Travail comparé i' = (p' : p) × i		
		100%	80%	60%		100%	80%	60%
1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	t	t	t	t	Kg	Kg	Kg	Kg
50	3·900	5·850	4·680	3·510	795	530	663	883
52	3·860	5·780	4·624	3·468	798	533	666	888
54	3·820	5·710	4·568	3·426	801	536	670	893
56	3·780	5·640	4·512	3·384	804	539	674	898
58	3·740	5·570	4·456	3·342	807	542	678	903
60	3·700	5·500	4·400	3·300	810	545	681	908
2	3·660	5·430	4·344	3·258	813	548	685	913
4	3·620	5·360	4·288	3·216	816	551	689	918
6	3·580	5·290	4·232	3·174	819	554	693	923
8	3·540	5·220	4·176	3·132	822	557	696	928
70	3·500	5·150	4·120	3·090	825	560	700	933
2	3·480	5·080	4·064	3·048	828	567	709	945
4	3·460	5·010	4·008	3·006	831	574	718	957
6	3·440	4·940	3·952	2·964	834	581	726	968
8	3·420	4·870	3·896	2·922	837	588	735	980
80	3·400	4·800	3·840	2·880	840	595	744	992
2	3·380	4·760	3·808	2·856	842	598	748	997
4	3·360	4·720	3·776	2·832	844	601	751	1001
6	3·340	4·680	3·744	2·808	846	604	755	1007
8	3·320	4·640	3·712	2·784	848	607	759	1012
90	3·300	4·600	3·680	2·760	850	610	763	1017
2	3·280	4·560	3·648	2·736	852	613	766	1022
4	3·260	4·520	3·616	2·712	854	616	770	1027
6	3·240	4·480	3·584	2·688	856	619	774	1032
8	3·220	4·440	3·552	2·664	858	622	778	1037
100	3·200	4·400	3·520	2·640	860	625	781	1042
2	3·190	4·360	3·488	2·616	862	630	788	1050
4	3·180	4·320	3·456	2·592	864	636	795	1060
6	3·170	4·280	3·424	2·568	866	641	801	1068
8	3·160	4·240	3·392	2·544	868	647	809	1078
110	3·150	4·200	3·360	2·520	870	652	815	1087
2	3·150	4·160	3·328	2·496	872	660	825	1100
4	3·140	4·120	3·296	2·472	874	666	833	1110
6	3·130	4·080	3·264	2·448	876	672	840	1120
8	3·120	4·040	3·232	2·424	878	678	848	1130
120	3·110	4·000	3·200	2·400	880	684	855	1140
2	3·100	3·975	3·180	2·385	881	687	859	1145
4	3·090	3·950	3·160	2·370	882	690	863	1150
6	3·080	3·925	3·140	2·355	883	693	866	1155
8	3·070	3·900	3·120	2·340	884	696	870	1160
130	3·060	3·875	3·100	2·325	885	699	874	1165
2	3·050	3·850	3·080	2·310	886	702	878	1170
4	3·050	3·825	3·060	2·295	887	707	884	1178
6	3·040	3·800	3·040	2·280	888	710	888	1183
8	3·030	3·775	3·020	2·265	889	714	893	1190
140	3·020	3·750	3·000	2·250	890	717	896	1195
145	3·010	3·687	2·950	2·212	892	728	900	1213
150	3·000	3·625	2·900	2·175	895	741	926	1235
160	2·990	3·500	2·800	2·100	900	769	961	1282

chienne que pour la classe de (100 %) et des portées au-dessous de 4ᵐ ou comprises entre 12 et 60ᵐ, les différences ne dépassant toutefois pas 10 %, c'est-à-dire restent comprises entre des limites pratiquement insignifiantes. Il résulte donc de la comparaison que la circulaire française est encore aujourd'hui presque suffisamment rigoureuse quant au calcul des bandes, qu'à cet égard elle est même d'une rigueur trop grande pour les ponts à portées considérables.

On reconnaît au contraire sur le tableau qu'en ce qui concerne les croisillons la circulaire française se trouve en défaut par rapport à l'ordonnance autrichienne, pour la classe de (100 %) et toutes les portées inférieures à 82ᵐ, ainsi que pour la classe de (80 %) et pour toutes les portées comprises entre 20 et 31ᵐ. Les différences entre ces dernières limites de portée varient de 20 à 23 % pour la classe de (100 %) et de 1 à 4 % seulement pour la classe de (80 %). Mais cette évaluation ne concerne que les croisillons voisins des appuis et, pour ceux qui en sont éloignés, l'erreur augmente très-sensiblement comme le fait voir notre Tableau N° *XXII*; elle se trouve toutefois atténuée en France encore plus qu'en d'autres pays, par l'usage établi de constituer les croisillons vers le milieu des travées, notablement plus forts que ne semblent l'exiger les calculs. Il résulte donc de la comparaison que la circulaire française est sensiblement insuffisante quant au calcul des croisillons, pour les ponts des lignes d'intérêt général (100 %) sauf pour des portées très-grandes pour lesquelles ses prescriptions sont même trop rigoureuses.

En résume la circulaire française de 1877 dépasse les prescriptions de la classe de (80 %) de l'ordonnance autrichienne pour presque toutes les portées; elle suffit donc généralement pour le gros du matériel roulant en circulation et ce n'est que pour les lignes plus fatiguées exploitées avec des machines à quatre essieux couplés comme les suppose la classe de (100 %), qu'il y aura lieu d'examiner la question des croisillons, pour des portées inférieures à 60ᵐ environ.

Ajoutons enfin que le § 18 de l'ordonnance autrichienne, concernant les ponts déjà existants, admet qu'avant de procéder à une reconstruction partielle ou totale, on pourra tolérer un travail du fer allant jusqu'à 950ᵏᵍ par m^2. En acceptant cette limite au lieu de 810ᵏᵍ par m^2 correspondant dans les tableaux comparatifs (4) et (5) à la portée de 60ᵐ, qui est à très peu près la plus grande que nous ayons à considérer d'après ce qui précède, ce sera 17 % que l'on pourrait tolérer en plus pour les croisillons, ce qui pratiquement parlant ferait disparaître même cette difficulté.

3. Ponts construits antérieurement d'une manière quelconque en France ou dans d'autres pays.

Lorsqu'on voudra juger de la stabilité de ponts métalliques ne satisfaisant ni aux exigences de la circulaire française de 1877 ni à celles de l'ordonnance autrichienne de 1887, et dont les calculs de résistance ne seront pas connus, on devra évidemment chercher avant tout à ce procurer les dessins d'exécution qui s'y rapportent ou, à défaut, au moins la date exacte de l'exécution des travaux; celle-ci, constitue en pareil cas une donnée assez importante, et met l'ingénieur expérimenté en mesure de retrouver les principes et méthodes de calculs en usage à cette époque.

Les plans du projet avec les calculs sur la base desquels il a été dressé doivent toujours, surtout pour les ouvrages très-anciens, être utilisés avec la plus grande circonspection. Même lorsqu'on se sera assuré au moyen d'un certain nombre de mesures de contrôle que l'exécution se trouve à peu près d'accord avec le projet, il y aura lieu d'examiner tout particulièrement si les joints sont suffisamment couverts, si la rivure aux attaches des bandes est convenable, si les tôles verticales y ont assez d'épaisseur . . . . etc. La pratique de la vérification des ponts anciens a fourni la preuve qu'en pareille matière, les constructions que l'on rencontre présentent des défauts souvent très-graves, sans parler des hypothèses de surcharge et des procédés de calculs, qui actuellement, par suite des progrès de la science, se trouvent très-sensiblement insuffisants. A ces défauts et causes d'erreur viennent s'ajouter les effets d'un long service, l'usure par la rouille, par les petits mouvements dans les assemblages . . . . etc., ensorte que la vérification de ces anciennes constructions exige un examen très-attentif, à faire non seulement sur les lieux même le marteau en main, mais encore au bureau par le calcul avec tous les perfectionnements usités actuellement.

Lorsqu'on aura à examiner des ponts métalliques construits depuis 1877, pour lesquels les ingénieurs ont tenu compte de surcharges plus élevées que celles que prévoit la circulaire ministérielle, ou pourra tirer parti de ces calculs et dessins plus récents, pour juger de la stabilité actuelle des ouvrages.

La manière de procéder pour vérifier, puis renforcer ou reconstruire s'il y a lieu, les anciennes constructions métalliques, sera naturellement différente d'un pays à l'autre; nous ne pouvons à cet égard exposer ici que ce qui a été prescrit et établi en Autriche*.

4. Manière de procéder en Autriche pour vérifier et renforcer les anciennes constructions.

Les comparaisons et les évaluations dont il est question ci-dessus pourront dans bien des cas renseigner l'ingénieur sur la stabilité des constructions anciennes eu égard aux trains qu'elles ont à supporter; d'après le texte de l'ordonnance autrichienne du 15 Septembre 1887, elles ne pourront toutefois que servir à désigner d'avance celles de ces constructions pour lesquelles une amélioration ou une reconstruction est la plus pressante. D'après le § 18 de l'ordonnance les Administrations de chemins de fer devront soumettre tous leurs ponts à une vérification par le calcul et à une surcharge d'épreuve, en admettant à cet effet des trains composés chacun de deux des plus lourdes locomotives de la ligne considérée ainsi que des plus lourds wagons et procédant pour tout le reste exactement d'après les indications du § 11 de la présente ordonnance (ponts à construire).

Suivant ces dispositions, tous les ponts sans exception aucune, doivent être soumis à un entretien régulier et à des vérifications et surcharges d'épreuve périodiques; l'on a dressé à cet effet d'accord avec les Administrations des grandes compagnies de chemins de fer, des modèles d'imprimés uniformes, servant non seulement à enrégistrer les résultats obtenus, mais aussi a rédiger les rapports à présenter conformément au § 18, lit. *a* et *b*, de l'ordonnance, à l'Inspection I. R. des chemins de fer de l'Autriche**.

Il y a près de deux ans que l'on s'occupe en Autriche de ces calculs vérifications et épreuves de ponts métalliques, en faisant renforcer ou reconstruire les constructions trop faibles, et les expériences acquises à cette occasion, permettent de recommander pour les cas analogues de procéder à peu près de la manière suivante:

On dressera avant tout pour la ligne que l'on considère les barêmes des trains de surcharge les plus lourds quant aux moments de flexion et quant aux efforts tranchants, et en opérant comme nous l'avons exposé aux N^os^ *XVI* à *XVII* et *XIX* à *XXVI* ou formera le tableau graphique des contours enveloppes réprésentant pour toutes les portées la charge uniforme équivalente par mètre qui peut couvrir les moments de flexion ou les efforts tranchants produits. Remplaçant ensuite pour simplifier les deux contours obtenus par deux contours polygonaux ayant pour abscisses celles qui servent d'entrée aux échelles du § 3 de l'ordonnance, on obtiendra deux échelles **a** et **b** spéciales*** qui donnent pour la ligne considérée les charges équivalentes que les ponts devront pouvoir supporter dans le sens du § 18 de l'ordonnance, avec les limites de tolérance fixées par ce dernier pour le travail maximum des matériaux, mais aussi avec toute la rigueur des calculs de résistance actuellement usités.

En même temps on fera relever sur les lieux toutes les données nécessaires concernant les ponts à étudier; ce travail très-délicat ne peut être mené à bonne fin que par un ingénieur connaissant la pratique des ponts métalliques. Les données à recueillir seront relevées à peu près aussi complètement que nous l'indiquons plus loin pour les exemples N^os^ *XLIII*, *XLIV* et l'on aura soin d'y noter ce qui concerne les rivures, les couvre-joints, les attaches .... etc., ainsi que tous les vices et défauts constatés.

Pour faire la vérification, on pourra dans la plupart des cas introduire dans les calculs une simplification très-avantageuse, si les contours enveloppes obtenus avec les trains de surcharge spéciaux de la ligne, sont à peu près contenus dans ceux qui résultent des trains types

* La digression sur les ponts en France, qui occupe jusqu'ici une partie du N° *XXXVI* nous était imposée par la force des choses, elle est conçue dans une pensée tout à fait analogue à celle que a inspiré la comparaison faite dans l'édition allemande pour les ponts anciennement construits en Autriche, mais pour ceux-ci on arrive à des résultats moins favorables. Ce qui suit est conforme à l'édition allemande.

** Pour arrêter les imprimés proposés on a convoqué à la séance de la commission du 21 Octobre 1887 les représentants de la Direction I. R. générale des chemins de fer de l'Etat ainsi que ceux des douze compagnies de chemins de fer les plus importantes ayant toutes des bureaux de constructions métalliques. Les formulaires (G. J. Z. 14146 du 19 Nov. 1887) ont été publiés au N° 3 du recueil officiel des ordonnances de l'an 1888.

*** Ces échelles pourront notamment servir à vérifier la stabilité des ponts à poutres continues, pour lesquelles il serait aussi pénible qu'inutile d'effectuer les calculs en prenant pour base les trains de surcharge eux-mêmes.

indiqués au § 3, lit. *d* et *h* de l'ordonnance pour l'une des classes de (100%) ou (80%). On fera dans ce cas la vérification pour les échelles générales du § 3, quitte à ne considérer les échelles spéciales qu'en cas de doute. Ce procédé un peu modifié de vérification par le calcul, non seulement simplifière les operations en permettant d'utiliser nos tables auxiliaires du Tome II, mais offrira encore le grand avantage d'amener à constater d'une manière précise quelles lignes ou parties de lignes, satisfont ou non, aux classes de (100%) et (80%) de l'ordonnance.

Lorsqu'on aura dû se décider à renforcer ou à reconstruire un pont, on aura à distinguer deux cas. Si les travaux de reconstruction sont des travaux de peu d'importance conçus suivant les tendances du § 18 de l'ordonnance d'après les échelles spéciales de surcharge de la ligne, on pourra aussi profiter des limites de tolérance fixées par ce § 18 (950^{kg} par cm^2) et la construction renforcée ne doit en pareil cas être considérée que comme un ouvrage provisoire, à tolérer un certain temps avec la condition expresse des mesures restrictives que les échelles spéciales de la ligne imposent pour le matériel roulant. Si au contraire il s'agit de travaux de reconstruction importants, analogues à une remise à neuf, on devra procéder en conformité des stipulation des §§ 3 et 4 (ponts à construire) de l'ordonnance et constituer alors un ouvrage définitif.

C. Procédés pratiques pour effectuer les calculs de résistance.

a) Fers laminés et poutres à âme pleine.

XXXVII. Calculs concernant les profils divers des fers et poutrelles laminés.

1. Généralités.

Les calculs de résistance que nous avons en vue ici sont ceux qui sont basés sur la théorie usuelle de l'extension simple, de la flexion simple . . . . etc., où l'on suppose qu'il s'agisse de corps solides élastiques constitués en faisceaux de fibres.

Toutes les forces extérieures agissant sur une section considérée d'un corps solide ainsi constitué peuvent, comme l'on sait, être composées ensemble de façon à se réduire à un moment de flexion et à une force unique appliqués à la section. Le moment de flexion sera représenté par un couple dont le plan est perpendiculaire à celui de la section. La force unique appliquée au centre de gravité se décompose en un effort tranchant qui est dans le plan de la section et un effort longitudinal qui lui est perpendiculaire; ce dernier est à considérer notamment pour les ponts en arc*.

Pour les poutres et poutrelles ordinaires soumis à la flexion sous l'action d'un système de forces verticales, le moment de flexion et l'effort tranchant supposés appliqués à la section, maintiennent en équilibre toutes les actions moléculaires agissant d'un côté, et remplacent ainsi celles qui agissent en sens contraire de l'autre côté; donc on peut donc supprimer cette partie de la pièce supposée coupée à l'endroit de la section. Pour mieux caractériser l'équilibre artificiel ainsi établi, nous imaginerons de résumer les effets moléculaires de la partie restante de la pièce en un moment de résistance et une résistance au cisaillement, ces deux effets réunis faisant équilibre au moment de flexion et à l'effort tranchant.

La flexion des pièces que nous avons à considérer principalement dans les calculs de résistance rentre presque toujours dans le cas de la déformation plane (fibre moyenne plane), où le profil de section possède au moins un axe de symétrie parallele ou perpendiculaire au plan du moment de flexion, ce dernier agissant alors perpendiculairement à l'axe neutre (ici axe de flexion). Dans le cas plus général d'un profil de section tout à fait quelconque, on détermine comme l'on sait, l'axe neutre (aussi axe de flexion ici) en prenant dans l'ellipse d'inertie de la section le diamètre conjugué à la direction suivant la quelle son plan coupe celui du moment de flexion. De l'ensemble de toutes les flexions élémentaires il résulte alors une déformation qui n'est généralement pas plane**.

---

* Plus généralement, un système quelconque de forces appliquées à un corps solide peut toujours être réduit à deux forces uniques dont l'une passe par un point donné à volonté, ou bien encore à une force unique passant par un point donné et à un couple. (Delaunay mécanique rationnelle p. 251.)

** Voir pour toute cette théorie: Bresse, Cours de mécanique professé à l'école des P. et Ch. 1re partie p. 4 à 66. — Paris, Mallet Bâchelier. L'ellipse centrale d'inertie de la section est le lieu géométrique des points obtenus en portant à partir du centre de gravité sur un axe quelconque de la section la longueur $1 : \sqrt{J}$ en guise de rayon vecteur, J étant le moment d'inertie de la section rapporté à cet axe.

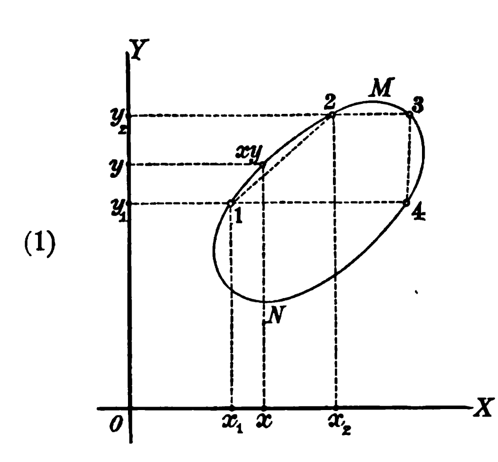
Dans le cas où la flexion simple que nous venons de considérer se combine avec une extension simple ou une compression simple* l'*axe neutre* s'écarte du centre de gravité parallèlement à lui-même, tandis que l'*axe de flexion* conserve sa position primitive passant par le centre de gravité. Le lieu géométrique des points d'application sur la section, d'une force résultante agissant dans le sens des fibres et provoquant la déformation considérée, de façon que l'axe neutre produit reste tangent au profil de section, est ce que l'on nomme le *contour du noyau central.* Inversement toute force résultante agissant dans l'intérieur du noyau central ne produira dans toutes les fibres de la section que des efforts élémentaires de même sens.

En outre des effets de déformation dont nous venons de parler, il importe de considérer encore dans les constructions de ponts, les effets de *glissement longitudinal des fibres* dûs à ce que nous appellerons l'*effort de cisaillement longitudinal* agissant dans le sens des fibres ou dans le sens où les fers ont été laminés.

Ces théories sont depuis longtemps comprises dans le programme de l'enseignement de toutes les écoles techniques supérieures. Nous nous contenterons donc de rappeler ici les formules les plus essentielles dont on fait usage dans les calculs de ponts, en indiquant les simplifications ou formes en partie nouvelles, dont elles sont susceptibles.

2. Fonctions Ω, m, J en général.

Les fonctions d'un profil de section, les plus importantes pour les calculs de résistance, sont la surface de section Ω, le moment statique m et le moment d'inertie J; les deux premières servant à déterminer le centre de gravité de la section et l'axe neutre, la dernière servant à déterminer le moment de résistance de la pièce et le travail élémentaire dans les fibres extrêmes.



Considérons en général le profil de section comme formé (fig. 1) par une courbe quelconque. Soit $F(x, y) = o$ l'équation de cette courbe dans un système de coordonnées où l'on a choisi pour axe des abscisses l'axe auquel doivent être supposés rapportés les moments m et J. On peut obtenir les trois fonctions Ω, m, J par le calcul intégral de deux manières différentes suivant que l'on effectue les intégrations en prenant y ou x comme variable indépendante ou en d'autres termes suivant que l'on suppose la section divisée en tranches horizontales que nous nommerons *segments aux abscisses*, ou en tranches verticales que nous nommerons *segments aux ordonnées.*

La partie du profil 1 . . 2 par exemple donnera pour le segment aux abscisses $1 \,.\, y_1\, y_2 \,.\, 2$, compris entre les abscisses des deux points 1 et 2 du profil:

(2) . . $$\Omega = \int_1^2 x\,dy \qquad m = \int_1^2 xy\,dy \qquad J = \int_1^2 xy^2 dy$$

et pour le segment aux ordonnées $1 \,.\, x_1\, x_2\, 2$, compris entre les ordonnées des points 1 et 2 du profil:

(3) . . $$\Omega = \int_1^2 y\,dx \qquad m = \frac{1}{2}\int_1^2 y^2\,dx \qquad J = \frac{1}{3}\int_1^2 y^3\,dx$$

Si l'on suppose que pour l'un ou l'autre de ces systèmes d'intégration le point 1 restant immobile, le point 2 parcourre le contour fermé du profil $1\,2\,M\,N\,1$ jusqu'à revenir au point de départ 1, il est clair que les valeurs Ω, m, J obtenues seront exactement les fonctions cherchées** pour le contour fermé donné.

En pratique c'est presque toujours le procédé des segments aux ordonnées que l'on a utilisé jusqu'ici, tant pour les méthodes graphiques que pour les calculs numériques, car les

* Voir les explications données au N° *XXXII*: 4 sur la théorie et les formules pratiques de la résistance à l'aboutement.

** Sur la figure (1) considérée ici, les formules (2) donneraient les valeurs cherchées avec le signe —, les formules (3) les donneraient avec le signe +, ce qui dépend du sens suivant lequel on parcourt la courbe fermée.

valeurs de y^2 et y^3 se trouvent dans des tables de carrés et de cubes*, tandis qu'il faudrait calculer les produits xy et xy^2 qui seraient nécessaires pour les formules (2).

Pour obtenir rapidement une valeur numérique approchée de l'une des fonctions Ω, m, J sans avoir recours à des transformations graphiques spéciales ou à des procédés mécaniques, c'est la méthode d'intégration approximative dite de Simpson qui est préférable. On dessine le profil considéré à grande échelle, afin de pouvoir y mesurer plus exactement toutes les ordonnées (ou abscisses) nécessaires. On divise ensuite le segment à étudier en $2n$ tranches de même épaisseur et l'on désigne par $z_0\ z_1\ z_2\ \ldots\ z_{2n}$ les $(2n+1)$ valeurs de la dérivée à intégrer suivant l'une quelconque des formules (2) ou (3), et qui comprennent les $2n$ tranches du segment**. Si nous supposons pour fixer les idées qu'il s'agisse de segments aux ordonnées et si nous désignons par Δx l'épaisseur de chacune des $2n$ tranches, on aura généralement:

$$(4)\quad \int_0^{2n} z\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left[z_0 + z_{2n} + 4(z_1 + z_3 + \ldots z_{2n-1}) + 2(z_2 + z_4 + \ldots + z_{2n-2})\right]$$

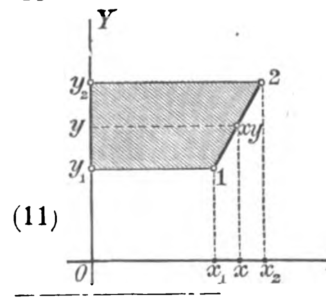
Cette formule suppose comme l'on sait, que la courbe représentant z en fonction de x, peut-être représentée dans chacun des intervalles $z_0\ z_2,\ z_2\ z_4,\ \ldots\ z_{2n-2}\ z_{2n}$ par un arc de parabole ayant son axe parallèle à celui des z, et exige par conséquent que dans chacun des couples de tranches correspondants, le profil de section ne présente aucun point singulier; on devra donc choisir en conséquence les segments et les tranches qui les composent. Pour les intégrales (3) on aura en particulier***:

$$(5)\quad \left[\Omega\right]_0^{2n} = \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots y_{2n-2})\right]$$

$$(6)\quad \left[m\right]_0^{2n} = \frac{\Delta x}{6}\left[y_0^2 + y_{2n}^2 + 4(y_1^2 + y_3^2 + \ldots y_{2n-1}^2) + 2(y_2^2 + y_4^2 + \ldots y_{2n-2}^2)\right]$$

$$(7)\quad \left[J\right]_0^{2n} = \frac{\Delta x}{9}\left[x_0^3 + y_{2n}^3 + 4(y_1^3 + y_3^3 + \ldots y_{2n-1}^3) + 2(y_2^3 + y_4^3 + \ldots y_{2n-2}^3)\right]$$

Ce procédé de calcul donne toujours des résultats bien suffisants en pratique, et si comme cela arrive en matière de ponts, on n'a que très-rarement à étudier quelques profils laminés spéciaux tels que ceux des rails, des fers Zorès . . . etc., on ne sera guère tenté de vouloir rechercher des procédés analytiques plus exacts ou des méthodes graphiques plus expéditives. La détermination pratique des fonctions Ω, m, J ayant toutefois pour les ingénieurs un intérêt indiscutable, nous indiquerons encore ces divers procédés, en tant qu'ils peuvent trouver une application utile.



(11)

3. Détermination analytique des fonctions Ω, m J.

Les cas où il est possible d'exprimer les intégrales Ω, m, J au moyen de formules exactes relativement simples, sont ceux où le profil de section est défini géométriquement, soit comme portion de ligne droite, soit comme arc de parabole à axe horizontal et corde quelconque, ou à corde horizontale et axe quelconque, soit enfin comme arc de cercle orienté d'une façon quelconque. Dans ces divers cas la méthode des segments aux abscisses nous paraît mériter la préférance, et nous a conduit aux formules que nous allons exposer:

---

* Voir: J. Claudel. Tables des carrés et des cubes des nombres entiers de 1 à 10.000 etc. Paris, Dunod, 1871, petit in 8°. — Chez le même éditeur et dans le même format: A. Jacquet. Tables des racines carrées des nombres entiers de 1 à 10.000 avec 21, 12 et 10 figures . . . etc.

Voir encore: Dr. Jakob Philipp Kulik: Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen aller natürlichen Zahlen bis hunderttausend. Leipzig 1848. Cet ouvrage autrichien avec une entrée 10 fois plus étendue que celle des tables françaises, est disposé d'une façon particulière de façon à diminuer le nombre de chiffres indiqués; c'est un volume in 8° de dimension usuelle, qui malheureusement est tombé dans l'oubli et ne se trouve que dans les bibliothèques.

** La dérivée z représente l'une des fonctions x, xy, xy^2 s'il s'agit des intégrales (2) et l'une des fonctions y, y^2, y^3 s'il s'agit des intégrales (3).

*** Les formules analogues pour les intégrales (3) sont un peu plus pénibles pour m et J et s'écrivent:

$$(8)\quad \left[\Omega\right]_0^{2n} = \frac{\Delta y}{3}\left[x_0 + x_{2n} + 4(x_1 + x_3 + \ldots x_{2n-1}) + 2(x_2 + x_4 + \ldots x_{2n-2})\right]$$

$$(9)\quad \left[m\right]_0^{2n} = \frac{\Delta y}{3}\left[x_0 y_0 + x_{2n}\, y_{2n} + 4(x_1 y_1 + x_3 y_3 + \ldots x_{2n-1}\, y_{2n-1}) + 2(x_2 y_2 + x_4 y_4 + \ldots x_{2n-2}\, y_{2n-2})\right]$$

$$(10)\quad \left[J\right]_0^{2n} = \frac{\Delta y}{3}\left[x_0 y_0^2 + x_{2n}\, y_{2n}^2 + 4(x_1 y_1^2 + x_3 y_3^2 + \ldots x_{2n-1}\, y_{2n-1}^2) + 2(x_2 y_2^2 + x_4 y_4^2 + \ldots x_{2n-2}\, y_{2n-2}^2)\right]$$

Les deux dernières formules ne trouveront presque jamais une application pratique.

Considérons d'abord un segment aux abscisses (11) limité sur la droite par le profil rectiligne (1 . . 2). Si l'on représente par $x_1\ y_1$ et $x_2\ y_2$ les coordonnées des points 1 et 2 on trouve:

$$(12)\quad . \ . \quad \Big[\Omega\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)(y_2 - y_1) \qquad\qquad Z = \frac{1}{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)^2$$

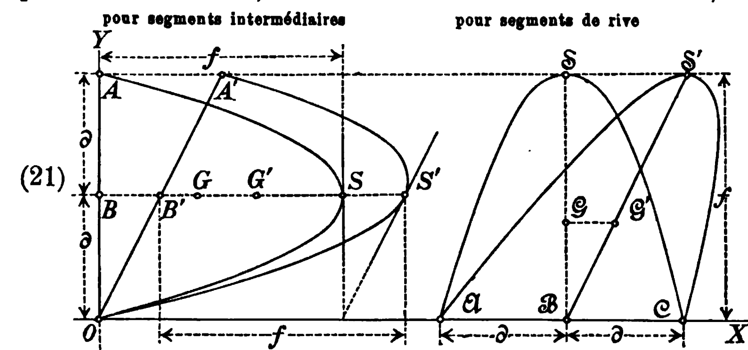
$$(13)\quad \Big[m\Big]_1^2 = \frac{1}{2}\,\Omega\,(y_2 + y_1) + Z \qquad\qquad \Big[J\Big]_1^2 = \frac{1}{6}(x_2 + x_1)(y_2^2 - y_1^2) + Z\,(y_2 + y_1)$$

Ces formules relativement faciles à établir* donnent les fonctions cherchées en exprimant à l'aide de la variable auxiliaire Z ce qu'il faut ajouter aux valeurs approximatives obtenues avec le trapèze considéré comme un rectangle de largeur moyenne $\frac{1}{2}\,(x_1 + x_2)$.

Lorsque le profil de la section est polygonal, on le divisera en segments aux abscisses en forme de trapèze, et la méthode que nous venons d'indiquer est alors plus exacte et plus commode que celle des formules de Simpson (5) (6) (7), lesquelles, pour être sensiblement exactes, exigent l'emploi d'un grand nombre de tranches de segment.

Lorsque le profil de la section contient en outre quelques parties courbes, on peut remplacer préalablement ces arcs de courbe par leur corde ou un polygone de cordes et obtenir une première approximation par la méthode des trapèzes exposée ci-dessus, quitte à évaluer ensuite les différences, résultant de la présence des segments négligés, compris entre le contour polygonal et le contour courbe. Nous allons faire voir comment chacun de ces segments compris entre l'arc et sa corde peut être assimilé à un segment de parabole et traité ensuite à l'aide de formules très-simples.

Un segment intermédiaire du profil fig. (1) tel que 1, 2, 3, 4 aura sur la droite comme sur la gauche un segment parabolique avec un axe horizontal et une corde orientée d'une manière quelconque, tandis qu'un segment de rive tel que $2\,M\,3$ ou $1\,N\,4$ sera un segment parabolique à corde horizontale avec un axe orienté d'une manière quelconque. On pourra toujours prendre les arcs assez courts pour que l'hypothèse des arcs de parabole n'entraîne pas d'erreur sensible, et dans les deux cas les fonctions Ω, m, J se calculent facilement.

(21)


Considérons fig. (21) d'abord deux segments paraboliques $A\,S\,O$ $\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{C}$ pour lesquels la corde est perpendiculaire à l'axe (ou diamètre). On sait qu'alors le centre de gravité G ou $\mathfrak{G}$ divise la flèche $B\,S$ ou $\mathfrak{B}\,\mathfrak{S}$ en deux parties qui sont dans le rapport de $2:3$, qu'en outre la surface du segment est les $\frac{2}{3}$ du rectangle formé avec la corde et la flèche . . . etc; si nous désignons par:

* L'équation de la droite (1 . . 2) dans le système de coordonnées de la fig. (11) et en partant de l'un quelconque $x_0\ y_0$ de ses points, est

$$(14)\quad . \ . \ . \ . \quad \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_1} \qquad \text{ou bien} \ . \ . \ . \ . \ x = x_0 - y_0\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} + y\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{d'où}$$

$$(15)\quad . \ \Big[m\Big]_1^2 = \int_1^2 xy\,dy = \int_1^2 \left[y\left(x_0 - y_0\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right) + y^2\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right] dy = \left[\frac{y^2}{2}\left(x_0 - y_0\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right) + \frac{y^3}{3}\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right]_1^2$$

Supposant que la droite parte du point . . . . . . $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ et $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, on a:

$$(16)\quad . \ . \ \Big[m\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right] + \frac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3)\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \ . \ . \ . \ . \ . \ \text{d'où}$$

$$(17)\quad . \ \Big[m\Big]_1^2 = \frac{1}{4}(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)(x_2 + x_1) + \frac{1}{12}(x_2 - x_1)\Big[4(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2) - 3(y_2 + y_1)^2\Big]$$

et en réduisant on arrive à la formule (13) du texte. On a de même en procédant d'une manière analogue:

$$(18)\quad . \ . \ . \ . \ . \ \Big[J\Big]_1^2 = \int_1^2 xy^2\,dy = \left[\frac{y^3}{3}\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2}\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right) + \frac{y^4}{4}\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right]_1^2$$

$$(19)\quad . \ . \ \Big[J\Big]_1^2 = \frac{1}{6}(x_2 + x_1)(y_2^3 - y_1^3) - \frac{1}{6}(y_2 - y_1)(y_2^3 - y_1^3)\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} + \frac{1}{4}(y_2^4 - y_1^4)\,\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$(20)\quad . \ \Big[J\Big]_1^2 = \frac{1}{6}(x_2 + x_1)(y_2^3 - y_1^3) + \frac{1}{12}(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)\Big[3(y_2^2 + y_1^2) - 2(y_2^2 + y_2 y_1 + y_1^2)\Big]$$

et en réduisant encore le dernier terme on arrive à la formule (13) du texte pour le moment d'inertie.

$$(22) \quad . \quad . \begin{cases} J_0\ \mathfrak{J}_0 \ \ldots \text{ les moments d'inertie principaux rapportés au centre de gravité,} \\ f \ldots\ldots \text{ la hauteur de flèche } BS \text{ ou } \mathfrak{B}\mathfrak{S}, \\ 2\partial \ldots\ldots \text{ la longueur de corde } 2 \times AB \text{ ou } 2 \times \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \end{cases}$$

on aura pour les valeurs bien connues concernant un semblable segment parabolique:

$$(23) \quad \ldots \quad \Omega = \frac{4}{3} f \partial \qquad J_0 = \frac{1}{5} \Omega \partial^2 \qquad \mathfrak{J}_0 = \frac{12}{175} \Omega f^2$$

D'après cela, en rapportant les moments à un autre axe quelconque parallèle à OX et situé à la hauteur y au-dessous, on aura pour les moments statiques m, $\mathfrak{M}$ et les moments d'inertie J, $\mathfrak{J}$ concernant la figure de gauche et la figure de droite:

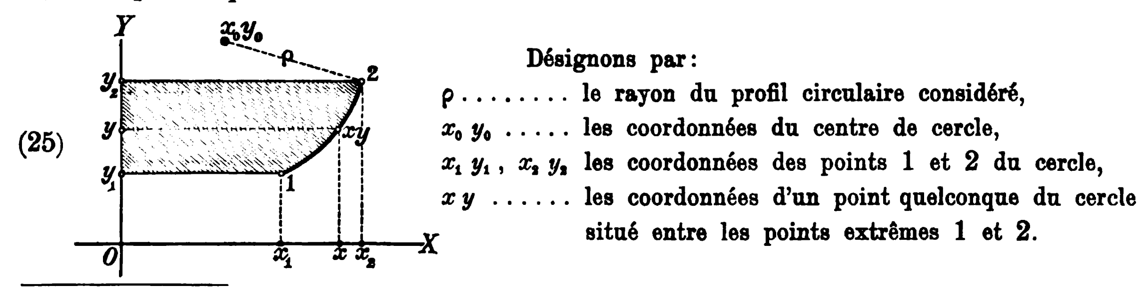
$$(24) \quad . \quad . \begin{cases} m = \Omega\,(y + \partial) & \mathfrak{M} = \Omega\,(y + \frac{2}{5} f) \\ J = \Omega\left[(y + \partial)^2 + \frac{\partial^2}{5}\right] & \mathfrak{J} = \Omega\left[(y + \frac{2}{5} f)^2 + \frac{12}{175} f^2\right] \end{cases}$$

Il est facile de voir maintenant sur la fig. (21) que les formules ci-dessus subsistent pour le cas plus général que nous avions en vue tout d'abord, en voulant appliquer les segments paraboliques à la fig. (1). Nous supposerons que dans la figure de gauche (21) la corde OBA se déplace en $OB'A'$, le point S venant en S' de façon que $BS = B'S' = f$. Le segment de parabole $OS'A'$ ayant OA' comme corde et $B'S'$ comme diamètre, peut être considéré comme obtenu, en divisant le segment parabolique normal OSA en une infinité de segments aux abscisses ou tranches horizontales, de hauteur infiniment petite, et en faisant ensuite glisser toutes ces tranches vers la droite suivant le déplacement de la corde de OA en OA'. Or ce déplacement des tranches n'altère en rien les fonctions m, J dont les valeurs (24) restent par suite toujours applicables. On démontrerait de la même manière que le segment de parabole $\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{C}$ peut être déformé en un segment $\mathfrak{A}\mathfrak{S}'\mathfrak{C}$ plus général, en faisant passer le diamètre de $\mathfrak{B}\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{B}\mathfrak{S}'$ . . . etc.

Les deux segments paraboliques $OS'A'$ et $\mathfrak{A}\mathfrak{S}'\mathfrak{C}$ dont nous venons d'évaluer d'une manière générale les moments statiques et les moments d'inertie, pourront toujours facilement trouver leur application pour compléter les segments aux abscisses fig. (1), car d'après le profil courbe donné les trois points $A'S'O$ ou $\mathfrak{A}\mathfrak{S}'\mathfrak{C}$ de la fig. (21) seront toujours indiqués d'avance sur la figure (1) où pourront y être choisis convenablement*. Ajoutons que les grandeurs ∂ et f qui entrent dans les formules sont des longueurs mesurées suivant les axes coordonnés.

Considérons maintenant un segment aux abscisses fig. (25) terminé par un arc de cercle, comme partie composante du profil de section à étudier; la question est dans ce cas bien plus compliquée que dans le cas d'un arc de parabole.

On sait que les coordonnées du centre de gravité d'un segment de cercle et les moments d'inertie de ce segment, rapportés aux axes principaux d'inertie, ne s'expriment point par des formules simples. La complication augmente encore lorsque les moments doivent être rapportés à un axe du plan faisant avec la corde de l'arc un angle quelconque. L'auteur ayant eu un certain nombre de calculs de ce genre à effectuer, a trouvé plus commode d'aborder de suite le problème dans toute sa généralité au moyen du calcul intégral; il a établi ainsi pour le segment aux abscisses tout entier à profil circulaire quelconque, des formules qui sont assez avantageuses (comme toutes les formules pour profils circulaires) tant que le rayon de cercle n'est pas trop grand; dans ce dernier cas il serait préférable d'avoir recours à la méthode approximative des segments paraboliques.



Désignons par:

ρ . . . . le rayon du profil circulaire considéré,

$x_0\ y_0$ . . . . . les coordonnées du centre de cercle,

$x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$ les coordonnées des points 1 et 2 du cercle,

$x\ y$ . . . . . . les coordonnées d'un point quelconque du cercle situé entre les points extrêmes 1 et 2.

* Dans le cas d'un segment de rive le point $\mathfrak{S}'$ pourra être choisi à volonté sur le profil donné de façon que l'arc parabolique qui en resulte couvre ce profil pour le mieux. Dans le cas d'un segment intermédiaire un choix du point S' sur le profil n'est pas possible, mais on atteint le même but déplaçant le point S' très-légèrement sur le diamètre SS' dans un sens ou dans l'autre.

L'équation du profil circulaire sera:

(26) . . . $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-\rho^2=0 \qquad x=x_0 \pm\sqrt{\rho^2-(y-y_0)^2}$

Dans cette valeur de x on devra prendre le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que le segment possède un profil circulaire convexe ou concave; si l'on pose maintenant:

(27) . . $Z=\int\left[\rho^2-(y-y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}.dy \qquad Z'=\int y\left[\rho^2-(y-y_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}.dy \qquad Z''=\int y^2\left[\rho^2-(y-y_0)^2\right] dy$

on aura pour les trois fonctions cherchées, d'après la méthode des segments aux abscisses:

(28) . $\Big[\Omega\Big]_1^2=\Big[x_0\, y \pm Z\Big]_1^2 \qquad \Big[m\Big]_1^2=\Big[x_0 \frac{y^2}{2} \pm Z'\Big]_1^2 \qquad \Big[J\Big]_1^2=\Big[x_0 \frac{y^3}{3} \pm Z''\Big]_1^2$

Le calcul des intégrales Z, Z' et Z'' peut s'effectuer facilement au moyen de l'intégration par parties*, et on trouve après toutes réductions et au moyen de la fonction auxiliaire:

(29) . . . $\pm Z = \mathfrak{Z} = \frac{1}{2}(x-x_0)\,(y-y_0) \pm \frac{1}{2}\rho^2.\,\text{arc. sin}\,\frac{y-y_0}{\rho}$ . . . les formules:

(30) . . $\Big[\Omega\Big]_1^2=\Big[x_0\, y+\mathfrak{Z}\Big]_1^2 \qquad \Big[m\Big]_1^2=\Big[\frac{x_0\, y^2}{2}-\frac{(x-x_0)^3}{3}+y_0\,\mathfrak{Z}\Big]_1^2$

(31) . . . . $\Big[J\Big]_1^2=\Big[\frac{1}{3}\,x_0\, y^3-\frac{5y_0+3y}{12}(x-x_0)^3+\Big(y_0^2+\frac{\rho^2}{4}\Big)\mathfrak{Z}\Big]_1^2$

dans lesquelles on prendra dans $\mathfrak{Z}$ le signe $+$ ou $-$ suivant que le segment sera convexe ou concave, en choisissant en outre l'arc. sin. toujours entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Les formules sont du reste entendues suivant les notations usitées pour les intégrales définies, c'est-à-dire que l'on appliquera les calculs successivement aux points 1 et 2 et que l'on fera la différence des résultats obtenus. Cette méthode de calcul restera donc malgré toutes les simplifications, toujours très-pénible, et elle ne se recommande que si l'on veut exclure absolument toute donnée graphique.

---

* Nous poserons pour simplifier:

(32) . . . . . $y-y_0=Y \qquad dy=dY \qquad Z=\int(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}.\,dY$

L'intégration par parties aidée d'une transformation connue donne pour la première intégrale:

(33) . . $Z=\int\frac{\rho^2\,\frac{1}{\rho}}{\sqrt{1-\left(\frac{Y}{\rho}\right)^2}}dY-\int\frac{Y^2}{\sqrt{\rho^2-Y^2}}\,dY=\rho^2\,\text{arc. sin}\,\frac{Y}{\rho}+Y\sqrt{\rho^2-Y^2}-Z$

d'ou résulte la valeur du texte pour $\mathfrak{Z}=\pm Z$, si au lieu de $\pm\sqrt{\rho^2-Y^2}$ on met la valeur toujours égale $(x-x_0)$, la formule (29) convenant alors pour $\pm Z$. On a en outre pour la deuxième intégrale:

(34) . . . $Z'=\int(y_0+Y)\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}\,dY=y_0\,Z+\int Y\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}\,dY=y_0\,Z-\frac{1}{3}\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{3}{2}}$

On aura enfin pour la troisième intégrale Z'' par analogie avec (34) ci-dessus:

(35) . . . $Z''=\int(y_0+Y)^2\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}\,dY=y_0^2\,Z-\frac{2}{3}\,y_0\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{3}{2}}+\int Y^2\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}.\,dY$

La dernière intégrale résulte d'une intégration par parties en deux équations à deux inconnues:

(36) . . . . . . $\int Y^2\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}\,dY=-\frac{1}{3}\,Y\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\int(\rho^2-Y^2)^{\frac{3}{2}}.\,dY$

(37) . . . . . $\int(\rho^2-Y^2)^{\frac{3}{2}}.\,dY=\int(\rho^2-Y^2)\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}\,dY=\rho^2\,Z-\int Y^2\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}\,dY$

En substituant la valeur qu'on en tire, dans celle (35) de Z'' on arrive à la formule

(38) . . . . $Z''=\Big(y_0^2+\frac{\rho^2}{4}\Big)\,Z-\frac{5y_0+3y}{12}\,(\rho^2-Y^2)^{\frac{3}{2}}$

Utilisant les expressions ainsi trouvées pour Z, Z' et Z'' dans les formules (28) en y introduisant la simplification $\pm\sqrt{\rho^2-Y^2}=x-x_0$ déjà mentionnée pour Z, on trouve finalement les expressions (29) (30) et (31) du texte.

4. Détermination des fonctions Ω, m, J par des procédés graphiques et mécaniques.

Depuis près d'un demi-siècle les ingénieurs ont à leur disposition des planimètres excellents; il suffit de faire parcourir à une pointe (dite traçoir) un contour fermé quelconque pour pouvoir lire immédiatement sur une graduation, l'aire qui s'y trouve contenue. Les meilleurs instruments de ce genre sont le planimètre de Wetli et le planimètre d'Amsler; le premier se recommande surtout pour le travail de bureau par sa grande exactitude et son emploi commode, le second constitue un instrument, d'un prix peu élevé, extrêmement simple et portatif, et qui peut même jusqu'à certaines limites être adapté à une unité de mesure quelconque. C'est seulement depuis que le système Amsler s'est répandu d'avantage que l'usage des planimètres est réellement devenu populaire parmi les ingénieurs, puisqu'un instrument de ce système, tel qu'il est fabriqué en Suisse, peut se mettre en poche comme un étui de compas usuel et ne coûte guère d'avantage*. L'auteur a eu occasion de se servir, de planimètres des deux systèmes, tels qu'ils ont été construits par Starke à Vienne (celui d'Amsler avec un poste fixe à poids) et il a constaté que l'on peut estimer ainsi les surfaces avec une approximation relative de 1 : 500 à 1 : 1000, sans même s'astreindre à suivre les contours avec une précision par trop pénible.

M. Amsler avait déjà décrit et dessiné dans sa brochure de 1856 un instrument qui moyennant un seul tour du traçoir le long d'un contour fermé, indique simultanément et la surface qui s'y trouve comprise, et les moments statique et d'inertie de cette surface par rapport à un axe choisi à volonté dans le plan. A l'exposition universelle de Paris en 1867, un instrument de ce genre se trouvait exposé dans la section suisse; il était muni de trois roues dentées et de trois galets ou roulettes à arc gradué, mais ne paraissait pas encore disposé d'une manière tout à fait pratique. Dès 1870 un „intégrateur" comme l'apelle M. Amsler, d'une construction perfectionnée, se trouvait en service à l'école polytechnique de Vienne; le rapport publié à ce sujet par le Dr. E. Winkler (Zeitschr. des österr. Ing.- und Arch.-Vereines, cahier I ex 1870 p. 25) auquel se trouve annexé un dessin et une description de l'instrument, permet de reconnaître que ce dernier ne différait pas sensiblement des modèles que l'on construit actuellement. On trouve sur les intégrateurs les plus nouveaux** dans la brochure: „Instruction pour l'emploi de l'intégrateur Amsler par A. Amsler (fils de l'éminent constructeur de Schaffhouse). Imp. Brodtmann, 1886" tous les détails désirables, ainsi que des dessins et croquis des divers instruments disponibles.

L'intégrateur, ainsi que nous l'écrit M. Amsler, est employé presque exclusivement au Service technique de la Marine anglaise, suivant le procédé de M. Mac Farlane Gray; M. J. Bauschinger de Munich s'en sert pour les calculs concernant ses barres-éprouvettes (voir le cahier XV de ses „Mittheilungen . . .") etc. Pour les calculs de résistance concernant les ponts métalliques nous serons toutefois bien moins souvent amenés à nous servir de cet instrument ingénieux, car

---

* Comme l'assure avec modestie M. Amsler c'est à M. Oppikofer ingénieur d'Untereppikon que revient l'honneur d'avoir contribué le plus puissament à l'invention des planimètres (Bulletin de la société d'encouragement de 1841; Dingler, polyt. Journal, Vol. 86) ayant su le premier utiliser le principe d'un galet roulant et glissant à la fois sur une surface. Le planimètre de Wetli ne diffère du planimètre d'Oppikofer qu'en ce que cette surface est celle d'un disque au lieu d'être celle d'un cône.

Comme nous l'indiquons dans le texte, c'est toutefois l'invention postérieure de M. Amsler qui a décidé le succès des planimètres. Voir à ce sujet la brochure: „Ueber die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente, insbesondere über einen neuen Planimeter v. Jacob Amsler. Schaffhausen, Beck & Sohn, 1856". Cette brochure contient un traité général des planimètres, très-bien étudié. On y trouve cités à la page 71 les prix du temps: Oppikofer 425 francs à Paris, Wetli 450 Francs à Vienne, Amsler 50 francs à Zürich. Ces chiffres sont caractéristiques.

** Intégrateur N° 1. Construction usuelle, avec chariot à 2 roues sur rail, portant 3 roues dentées, 3 roulettes graduées et une tige à traçoir, coûte 360 frcs. et n'exige qu'un tour de tracé pour les 3 fonctions.

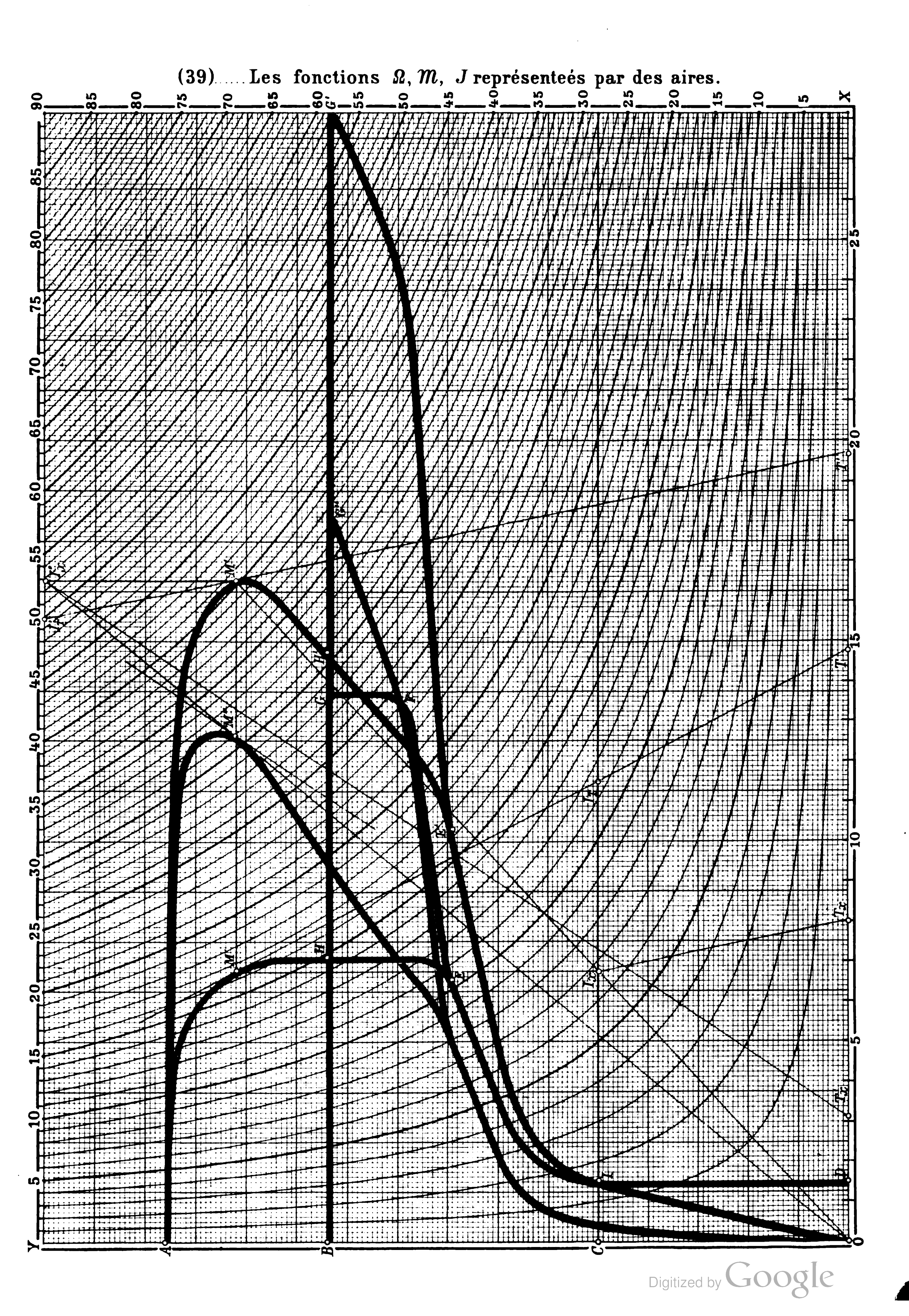
Intégrateur N° 2. Chariot à 3 roues sur rail et s'agençant à volonté avec un système séparé composé de 2 roues dentées, 2 tiges à traçoir et une seule roulette graduée, de façon que cette dernière donne l'une des fonctions Ω, m, J, coûte 220 frcs. et exige un tour de tracé par fonction.

Intégrateur N° 3. Chariot à deux roues sur rail, portant une tige à traçoir 2 roues dentées et 2 roulettes graduées donnant Ω et m (mais pas J), coûte 220 frcs. et n'exige qu'un seul tour de tracé pour les deux fonctions.

Intégrateur N° 4. Grand instrument comme le N° 1 mais pouvant opérer sur des figures de $1^m 20 \times 0^m 60$ d'étendue, muni en outre d'un perfectionnement consistant en ce que les trois roulettes marchent sur un disque de l'instrument, qui recevant un mouvement de rotation proportionnel aux dx agrandit les arcs développés à lire; coûte 750 frcs. et réunit en lui tous les perfectionnements inventés jusqu'ici en pareille matière.

Tous ces instruments cités ci-dessus reposent sur l'idée des segments aux ordonnées.

Les fonctions Ω, $\mathfrak{M}$, J représenteés par des aires.



ce n'est que pour des profils laminés avec saillies fortement arrondies ou irrégulières comme ceux des rails, des fers Zorès . . . etc. qu'il y aura lieu de calculer plus exactement les fonctions Ω, m, J; pour toutes les sections plus usuelles en I ⊏ ⊥ L . . . etc. le calcul approximatif connu, basé sur la décomposition en rectangles suffit.

A défaut d'intégrateur, on peut, comme l'a fait l'auteur à une époque* où l'intégrateur Amsler n'avait pas encore fait ses preuves en Autriche, se servir d'un planimètre ordinaire, en transformant graphiquement tous les profils à étudier, de telle façon que les aires contenues dans les contours déformés représentent les moments m et J cherchés. Ce procédé de calcul se trouve appliqué sur la planche fig. (39) à un rail de chemin de fer ayant 120^{mm} de hauteur, 110^{mm} de largeur de patin, 57^{mm} de largeur de tête et 12^{mm} d'épaisseur à l'âme; ce profil constitue actuellement en Autriche le type usuel pour les lignes d'intérêt général à faible trafic.

On se sert essentiellement d'une sorte de transparent construit une fois pour toutes sur du papier millimètre** et contenant les hyperboles de niveau:

(40) . . . . $xy = 1 \quad xy = 2 \quad xy = 3$ . . . . etc.

dessinées avec une unité de longueur égale à 2^{cm} qu'on devra également adopter pour le dessin du rail qu'on aura à y appliquer. L'ensemble des hyperboles est extrêmement facile à obtenir, car toutes ces courbes divisent chaque abscisse et chaque ordonnée en parties égales; le canevas millimétrique donne un nombre suffisant de leurs points pour permettre d'effectuer immédiatement le tracé au moyen des règles courbes. On se sert à cet effet du barême simple ci-après:

(41)

$x =$	$y =$	20	25	32	40	50	80	100	125	160	180	200	225	$= \Delta x$ / $= \Delta y$
$\Delta y =$	$\Delta x =$	20	16	$\frac{25}{2}$	10	8	5	4	$\frac{16}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{20}{9}$	2	$\frac{16}{9}$	$= y$ / $= x$

En marquant tous ces points*** dans les deux directions des coordonnées (où l'on n'aura que les divisions $\frac{20}{9}$ et $\frac{16}{9}$ à compléter à l'aide d'une bande de papier graduée) on en aura plus qu'il n'en faut pour tracer les hyperboles.

Considérons maintenant le profil de rail coloré en bleu (39); il est disposé de manière que son axe vertical de symétrie se trouve sur OY et que son axe horizontal de symétrie d'éclissage, coïncide avec l'axe OX; la partie inférieure est alors rabattue vers le haut en $OBGFEID$ et occupe avec la partie supérieure le profil de section commun $OBHEID$ et le contour commun EID.

Cette disposition particulière offre quelques avantages dont on ne devra pas manquer de profiter dans les cas analogues. Le moment statique par exemple, pour le profil total (patin, âme et tête) rapporté à l'axe OX, sera simplement la différence des moments propres aux parties de profil $AMHB$ et $HGFE$ de façon que l'on pourra se dispenser d'évaluer le moment du profil commun $OBHEID$ . . . etc.

Pour obtenir maintenant le contour violet qui donnera les moments statiques, on transportera un point M quelconque ayant les coordonnées xy, en un point M' ayant les coordonnées $x'y$ de manière que (2).

(42) . . . $C'x' = xy$ et $m = \int x\,y\,dy = C' \int x'\,dy$

où C' désigne une constante, qui ne dépend évidemment que de l'échelle suivant laquelle on veut porter les nouvelles abscisses x' sur le dessin. Cette échelle indiquée au bas de la feuille est ici de 8^{mm} par unité de longueur.

Les points qui se trouvent sur la droite $y = C'$ ne seront pas déplacés (puisque alors $x = x'$) et la hauteur de cette droite se déterminera† sur la figure par:

$$C' \times 8^{mm} = 400^{mm} \qquad C' = 50^{mm}$$

Cette droite CI est ce que nous nommerons la **base de déformation**. On reconnaîtra facilement que les abscisses des divers points M sont agrandies ou diminuées par suite de la

* Il s'agissait de comparer vers 1872 de comparer tous les profils de rails usités alors en Autriche et en Allemagne, au nombre de plus de 80. Le procédé utilise l'idée des segments aux abscisses.

** On choisira ce papier avec soin puis on collera plusieurs feuilles identiques sur des plaques de verre ou de métal; l'une servant à tracer le transparent à courbes hyperboliques, les autres servant à construire sur des calques tous les profils en double grandeur.

*** Le produit des nombres placés l'un au-dessus de l'autre est $400 = 20^{mm} \times 20^{mm}$.

† L'unité de longueur du dessin étant (40) de 20^{mm}, l'hyperbole $xy = 1$ s'écrirait avec les mm . . . $xy = 400$.

déformation suivant que ces points se trouvent au-dessus ou au-dessous de la base. Pour obtenir rapidement l'ensemble du contour déformé violet, il suffit de considérer l'ensemble des points où le contour primitif bleu coupe toutes les hyperboles, et pour lesquels l'échelle du bas donne immédiatement (sans interpolation) les points transformés*. On obtient ainsi plus de points qu'il n'en faut et la recherche de points intermédiaires serait superflue. Nous exposerons cependant encore ici comment on peut effectuer la déformation sans les hyperboles à l'aide d'une construction très-simple donnant aussi la tangente au profil déformé.

On obtient le point M' correspondant à un point M choisi à volonté sur le profil de rail en projetant ce dernier point verticalement en I_x sur la base et prolongeant la droite $O I_x$ jusqu'à sa rencontre avec l'horizontale menée par M, car cette construction n'est que l'expression graphique de la relation $x' : x = y : C'$ équivalente à (42). Le profil déformé (violet) au moyen de l'un de ces deux procédés donne lieu aux remarques générales suivantes:

1. Une courbe quelconque

(43) . . $F(x\,y) = o$ est transformée en une autre courbe . . . . . . $F\left(\frac{C'\,x'}{y},\, y\right) = o$

dont le degré généralement plus élevé, ne peut toutefois dépasser la somme des exposants les plus élevés de x et y dans l'équation de la courbe primitive, si celle-ci est de forme algébrique.

2. Une droite quelconque, pour laquelle nous prendrons par exemple la tangente au profil primitif partant du point M, aux coordonnées $x_1\, y_1$, laquelle a pour équation,

(44) . $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \operatorname{tg}\varphi$** ou bien $y = (y_1 - x_1 \operatorname{tg}\varphi) + x \operatorname{tg}\varphi$

se transforme dans la parabole dont l'équation est:

(45) . . $y^2 - y\,(y_1 - x_1 \operatorname{tg}\varphi) = x'\,C' \operatorname{tg}\varphi$ avec $\frac{dy}{dx'} = \frac{C' \operatorname{tg}\varphi}{2\,y - y_1 + x_1 \operatorname{tg}\varphi}$

Cette parabole a un axe horizontal, elle passe par l'origine O et coupe l'axe $O\,Y$ ainsi que la base $C I_T$ aux mêmes points que la tangente $M I_T$ elle-même; enfin elle possède au point M' avec le profil déformé une tangente commune. On pourrait aussi construire cette dernière d'après ces conditions puisque la parabole est entièrement connue, mais l'équation (45) fournit immédiatement une solution plus simple:

(46) . . On a pour M' . . . $y = y_1$ $\left(\frac{dy}{dx'}\right)_{M'} = \frac{C'}{x_1 + y_1 \cot\varphi}$

On portera d'après cela à partir de la trace T de la tangente $M T$ sur $O X$, l'abscisse x_1 du point M suivant $T T_x = - x_1$, et $I_x\, T_x$ sera la direction cherchée de la tangente en M' au contour déformé. Du reste la formule (46) donne également, d'une façon simple, la valeur numérique du coefficient angulaire de la tangente cherchée.

3. La parabole représentant la déformée d'une droite quelconque, a son sommet convexe tourné vers la droite ou vers la gauche suivant que $\varphi \gtrless \frac{1}{2}\pi$. Pour $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ c'est-à-dire pour une droite verticale $x = x_1$, la parabole devient la droite $x_1\, y = C'\, x'$ qui réunit l'origine O avec le point I_x de la base. Pour $\varphi = o$ la droite primitive alors horizontale, est identique avec sa propre déformée, chacun de ses points subissant toutefois la déformation. Enfin tous les points de l'axe $O\,Y$ ne subissent aucun déplacement tandis que tous les points de l'axe $O\,X$ se déplacent en passant à l'origine. Toutes ces particularités pourront être utilisées pour le tracé des déformées.

Les constructions que nous venons d'indiquer et qui servent à passer du profil primitif (bleu) au profil déformé (violet) déterminant les moments statiques, peuvent se répéter pour passer de ce dernier profil au profil déformé (rouge) servant à déterminer les moments d'inertie. La nouvelle déformation s'effectue à l'aide du même transparent à courbes de niveau hyperboliques utilisé précédemment, où même de la construction géométrique que nous avons exposée en dernier

* En plaçant une bande de papier au-dessus de $M M'$ on pourra marquer les points M' en faisant seulement glisser cette bande horizontalement sur le canevas millimétrique.

** En désignant par φ l'angle $M T X$ dans le sens usuel et suposant $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_1$ evalué dans le profil primitif pour le point M aux coordonnées $x_1\, y_1$, ou plus généralement en considérant l'équation (44) comme celle d'une droite tout à fait quelconque passant par ce point.

lieu et pour laquelle on aura à considérer une nouvelle base de déformation. Si nous désignons par x'' la nouvelle abscisse et par C'' la constante, on aura d'après (42) ici:

(47) . . . $C'' x'' = x' y$ $$J = \int x y^2 dy = C' \int x' y \, dy = C' C'' \int x'' dy$$

L'échelle choisie sur le dessin pour les nouvelles abscisses x'' est de $2^{mm}5$ par unité; la hauteur de la nouvelle base sera $C'' = 400 : 2{\cdot}5 = 160^{mm}$.

Cette base ainsi que l'échelle divisée pour les nouvelles abscisses x'' viennent coïncider exactement avec l'échelle du bord supérieur de l'épure, appartenant aux courbes de niveau hyperboliques. Cette disposition* peut presque toujours être adoptée avec avantage, car après avoir choisi l'échelle des x' de façon à obtenir les plus grandes valeurs possibles sans sortir du cadre de l'épure (point G') on sera assuré ensuite d'y rester également en effectuant la deuxième déformation, dans les conditions que nous venons d'indiquer.

Pour terminer maintenant ce qui concerne le calcul du profil de rail que nous avons choisi comme exemple, il nous reste à dire que les aires indiquées par le planimètre et que nous désignerons par Ω_p Ω'_p Ω''_p sont les suivantes:

		bleu $\Omega_p =$	violet** $\Omega'_p =$	rouge $\Omega''_p =$
(48) . .	Partie de la tête du rail	+ 43·555	+ 39·332	+ 49·038
	Partie du pied du rail .	+ 37·424	— 19·969	+ 31·376
	Ensemble	+ 80·979	+ 19·363	+ 80·414

En tenant compte des échelles adoptées successivement pour y, x, x' et x'' ainsi que de la nécessité de doubler finalement tous les résultats puisque l'épure ne contient que la moitié du profil de rail complet, on trouvera pour les trois fonctions***.

$$\Omega = \frac{1}{2} \Omega_p = \overset{cm^2}{40{\cdot}489} \qquad m = \frac{10}{8} \Omega'_p = \overset{cm^3}{24{\cdot}204} \qquad J = 10\, \Omega''_p = \overset{cm^4}{804{\cdot}14}$$

et l'on en déduira par le procédé de calcul ordinaire:

Hauteur du centre de gravité au-dessus de $O X$ . . . . $\frac{m}{\Omega} = \overset{cm}{0{\cdot}59779}$

Moment d'inertie rapporté à l'axe neutre . . . . $J - 0{\cdot}59779 \,.\, m = 790^{cm^4}$

5. Calcul approché usuel des fonctions Ω, m, J dans les projets de ponts.

On se sert surtout dans la construction de ponts de fers plats ou de tôles ainsi que de profils laminés en forme de ⌶ ⊏ ⊥ ∟ qui dans ces derniers temps sont devenus très-usuels. Les ingénieurs des ponts métalliques de tous pays sont déjà depuis longtemps d'accord pour admettre que tous les profils obtenus soit en prenant simplement ces fers laminés tels quels, soit en les combinant ensemble, peuvent être traités, avec une approximation plus que suffisante en pratique, comme s'ils étaient composés uniquements d'éléments rectangulaires.

On néglige donc le bombement des parties arrondies convexes ou concaves et on assimile l'âme ou les côtés à épaisseur variable à des parties analogues ayant une épaisseur moyenne constante telle, que l'aire Ω du profil se trouve conservée exactement, l'expérience ayant démontré que dans ces conditions les moments m et J se trouvent évalués avec une précision suffisante. Les calculs effectués d'après ce système, sont simplement l'application immédiate de la méthode des segments aux ordonnées (3) à des profils définis par des contours à gradins rectangulaires. Nous ferons voir plus loin à propos des poutres en tôle à âme pleine, comment on peut déterminer

* Remarquons que pour toutes les déformations de ce genre, le transparent à courbes de niveau hyperboliques restera toujours le même quelles que soient les échelles choisies pour x' et x'', tandis que la construction géométrique dépend essentiellement du choix de ces échelles et des bases qui en résultent.

** Etant etendu que l'on ne mesure au planimètre que les aires $A\,M'\,H'\,B$ et $H'\,G'\,E'\,H'$ comme nous l'avons expliqué précédemment.

*** C'est par ce procédé, que l'auteur a pu obtenir, avec une facilité relative, les résultats comparatifs concernant les 80 profils de rails dont il s'agissait vers 1872. A titre de contrôle on a ensuite traité l'un des profils par voie entièrement analytique au moyen des formules (12) (13) (29) (30) (31).

très-simplement les fonctions Ω, m, J du profil total au moyen des fonctions analogues concernant ses éléments composants; ces derniers ne sont autres que les profils laminés cités ci-dessus; les profils des cornières qui entrent constamment dans les calculs et les rendent plus spécialement pénibles, donnent lieu aux explications suivantes.

6. Choix des cornières et calculs qui s'y rattachent.

Les cornières à côtés égaux sont comme l'on sait de beaucoup les plus répandues, et ce sont aussi celles qui coûtent le moins à égalité de poids. Les types les plus usités dans l'Europe centrale pour les ponts métalliques, sont avec les notations usuelles:

$$(49)\quad .\quad 60 \times 60:8,\quad 70 \times 70:9,\quad 80 \times 80:10,\quad 90 \times 90:11,\quad 100 \times 100:12.$$

Toutes les usines produisent ces types connus, avec un certain nombre de profils qui n'en diffèrent que par l'épaisseur des côtés. En général depuis que le système métrique a été adopté presque universellement en Europe, la grande majorité des ingénieurs semble s'être ralliée à l'idée de choisir des cornières dont les côtés ont un nombre entier de centimètres comme longueur et un nombre entier de millimètres comme épaisseur moyenne. La longueur des côtés dépasse rarement 100^{mm} (exceptionnellement 110 et 120^{mm}).

Quant aux cornières à côtés inégaux, elles sont très-avantageuses pour les bandes des poutres de hauteur réduite ainsi que pour les croisillons des poutres à triangles en général, mais il ne semble pas que l'accord se soit établi à leur sujet entre les ingénieurs. L'association des ingénieurs et architectes de l'Autriche s'est occupé de cette question* difficile dès 1880 sans que la commission qui l'étudie, soit parvenue jusqu'ici à établir une série de types réunissant les suffrages de tous les intéressés. Pour les constructeurs de ponts métalliques il serait cependant de haute importance que l'on parvienne à se mettre d'accord sur un petit nombre de profils-types, que les usines pourraient fournir d'autant plus facilement; c'est ce qui a déterminé l'auteur à proposer ici une série de types bien étudiés, choisis parmi ceux qui sont employés le plus fréquemment dans les constructions et qui ont du moins reçu la sanction de l'expérience. Ces types sont avec les notations ordinaires en *mm*:

$$(50)\quad .\quad \underbrace{\overset{\text{Nr. 1}}{\frac{50\times 75}{8}},\ \overset{\text{Nr. 2, 3}}{\frac{55\times 80}{8.9}},}_{D\,=\,25}\ \underbrace{\overset{\text{Nr. 4...6}}{\frac{60\times 90}{8.9.10}},\ \overset{\text{Nr. 7...9}}{\frac{70\times 100}{9.10.11}},}_{D\,=\,30}\ \underbrace{\overset{\text{Nr. 10...13}}{\frac{80\times 120}{10.11.12.13}},\ \overset{\text{Nr. 14...18}}{\frac{90\times 130}{11.12.13.14.15}},\ \overset{\text{Nr. 19...24}}{\frac{100\times 140}{12.13.14.15.16.17}}}_{D\,=\,40}$$

Les avantages de cette série sur laquelle on trouve réunis dans le tableau (51) ci-après toutes les données numériques théoriques et pratiques, peuvent être résumés comme suit:

1. Les sept combinaisons de longueurs de côtés se divisent en trois groupes pour lesquels la différence des côtés est respectivement $D = 25$, 30, 40^{mm}. Ce système permet de trouver dans chaque groupe au moins deux profils pouvant se servir, réciproquement, de couvre-joint ce qui est notamment important pour le dernier groupe.**

2. Les profils cités ne sont à la vérité pas géométriquement semblables, et n'ont même pas leur côtés dans un rapport constant, mais on peut se convaincre à l'inspection du tableau (51) que les valeurs de fonctions qui s'y trouvent forment des échelles de valeurs assez régulièrement ascendantes. Il serait extrêmement incommode en pratique de devoir s'astreindre à n'avoir que des profils géométriquement semblables; les questions d'assemblage et de rivure ont bien plus d'importance pratique que la similitude des types.

3. Parmi les sept combinaisons de longueurs de côtés, celles 50×75, 60×90, 80×120 qui correspondent au rapport constant de 2 à 3, ont déjà été proposées en 1882 par l'association des ingénieurs et architectes de l'Autriche, et la pratique des constructeurs y a ajouté les combinaisons 55×80, 70×100 et 90×130 qui ont les mêmes différences de côtés, et que l'on trouve dans beaucoup de ponts construits en Autriche ainsi que dans les nouveaux types étudiés d'après les prescriptions de la nouvelle ordonnance. Les cornières 100×140 enfin, sont déjà depuis fort longtemps très-répandues dans toute l'Europe centrale et notamment en France, elles conviennent fort bien pour les poutres à âme pleine de hauteur réduite et s'adaptent à la largeur de 30^{cm}

---

* Voir les profils types publiés au cahier I ex 1882 „Zeitschrift des österr. Ing.- und Arch.-Vereines, où l'on trouve quelques cornières avec un rapport de longueur de côtés égal à 3 : 2.

** On aura rarement à employer des cornières plus grandes, pour lesquelles il faudrait former un groupe nouveau tel que 100×150, 110×160, 120×170 ou bien encore 100×160, 110×170 et 120×180. Cette question est moins urgente que celle des types que nous citons.

(51) . . *Calibres de cornières à côtés inégaux, d'un emploi commode dans la construction des ponts.*

No.	Calibres de cornières: Désignation	Surface de section	Poids par mètre	Position verticale . . . . ∟ Hauteur du centre de gravité sur la base	l'arête	Moment d'inertie	Module d'inertie	Position verticale . . . . ┘ Hauteur du centre de gravité sur la base	l'arête	Moment d'inertie	Module d'inertie
	mm	cm^2	Kg	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm	cm^4	cm^3
1	50 × 75 : 8	9·36	7·3	1·30	3·70	18·72	5·06	2·55	4·95	52·48	10·60
2	55 × 80 : 8	10·16	7·9	1·42	4·08	25·17	6·17	2·67	5·33	65·03	12·20
3	55 × 80 : 9	11·34	8·9	1·45	4·05	27·66	6·83	2·70	5·30	71·81	13·56
4	60 × 90 : 8	11·36	8·9	1·50	4·50	33·49	7·44	3·00	6·00	93·14	15·52
5	60 × 90 : 9	12·69	9·9	1·54	4·46	36·86	8·27	3·04	5·96	103·04	17·27
6	60 × 90 : 10	14·00	10·9	1·57	4·43	40·10	9·06	3·07	5·93	112·60	18·99
7	70 × 100 : 9	14·49	11·3	1·78	5·22	59·40	11·37	3·28	6·72	145·97	21·71
8	70 × 100 : 10	16·00	12·5	1·81	5·19	64·77	12·49	3·31	6·69	159·77	23·89
9	70 × 100 : 11	17·49	13·6	1·85	5·15	69·94	13·58	3·35	6·65	173·17	26·04
10	80 × 120 : 10	19·00	14·8	1·97	6·03	100·32	16·63	3·97	8·03	278·32	34·67
11	80 × 120 : 11	20·79	16·2	2·01	5·99	108·59	18·13	4·01	7·99	302·31	37·84
12	80 × 120 : 12	22·56	17·6	2·05	5·95	116·51	19·58	4·05	7·95	325·66	40·95
13	80 × 120 : 13	24·31	19·0	2·08	5·92	124·21	20·99	4·08	7·92	348·41	44·01
14	90 × 130 : 11	22·99	17·9	2·25	6·75	156·10	23·13	4·25	8·75	393·64	44·99
15	90 × 130 : 12	24·96	19·5	2·29	6·71	167·79	25·00	4·29	8·71	424·46	48·72
16	90 × 130 : 13	26·91	21·0	2·32	6·68	179·14	26·84	4·32	8·68	454·56	52·39
17	90 × 130 : 14	28·84	22·5	2·36	6·64	190·16	28·64	4·36	8·64	483·95	56·02
18	90 × 130 : 15	30·75	24·0	2·40	6·60	200·86	30·42	4·40	8·60	512·62	59·58
19	100 × 140 : 12	27·36	21·3	2·53	7·47	232·27	31·09	4·53	9·47	541·26	57·16
20	100 × 140 : 13	29·51	23·0	2·57	7·43	248·28	33·42	4·57	9·43	580·13	61·50
21	100 × 140 : 14	31·64	24·7	2·60	7·40	263·87	35·66	4·60	9·40	618·12	65·78
22	100 × 140 : 15	33·75	26·3	2·64	7·36	279·04	37·91	4·64	9·36	655·29	70·00
23	100 × 140 : 16	35·84	27·9	2·67	7·33	293·81	40·11	4·67	9·33	691·63	74·17
24	100 × 140 : 17	37·91	29·6	2·71	7·29	308·19	42·28	4·71	9·29	727·18	78·29

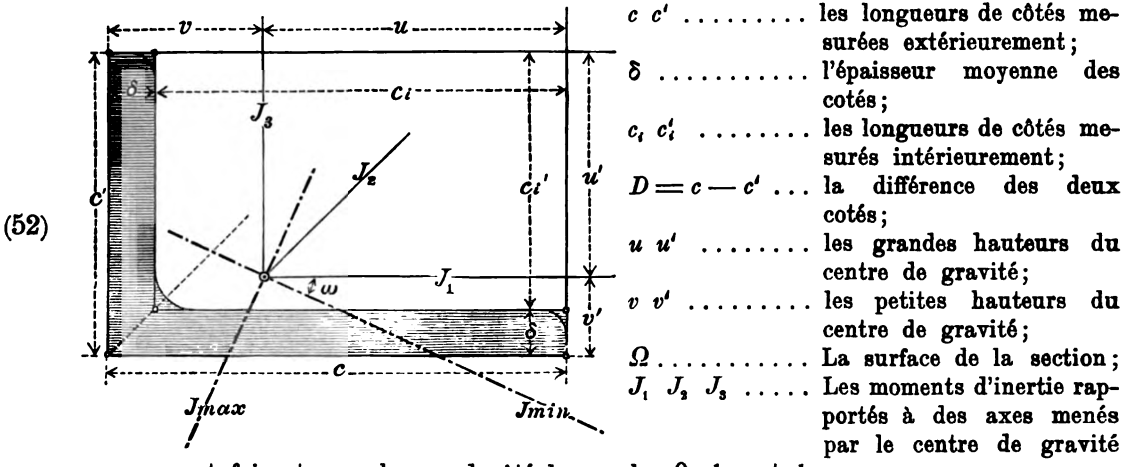
No.	Désignation	Angle ω	Position: Minimum . . . ∨				Position: Maximum . . . >			
	mm	Degrés (2 π : 360)	cm	cm	cm^4	cm^3	cm	cm	cm^4	cm^3
1	50 × 75 : 8	23° 27′ 5″	2·20	2·70	10·90	4·03	3·81	5·06	60·30	11·92
2	55 × 80 : 8	24° 49′ 18″	2·41	2·92	14·33	4·89	4·14	5·43	75·87	13·96
3	55 × 80 : 9	24° 39′ 6″	2·45	2·92	15·89	5·44	4·15	5·42	83·58	15·42
4	60 × 90 : 8	23° 41′ 48″	2·58	3·24	19·26	5·95	4·55	6·10	107·38	17·61
5	60 × 90 : 9	23° 32′ 45″	2·62	3·24	21·35	6·68	4·57	6·08	118·55	19·45
6	60 × 90 : 10	23° 23′ 19″	2·66	3·24	23·41	7·22	4·58	6·07	129·28	21·31
7	70 × 100 : 9	25° 43′ 20″	3·02	3·68	33·24	9·04	5·22	6·83	172·13	25·21
8	70 × 100 : 10	25° 35′ 47″	3·07	3·68	36·48	9·91	5·23	6·81	188·07	27·60
9	70 × 100 : 11	25° 27′ 36″	3·11	3·68	39·67	10·77	5·24	6·80	203·44	29·92
10	80 × 120 : 10	23° 46′ 12″	3·41	4·32	57·48	13·32	6·07	8·15	321·16	39·42
11	80 × 120 : 11	23° 39′ 31″	3·45	4·32	62·58	14·49	6·08	8·12	348·32	42·87
12	80 × 120 : 12	23° 32′ 46″	3·49	4·32	67·48	15·62	6·09	8·11	374·68	46·10
13	80 × 120 : 13	23° 25′ 41″	3·53	4·32	72·38	16·75	6·10	8·09	400·24	49·46
14	90 × 130 : 11	25° 18′ 44″	3·85	4·75	87·66	18·44	6·73	8·87	462·08	52·09
15	90 × 130 : 12	25° 13′ 0″	3·90	4·76	94·65	19·90	6·74	8·86	497·61	56·18
16	90 × 130 : 13	25° 7′ 3″	3·94	4·76	101·56	21·33	6·75	8·84	532·14	60·18
17	90 × 130 : 14	25° 0′ 50″	3·98	4·77	108·39	22·75	6·76	8·83	565·72	64·09
18	90 × 130 : 15	24° 54′ 37″	4·03	4·77	115·14	24·14	6·77	8·81	598·34	67·90
19	100 × 140 : 12	26° 39′ 53″	4·29	5·18	128·07	24·72	7·40	9·60	645·46	67·25
20	100 × 140 : 13	26° 34′ 45″	4·34	5·19	137·48	26·51	7·41	9·59	690·93	72·08
21	100 × 140 : 14	26° 29′ 35″	4·38	5·19	146·77	28·26	7·42	9·57	735·22	76·81
22	100 × 140 : 15	26° 24′ 15″	4·43	5·20	155·94	30·00	7·43	9·56	778·37	81·44
23	100 × 140 : 16	26° 18′ 44″	4·46	5·20	165·04	31·72	7·44	9·54	820·40	85·96
24	100 × 140 : 17	26° 13′ 5″	4·51	5·21	174·05	33·41	7·45	9·53	861·32	90·37

pour les plates bandes. C'est pour cette raison aussi que l'auteur a cru devoir placer dans le Tome II les Tab. XII : 35 à 40, qui les concernent spécialement.

Les sept combinaisons que nous proposons pourront donc convenir et suffire pour les besoins ordinaires des constructeurs de ponts*. Il serait très-désirable qu'au moins les cornières du dernier groupe : 80×120, 90×130 et 100×140 fussent fabriquées d'une manière courante par la plupart des usines ; on pourrait alors faire varier les épaisseurs en modifiant l'écartement donné aux cylindres des laminoirs, étant admis que leurs axes fassent avec les deux côtés de cornière un angle de 45°, de manière que l'on puisse compter sur des épaisseurs égales.

Nous allons maintenant exposer quelques procédés de calcul nouveaux qui permettent d'obtenir très-simplement toutes les fonctions du tableau (51) au nombre de 18 par cornière. Désignons par :

(52)



$c \; c'$ .... les longueurs de côtés mesurées extérieurement ;
δ .... l'épaisseur moyenne des cotés ;
$c_i \; c_i'$ .... les longueurs de côtés mesurés intérieurement ;
$D = c - c'$ ... la différence des deux cotés ;
$u \; u'$ .... les grandes hauteurs du centre de gravité ;
$v \; v'$ .... les petites hauteurs du centre de gravité ;
Ω .... La surface de la section ;
$J_1 \; J_2 \; J_3$ ..... Les moments d'inertie rapportés à des axes menés par le centre de gravité et faisant avec le grand côté les angles 0, $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi$;
$J_{min}, \; J_{max}$ ... les moments d'inertie minimum et maximum rapportés aux axes de l'ellipse centrale d'inertie du profil ;
ω .... l'angle aigu que forme le grand côté avec le grand axe de l'ellipse centrale d'inertie.

Les formules qui donnent Ω et les hauteurs du centre de gravité s'écrivent alors au moyen d'une fonction auxiliaire η de la manière suivante :

(53) $\Omega = \delta\,(c + c' - \delta) = c\,c' - c_i\,c_i' = \delta\,\frac{c_i\,c_i'}{2\,\eta}$ $\qquad \eta = \frac{c\,c'}{2\,(c + c' - \delta)} - \frac{\delta}{2} = \frac{c_i\,c_i'}{2\,(c + c' - \delta)}$

(54) . . $u = \frac{c}{2} + \eta \qquad u' = \frac{c'}{2} + \eta \qquad v = \frac{c}{2} - \eta \qquad v' = \frac{c'}{2} - \eta$

On trouve en outre pour les moments d'inertie et l'angle ω définis ci-dessus :

(55) . $J_2 = \frac{\Omega}{24}\left[D^2 + 2\,(c\,c' + c_i\,c_i')\right] \qquad \frac{1}{2}\,(J_3 + J_1) = 4\,J_2 - \Omega\left(\frac{D^2}{8} + u\,u'\right) \qquad \frac{1}{2}\,(J_3 - J_1) = \frac{D\Omega}{12}\,(u + u')$

(56) . $\mathrm{tg}\,2\,\omega = \frac{J_2 - \frac{1}{2}\,(J_3 + J_1)}{\frac{1}{2}\,(J_3 - J_1)} \qquad J_{max} = \frac{1}{2}\,(J_3 + J_1) + \frac{\frac{1}{2}\,(J_3 - J_1)}{\cos 2\,\omega} \qquad J_{min} = \frac{1}{2}\,(J_3 + J_1) - \frac{\frac{1}{2}\,(J_3 - J_1)}{\cos 2\,\omega}$

Pour évaluer les modules d'inertie des moments J_{min} et J_{max} on obtiendra les quatre hauteurs des fibres extrêmes au-dessus de leur axe neutre au moyen des expressions suivantes, que l'on vérifie immédiatement sur la figure, et que nous citons dans l'ordre admis pour les quatre hauteurs dans la moitie inférieure du tableau (51) :

(57) $[v \sin\omega + v' \cos\omega], \quad [u' \cos\omega - (v - \delta) \sin\omega], \quad [u' \sin\omega + v \cos\omega], \quad [u \cos\omega + v' \sin\omega]$

On obtient ainsi les 18 fonctions cherchées pour chaque cornière, à l'aide d'une sorte de calcul d'ensemble que nous appliquons ci-après à titre d'exemple à la cornière $60 \times 90 : 8$ en faisant usage des tables de logarithmes ordinaires :

* Les Tab. X : 2 et 3 du Tome II ont été conçus dans un sens encore plus libéral, et l'on n'y a admis que les fonctions calculées par rapport aux côtés pour des motifs que nous expliquons au N° *XXXII* : 4 et 5 du Tome I et à la page X de l'introduction du Tome II.

(58) . . **Calcul d'ensemble des fonctions de la cornière 60 × 90 : 8.**

Surface de section et hauteurs du centre de gravité

$\Omega = 0{\cdot}8 \times 14{\cdot}2 = 11{\cdot}36$ . . 1·0553783

$\eta = 27/14{\cdot}2 - 0{\cdot}4 = 1{\cdot}501411$

$u = 6{\cdot}00141$ . . . . . . 0·7782533

$u' = 4{\cdot}50141$ . . . . . . 0·6533486

$u\,u' = 27{\cdot}0148$ . . . . . . 1·4316019

$v = 2{\cdot}99859$ . . . . . . 0·4769172

$v - \delta = 2{\cdot}19859$ . . . . . . 0·3421442

$v' = 1{\cdot}49859$ . . . . . . 0·1756829

log sin ω = $\bar{1}{\cdot}6041121$

$u' \sin\omega = 1{\cdot}8091$ . . . 0·2574607

$v \sin\omega = 1{\cdot}2051$ . . . 0·0810293

$(v-\delta)\sin\omega = 0{\cdot}8836$ . . . $\bar{1}{\cdot}9462563$

$v' \sin\omega = 0{\cdot}6023$ . . . $\bar{1}{\cdot}7797950$

log cos ω = $\bar{1}\,9617466$

$u \cos\omega = 5{\cdot}4954$ . . . . . 0·7399999

$u' \cos\omega = 4{\cdot}1219$ . . . . . 0·6150952

$v \cos\omega = 2{\cdot}7458$ . . . . . 0·4386638

$v' \cos\omega = 1{\cdot}3722$ . . . . . 0·1374295

Moment J_2

$2(c\,c' + c_i c_i') = 2\,(54 + 42{\cdot}64) = 193{\cdot}28$

202·28 . . . . 2·3059529

Ω . . . . 1·0553783

\+ 3·3613312

24 . . . . − 1·3802112

$J_2 = 95{\cdot}7459$ . . . 1·9811200

Moments $\frac{1}{2}(J_2+J_1)$ et $\frac{1}{2}(J_2-J_1)$

$\frac{1}{8}D^2 + u\,u' = 28{\cdot}1398$ . . . 1·4498211

Ω . . . . 1·0553783

− 319·668 . . . . 2·5046994

$+ 4\,J_2 = +382{\cdot}984$

$\frac{1}{2}(J_2+J_1) = 63{\cdot}316$

$\frac{1}{12}D = 0{\cdot}25000$ . . . $\bar{1}{\cdot}3979400$

$u + u' = 10{\cdot}50282$ . . . 1·0213058

Ω . . . . 1·0553783

$\frac{1}{2}(J_2-J_1) = 29{\cdot}828$ . . . . 1·4746241

Angle ω donnant le minimum et le maximum

$J_2 = 95{\cdot}746$

$\frac{1}{2}(J_2+J_1) = 63{\cdot}316$

32·430 . . . . 1·5109469

$\frac{1}{2}(J_2-J_1) = 29{\cdot}828$ . . . . 1·4746241

$2\,\omega = 47^\circ\,23'\,36''$. 0·0363228

$\omega = 23^\circ\,41'\,48''$

$\cos 2\omega$ . . . . $\bar{1}{\cdot}8805650$

$\pm \dfrac{J_2 - J_1}{2\cos 2\omega} = \pm\,44{\cdot}061$ . . . . 1·6440591

Moments J_1 J_2 J_{min} J_{max}

$J_1 = 33{\cdot}488$ . . . . . . 1·5248892
u' . . . . 0·6533486
Mod. = 7·4394 . . . . . 0·8715406

$J_2 = 93{\cdot}144$ . . . . . . 1·9691549
u . . . . 0·7782533
Mod. = 15·520 . . . . . . 1·1909016

$J_{min} = 19{\cdot}255$ . . . . . . 1·2845485
3·2383 . . . . . 0·5103171
Mod. = 5·9460 . . . . . 0·7742264

$J_{max} = 107{\cdot}877$ . . . . . . 2·0309113
6·0977 . . . . . 0·7851661
Mod. = 17·609 . . . . . . 1·2457452

Ce calcul est comme on le voit, malgré toutes les simplifications, encore assez pénible, et ce n'est que pour présenter un système théoriquement complet, que nous l'avons appliqué aux vingt quatre types que nous proposons d'adopter. Voici maintenant comment on établit les formules (53) (54) (55) (56) dont nous faisons usage. On a immédiatement sur la figure (52):

(59) . . . . . $D = c - c' = c_i - c_i'$ $\qquad\qquad \delta = c - c_i = c' - c_i'$

(60) . . . . . $D + \delta = c - c_i'$ $\qquad\qquad D - \delta = c_i - c'$

(61) . . . . . $\Omega = \delta\,(c + c_i') = \delta\,(c' + c_i) = \delta\,(c + c' - \delta) = c\,c' - c_i\,c_i'$

(62) . . . . . $c'\,c_i - c\,c_i' = D\,\delta$ $\qquad\qquad c'\,c_i + c\,c_i' = c\,c' + c_i\,c_i' - \delta^2$

Ces transformations seront utilisées dans la suite. On a d'abord pour les hauteurs du centre de gravité parallèlement aux côtés, par le calcul habituel:

(63) . . . . $u = \dfrac{1}{2\,\Omega}\,(c'\,c^2 - c_i'\,c_i^2)$ $\qquad\qquad u' = \dfrac{1}{2\,\Omega}\,(c\,c'^2 - c_i\,c_i'^2)$

(64) $u - u' = \dfrac{1}{2\,\Omega}\Big[c\,c'\,(c - c') - c_i\,c_i'\,(c_i - c_i')\Big] = \dfrac{D}{2\,\Omega}\,(c\,c' - c_i\,c_i') = \dfrac{D}{2} = \dfrac{c - c'}{2}$

(65) $u + u' = \dfrac{1}{2\,\Omega}\Big[c\,c'\,(c + c') - c_i\,c_i'\,(c_i + c_i')\Big] = \dfrac{c + c'}{2\,\Omega}\,(c\,c' - c_i\,c_i') + \dfrac{\delta\,c_i\,c_i'}{\Omega} = \dfrac{c + c'}{2} + \dfrac{\delta\,c_i\,c_i'}{\Omega}$

d'où résultent les formules (53) (54). On trouve de même pour les moments d'inertie évalués parallèlement aux côtés par le procédé ordinaire:

(66) . . $J_1 = \dfrac{1}{3}\Big[c\,c'^3 - c_i\,c_i'^3\Big] - \Omega\,u'^2$ $\qquad\qquad J_2 = \dfrac{1}{3}\Big[c'\,c^3 - c_i'\,c_i^3\Big] - \Omega\,u^2$

(67) . . . . $J_2 - J_1 = \dfrac{1}{3}\Big[c\,c'\,(c^2 - c'^2) - c_i\,c_i'\,(c_i^2 - c_i'^2)\Big] - \Omega\,(u^2 - u'^2)$

(68) . . . . $J_2 + J_1 = \dfrac{1}{3}\Big[c\,c'\,(c^2 + c'^2) - c_i\,c_i'\,(c_i^2 + c_i'^2)\Big] - \Omega\,(u^2 + u'^2)$

En séparant dans (67) le facteur $(c - c') = (c_i - c_i') = 2\,(u - u') = D$, en exprimant la valeur entre parenthèses [ ] au moyen de $(u + u')$ d'après (65), et en utilisant dans (68) les transformations:

(69) . $c^2 + c'^2 = D^2 + 2\,c\,c'$ $\qquad c_i^2 + c_i'^2 = D^2 + 2\,c_i\,c_i'$ $\qquad u^2 + u'^2 = \dfrac{D^2}{4} + 2\,u\,u'$

on trouve après réduction:

(70) . $J_2 - J_1 = \dfrac{D\Omega}{6}\,(u + u')$ $\qquad J_2 + J_1 = \Omega\left[\dfrac{D^2}{12} + \dfrac{2}{3}\,(c\,c' + c_i\,c_i') - 2\,u\,u'\right]$

La dernière expression peut encore être simplifiée avec avantage en y introduisant J_2, si ce dernier moment d'inertie se trouve parmi ceux qu'on doit calculer. On arrive à évaluer J_2 très-facilement, en utilisant une autre espèce de valeurs auxiliaires, qui amènent aussi aux formules de u, u', J_1, J_3 déjà trouvées ci-dessus. Posons:

(71) . . . $$\begin{cases} C_2 = c^2 - c_i^2 & C_3 = c^3 - c_i^3 & C_4 = c^4 - c_i^4 \\ C'_2 = c'^2 - c_i'^2 & C'_3 = c'^3 - c_i'^3 & C'_4 = c'^4 - c_i'^4 \end{cases}$$

Ces valeurs ainsi superposées, qui interviennent dans la plupart des formules dont nous nous occupons, donnent lieu à des sommes et différences s'exprimant d'une manière simple. On a d'abord pour les carrés:

(72) . $$\begin{cases} C_2 = \delta\,(c + c_i) & C_2 + C'_2 = \delta\,(c + c' + c_i + c'_i) = 2\,\Omega & C_2 = \Omega + \delta\,D \\ C_2 = \delta\,(c' + c'_i) & C_2 - C'_2 = \delta\,(c - c' + c_i - c'_i) = 2\,D\delta & C'_2 = \Omega - \delta\,D \end{cases}$$

On a de même pour les cubes en utilisant (65)

(73) $$\begin{cases} C_3 + C'_3 = (c^3 + c_i'^3) - (c_i^3 + c_i'^3) = (c + c')\,(D^2 + c\,c') - (c_i + c'_i)\,(D^2 + c_i\,c'_i) = \\ C_3 + C'_3 = 2\,\delta\,D^2 + (c + c')\,c\,c' - (c_i + c'_i)\,c_i\,c'_i = 2\,\delta\,D^2 + 2\,\Omega\,(u + u') \end{cases}$$

puis en utilisant à la fois les équations (65) et (72) on obtient:

(74) . $$C_3 + C'_3 = 2\,\delta\,D^2 + \Omega\,(c + c') + 2\,\delta\,(c\,c' - \Omega) = \Omega\,(c + c' - 2\,\delta) + 2\,\delta\,(D^2 + c\,c')$$

(75) . . . . $$C_3 - C'_3 = (c^3 - c'^3) - (c_i^3 - c_i'^3) = D\,(C_2 + C'_2 + \Omega) = 3\,D\,\Omega$$

On a enfin pour les quatrièmes puissances successivement:

(76) . . . . $$\begin{cases} C_4 + C'_4 = (c^2 + c_i'^2)\,(c^2 - c_i'^2) - (c_i^2 + c'^2)\,(c_i^2 - c'^2) = \\ = (c + c' - \delta)\,[(D + \delta)\,(c^2 + c_i'^2) - (D - \delta)\,(c'^2 + c_i^2)] = \\ = (c + c' - \delta)\,[D\,(c^2 + c_i'^2 - c'^2 - c_i^2) + \delta\,(c^2 + c'^2 + c_i^2 + c_i'^2)] \end{cases}$$

et en utilisant les transformations très-simples:

(77) . $$c^2 - c_i^2 = \delta\,(c + c_i) \qquad c'^2 - c_i'^2 = \delta\,(c' + c'_i) \qquad c^2 + c'^2 = D^2 + 2\,c\,c' \qquad c_i^2 + c_i'^2 = D^2 + 2\,c_i\,c'_i$$

(78) . . on trouve . . $$C_4 + C'_4 = 2\,\Omega\,[2\,D^2 + c\,c' + c_i\,c'_i]$$

La différence correspondante s'obtient comme suit:

(79) $$\begin{cases} C_4 - C'_4 = c^4 - c_i^4 - c'^4 + c_i'^4 = (c^2 + c'^2)\,(c^2 - c'^2) - (c_i^2 + c_i'^2)\,(c_i^2 - c_i'^2) = \\ = D\,[(c + c')\,(c^2 + c'^2) - (c_i + c'_i)\,(c_i^2 + c_i'^2)] = D\,[(C_3 + C'_3 + c\,c'\,(c + c') - c_i\,c'_i\,(c_i + c'_i)] \end{cases}$$

ce qui finalement d'après (73) ainsi que d'après (65) donne:

(80) . $$C_4 - C'_4 = 2\,D\,[2\,\Omega\,(u + u') + \delta\,D^2] = 2\,D\,[(c + c' - 2\,\delta)\,\Omega + \delta\,(D^2 + 2\,c\,c')]$$

Au moyen des nouvelles formules auxiliaires (72) (73) (75) (78) (80), ainsi établies, il est facile d'établir toutes les formules dont nous nous occupons et que nous avons déjà en partie obtenues d'une autre manière. On a par exemple d'après (63)*:

(81) . . . . $$u = \frac{1}{2\,\Omega}\Big[(c - D)\,c^2 - (c_i - D)\,c_i^2\Big] = \frac{1}{2\,\Omega}\Big[C_3 - D\,C_2\Big]$$

(82) . . . . $$u' = \frac{1}{2\,\Omega}\Big[(c' + D)\,c'^2 - (c'_i + D)\,c_i'^2\Big] = \frac{1}{2\,\Omega}\Big[C'_3 + D\,C'_2\Big]$$

et on en tire immédiatement les valeurs déjà trouvées:

(83) $$u - u' = \frac{C_3 - C'_3 - 2\,\Omega\,D}{2\,\Omega} = \frac{D}{2} \qquad u + u' = \frac{C_3 + C'_3 - 2\,D^2\,\delta}{2\,\Omega} = \frac{c + c'}{2} + \delta\,\frac{c\,c' - \Omega}{\Omega}$$

On a d'une façon analogue pour les moments J_1 et J_3 d'après (66):

(84) . . $$J_1 = \frac{1}{3}\Big[(c' + D)\,c'^3 - (c'_i + D)\,c_i'^3\Big] - \Omega\,u'^2 = \frac{1}{3}\Big[C'_4 + D\,C'_3\Big] - \Omega\,u'^2$$

(85) . . $$J_3 = \frac{1}{3}\Big[(c - D)\,c^3 - (c_i - D)\,c_i^3\Big] - \Omega\,u^2 = \frac{1}{3}\Big[C_4 - D\,C_3\Big] - \Omega\,u^2$$

* Ces formules (63) pourraient déjà être remplacées avec avantage par celles qui suivent ici (81) et (82).

et avec ces valeurs on obtient immédiatement les formules déjà trouvées précédemment:

$$(86) \quad . \quad J_3 - J_1 = \frac{1}{3}(C_4 - C_4') - \frac{D}{3}(C_3 + C_3') - \frac{1}{2} D\Omega(u + u') = \frac{1}{6} D\,\Omega\,(u + u')$$

$$(87) \quad . \quad J_3 + J_1 = \frac{1}{3}(C_4 + C_4') - \frac{D}{3}(C_3 - C_3') - \Omega(u^2 + u'^2) = \Omega\left[\frac{D^2}{12} + \frac{2}{3}(c\,c' + c_i c_i') - 2\,u\,u'\right]$$

Quant à la valeur de J_2, nous en avons déjà donné au N° *XXXII* (40) une expression générale obtenue par les procédés ordinaires, concernant les triangles isocelles; on aura d'après cela ici*:

$$(88) \quad . \quad J_2 = \frac{1}{24}\left[(c^4 + c'^4 - c_i^4 - c_i'^4\right] - \frac{\Omega}{2}(v - v')^2 = \frac{1}{24}\left[C_4 + C_4'\right] - \frac{\Omega D^2}{8} = \frac{\Omega}{24}\left[D^2 + 2\,(c\,c' + c_i c_i')\right]$$

En combinant cette expression très-simple avec la formule (87) on arrive aux formules (55) que nous avions citées tout d'abord.

Les formules (56) enfin ne représentent ici qu'un cas particulier des formules que nous avons établies au N° *XXXII* (31) (32) (33) d'une manière générale pour un profil de section quelconque. Rappelons à cette occasion que les cornières à côtés inégaux sont bien moins avantageuses que les cornières à côtés égaux de même poids, lorsqu'elles sont employées isolément pour résister à la compression et à l'aboutement qui en dérive; ce sont aussi ces raisons pratiques qui ont déterminé l'auteur à n'admettre que ce dernier genre de cornières dans le bas du Tab. X : 3 du Tome II. Tous les calculs ci-dessus concernant les fonctions ω, $J_{\min}$, $J_{\max}$ . . . etc. servent donc à démontrer qu'on ne devra presque jamais s'en servir. Le tableau (51) des fonctions relatives aux cornières-types que nous proposons n'aura dans cet ordre d'idées une importance pratique que dans sa moitié supérieure, la moitié inférieure servant de complément théorique. En comparant les valeurs d'en haut aux valeurs correspondantes en bas, on peut constater un certain nombre de rapports sensiblement constants; en particulier le module d'inertie minimum est à très-peu près égal aux 0·8 du module analogue calculé suivant les côtés.

XXXVIII. Maîtresses-poutres, poutres transversales et longerons à âme pleine.

1. Vérification des poutres à âme pleine en général.

Les poutres à âme pleine généralement employées dans les constructions de ponts ne se composent presque toujours que de tôles et de cornières assemblées à l'aide de rivets de 18 à 24^{mm} de diamètre. Les fers en I ⊥ [n'y figurent que bien rarement, ils sont plus-spécialement employés pour constituer les pièces du tablier de voie des ponts-routes où les fers en ⌒ se rencontrent également. La vérification des poutres à âme pleine porte d'ordinaire sur les points suivants.

1. Résistance à la flexion (travail dans les fibres extrêmes à examiner au milieu de la portée).

2. Résistance au cisaillement longitudinal dans le sens où les fers ont été laminés, sens des fibres (à examiner pour l'âme pleine dans le voisinage des appuis).

3. Ecartement des rivets qui assemblent l'âme pleine avec les bandes (à examiner dans le voisinage des appuis).

4. Evaluation de la déformation probable sous l'action de la charge mobile (à examiner vers le milieu de la portée).

Nous nous bornerons à rappeler ici sommairement ce qui concerne ces divers calculs bien connus en insistant seulement sur ceux que les ingénieurs ont plus rarement occasion de mettre en pratique.

ad 1. Pour vérifier la résistance à la flexion on obtient le travail maximum dans la fibre extrême d'une section considérée, en divisant le moment de flexion, calculé pour les forces extérieures, par le module d'inertie de la section rapporté à son axe neutre.

Nous avons déjà donné au N° *XXXVII* des explications détaillées sur la manière de calculer le module d'inertie (Quotient du moment d'inertie par la distance à l'axe neutre de la fibre la plus fatiguée). Pour les poutres en tôle composées avec des cornières de types usuels on obtiendra immédiatement les moments d'inertie nécessaires à l'aide des Tab. XI, XII et XIII du

* On pourrait aussi calculer J_2 ainsi que J_1 J_3 et $u\,u'$ d'après (81) (82) (84) (85) (88) au moyen de C_2 C_3 C_4 C'_2 C'_3 C'_4, puisque ces dernières valeurs auxiliaires peuvent être établies immédiatement au moyen des tables connues de carrés et cubes. Nous ne pensons pas que ces divers procédés aient été appliqués.

Tome II de cet ouvrage*. Pour le calcul des moments de flexion, on pourra dans le cas des travées indépendantes**, utiliser nos formules du N° *XVI* (12) (17) (22), et du N° *XXVII* (50) ainsi que du Tab. XIV du Tome II, et dans le cas des travées continues, adopter les procédés que nous exposons plus loin.

ad 2. La résistance au cisaillement longitudinal concernant surtout l'âme pleine des poutres que nous considérons ici, forme l'objet d'une théorie qui depuis longtemps déjà est presqu'aussi connue des ingénieurs que celles de l'extension et de la flexion simples; il ne nous paraît cependant pas superflu de donner à ce sujet quelques explications dans le but de bien préciser ces diverses conceptions et la valeur des déductions que l'on en tire.

La théorie de l'extension simple fait abstraction de la cohésion que les fibres ont entre elles, de façon que toutes les fibres du faisceau considéré, sont supposées tendues (ou comprimées) comme ci elles agissaient isolément. La théorie de la flexion simple ne tient compte de la cohésion que pour motiver l'hypothèse faite sur la déformation des diverses fibres, d'après laquelle une section primitivement plane doit rester plane; elle admet pour le reste que dans chaque fibre l'élasticité longitudinale est seule en jeu et que la résistance à l'extension ou à la compression simple s'exerce sans effet de cohésion.

La théorie de la résistance au cisaillement longitudinal enfin, peut être considérée comme une espèce de variante de la théorie de la flexion simple; on y admet, comme pour la flexion, la loi de la conservation des sections planes pendant la déformation mais on suppose que c'est la cohésion élastique des fibres entre elles qui constitue seule leur pouvoir résistant, et que ces fibres n'ont par suite aucun pouvoir résistant dans le sens de la théorie de l'extension simple. La théorie du cisaillement longitudinal ainsi précisée*** est donc un peu analogue à celle du cisaillement transversal et à celle de la torsion.

On devra se rendre bien compte de toutes ces hypothèses sur la répartition du travail élémentaire, lorsqu'on voudra s'en servir telles quelles, ou même en les combinant, dans les calculs de résistance†.

Représentons fig. (89) une barre prismatique ou cylindrique en élévation longitudinale et en coupe; considérons la résistance dans le plan de cisaillement $A\,A'$ et admettons pour fixer les idées que cette barre comprimée du haut en bas fléchisse comme une poutre d'un pont le

---

* Voir l'exemple cité à la page X de l'introduction du Tome II. Pour des profils de section non symétriques dans le sens vertical, mais qui contiennent une partie centrale symétrique nous recommandons d'employer l'axe partiel de symétrie qui s'y rapporte comme nous l'avons fait pour un profil de rail au N° *XXXVII*: 4; en utilisant les valeurs de la Tab. X: 1 du Tome II on aura ainsi facilement les résultats cherchés. Si l'axe neutre est connu d'avance on pourra encore appliquer immédiatement les tables aux deux parties de profil qu'il sépare, en prenant ensuite la demi-somme des deux moments d'inertie obtenus.

Si l'on n'était pas décidé à employer des cornières données, on pourrait encore trouver rapidement des sections faisant l'affaire à l'aide de:

N. Riche „Tables de moments de rupture" (Paris, Dunod, 1869, in 8°), calculées pour un travail du fer de 600^{kg} au cm^2 pour des poutres ayant jusqu'à 5^m de hauteur et formées avec les cornières 60 : 8, 70 : 9, 80 : 10, 90 : 11, 100 : 12. Cet ouvrage donne aussi les poids des poutres au *m* courant.

Henry Forest „Recueil pratique de moments d'inertie" (Paris, Dejey et Cie 1877, in 8°), cités comme collection de profils adoptés pour les ponts en tôle de la Cie du Nord (français) rangés d'après leur modules d'inertie et allant jusqu'à des hauteurs de poutres de 3^{m}50. Cet ouvrage indique aussi les sections plus faibles sur le côté des mêmes ponts.

** Pour les ponts à une seule travée on possède en France les ouvrages de MM. Bresse, Collignon ... etc. En Autriche on dispose d'une excellente collection de formules concernant ces ponts: Heinrich Schmidt: „Beiträge zum Brückenbaue für angehende Ingenieure", Wien. Waldheim, 1869. L'auteur applique toutes ses formules au cas le plus général où les extrémités de la poutre sont prolongées au-delà des appuis et y supportent des poids. Le cas spécial d'un encastrement s'obtient en supposant le bras de levier infini et le poids qu'il porte nul. (Pour les cas ordinaires notre Tab. XIV du Tome II suffira amplement).

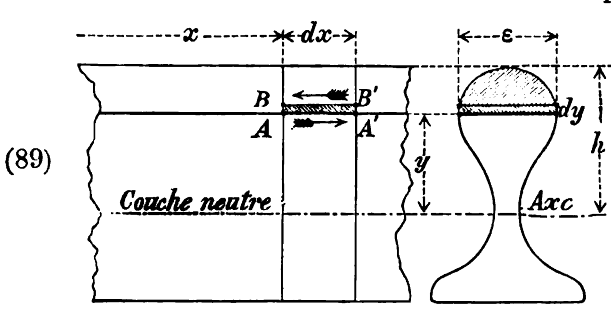
Remarquons toutefois que toutes ces hypothèses rentrent comme cas particuliers dans la théorie générale des poutres continues de l'auteur, exposée plus loin aux N^{os} *XLIX* à *LVI*, lorsqu'on y suppose que α_o β_o M_o M_n ne sont pas nuls, comme nous le faisons voir dans une remarque annexé au N° *LII*.

*** Cette déformation ou comme on l'appelle souvent „le glissement longitudinal des fibres les unes sur les autres" n'est devenue l'objet d'une théorie nouvelle, que lorsqu'on eût à s'occuper des poutres construites en Russie à l'aide de planches superposées, par le colonel Jurafskij. (Ann. des P. et Ch. 1856.)

† On a su combiner jusqu'ici la théorie de l'extension simple avec celle de la flexion simple pour expliquer la répartition inégale du travail élémentaire dans une section sur laquelle agit excentriquement la résultante des forces (axe neutre, noyau central). Pour une section recevant cette résultante en son centre de gravité on admet la répartition égale entre toutes les fibres ce qui est en désaccord avec les faits observés. Une combinaison de l'extension simple et du cisaillement longitudinal pour expliquer les faits (détours résultant des trous de rivets) peut toujours être considérée comme possible, mais ne paraît pas avoir été proposée jusqu'ici.

plan $A A'$ se trouvant au-dessus de la fibre moyenne c'est-à-dire dans la partie comprimée de la barre. Nommons x l'abscisse de la section $A B$ par rapport à une origine quelconque située sur la gauche et $d x$ l'écartement infiniment petit des sections $A B$ et $A' B'$. Dans la couche infiniment mince $A B B' A'$ d'épaisseur $d y$ et de longueur $d x$ la compression élémentaire augmente de $A B$ vers $A' B'$ et la différence des compressions exercées aux extrémités de l'élément $A B B' A'$ considéré comme corps solide isolé, doit être compensée uniquement et exactement par l'excès du cisaillement de A vers A' sur celui de B' vers B. C'est ce que nous allons mettre en équation. Désignons à cet effet (en admettant une déformation plane) par:

(89)



ε . . . . . . la largeur de la couche $A A'$ mesurée dans la section parallèlement à la couche neutre;

y . . . . . la hauteur de la couche $A A'$ au-dessus de la couche neutre horizontale;

J_x . . . . . le moment d'inertie de toute la section avec l'abscisse x, rapporté à l'axe neutre;

M_x . . . . . le moment de flexion } évalués tous deux pour le point A d'après les forces

V_x . . . . . l'effort tranchant } extérieures qui agissent sur la pièce;

i . . . . . . le travail élémentaire par unité de surface d'une fibre comprimée en A, entendu comme dans la théorie de la flexion simple;

ϑ . . . . . . le travail élémentaire par unité de surface de $A A'$ en A, sous l'effort de cisaillement, lequel travail vient remplacer ici en quelque sorte le travail i;

m_y . . . . . le moment statique de la partie de la section située au-dessus de A (couverte de hachures sur le profil), rapporté à l'axe neutre de la section.

L'élément de couche $A B B' A'$ a une section $\varepsilon d y$ et se trouve par suite de la flexion, pressé un peu plus en $A' B'$ (de A' vers A) qu'en $A B$ (de A vers A'). La différence des pressions $\varepsilon \times d y \times \left(\frac{d i}{d x} d x\right)$ qui est dirigée vers la gauche, doit être annullée par la différence entre les efforts de cisaillement de A vers A' et de B' vers B, laquelle sera évidemment exprimée par $\frac{d (\varepsilon\, dx \times \vartheta)}{d y} dy$ où ε représente une fonction de y d'après la forme du profil de section. On aura donc en tenant compte des signes (diminution de $\varepsilon\vartheta$ pour des valeurs croissantes de y) et en supprimant les facteurs communs $d x\; d y$, l'équation:

(90) . . . . $$\varepsilon \left(\frac{di}{dx}\right) = -\frac{d(\varepsilon\vartheta)}{dy} \qquad \varepsilon\vartheta = -\int_0^y \varepsilon \left(\frac{di}{dx}\right) dy + X$$

où X représente une grandeur (constante) indépendante de y ne pouvant contenir que x, et où i est une conception tirée de la théorie de la flexion simple, résultant des forces extérieures et de la forme de la section. Nous admettons à cet égard que la barre possède au moins dans un intervalle très-petit Δx près du point A, une section constante; on aura alors:

(91) . . . $$i = \frac{M_x}{J_x : y} \qquad \frac{d i}{dx} = \frac{V_x}{J_x : y} \qquad \varepsilon\vartheta = -\frac{V_x}{J_x}\int_0^y \varepsilon\, y\, dy + X$$

L'intégrale qui figure dans cette équation n'est autre chose que le moment statique de la partie de section comprise entre A et l'axe neutre, évalué d'après la méthode (2) des segments aux abscisses, par rapport à cet axe. La grandeur X d'autre part s'obtient par la condition $\varepsilon\vartheta = o$ pour $y = h$ c'est-à-dire pour la fibre extrême; d'où la formule connue:

(92) . . . . $$\varepsilon\vartheta = \frac{V_x}{J_x}\left[\int_0^h \varepsilon\, y\, dy - \int_0^y \varepsilon\, y\, dy\right] = \frac{m_y}{J_x} V_x$$

Les cisaillement $\varepsilon\vartheta$ est maximum sur l'axe neutre et diminue à partir de là proportionnellement à m_y. La formule sert généralement à déterminer ε, la limite ϑ se trouvant fixée à l'avance (le § 4 lit. a 4, de l'ordonnance autrichienne prescrit 500^{kg} par cm^2).

ad 3. L'écartement à donner aux rivets qui assemblent les bandes à la tôle verticale, peut être vérifié facilement à l'aide de la théorie précédente; désignons par:

σ . . . . . la surface de section de l'un des rivets,

d . . . . . la distance de deux rivets voisins.

Considérons une section dans une poutre ordinaire composée d'une tôle verticale, de quatre cornières et d'un nombre quelconque de plates bandes et étudions les rivets à double section de cisaillement traversant les cornières et la tôle verticale. La surface de cisaillement longitudinal par unité de longueur de x sera $2\sigma : d$ au lieu de ε et l'on aura d'après la formule (92):

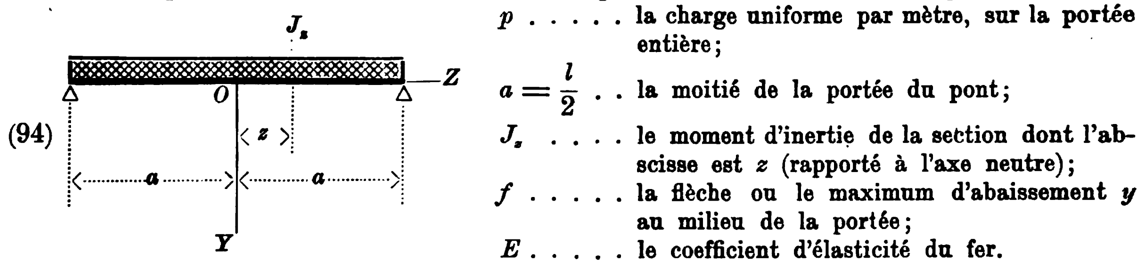
(93) . . . $$\varepsilon = \frac{2\sigma}{d} \qquad \frac{2\sigma}{d}\,\delta = \frac{m_y}{J_x} V_x \qquad d = \frac{2J_x}{m_y}\,\frac{\sigma\delta}{V_x}$$

En appliquant cette formule on se rappellera qu'ici σ concerne non le cisaillement dans le sens des fibres mais le cisaillement transversal des tiges de rivet limité à 600^{kg} par cm^2 (exceptionnellement 500^{kg}) au § 4 lit. *a* 3. de l'ordonnance autrichienne, et que l'on trouvera par conséquent les produits $2\sigma\delta$ déjà tout calculés au Tab. XIII du Tome II.

ad 4. **La déformation probable d'un pont sous l'action d'une charge mobile**, permanente, ou quelconque a donné lieu à des recherches très-étendues qui sortent entièrement du cadre restreint de ce livre. Il convient seulement d'insister sur ce fait bien constaté par les praticiens, que ce sont les procédés de calcul les plus simples qui en pareille matière sont en général préférables.

En particulier pour l'abaissement au milieu de la portée dans les ponts à travées indépendantes, chargées sur la portée entière, les deux anciennes formules très-simples, qui font abstraction des détails de construction des poutres, donnent d'excellents résultats*.

Prenons fig. (94) comme origine des coordonnées le milieu O de la portée, en comptant les abscisses positives suivant OZ, les ordonnées positives suivant OY, et désignons par:

(94) 

p . . . . . la charge uniforme par mètre, sur la portée entière;

$a = \frac{l}{2}$ . . la moitié de la portée du pont;

J_z . . . . le moment d'inertie de la section dont l'abscisse est z (rapporté à l'axe neutre);

f . . . . . la flèche ou le maximum d'abaissement y au milieu de la portée;

E . . . . . le coefficient d'élasticité du fer.

L'équation connue pour la déformation plane de la fibre moyenne est alors:

$$EJ_z\frac{d^2y}{dz^2} = -pa(a-z) + p(a-z)\frac{a-z}{2} = -\frac{1}{2}p(a^2-z^2)$$

et nous avons maintenant deux hypothèses extrêmes à faire entrer dans les calculs, suivant que l'on suppose $J_z = J$ constant pour toute la portée, ou suivant que l'on considère J_z comme diminuant entre $z = o$ et $z = a$ depuis J_m jusqu'à zéro en suivant exactement la loi parabolique; c'est-à-dire suivant que.

(95) . . $J_z = J = \text{const.}$ ou bien $J_z = J_m\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) = J_m\frac{a^2-z^2}{a^2}$

(96) . . $\frac{dy}{dz} = \frac{p}{2EJ}\left(\frac{z^3}{3} - a^2z\right)$ . . . . $\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{2}\frac{pa^2}{EJ_m}z$

(97) . . $y = \frac{p}{24.EJ}(a^2-z^2)(5a^2-z^2)$ . . . . $y = \frac{1}{4}\frac{pa^2}{EJ_m}(a^2-z^2)$

(98) . . $f = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EJ} = \frac{1}{76{\cdot}8}\frac{pl^4}{EJ}$ . . . . $f = \frac{1}{64}\frac{pl^4}{EJ_m}$

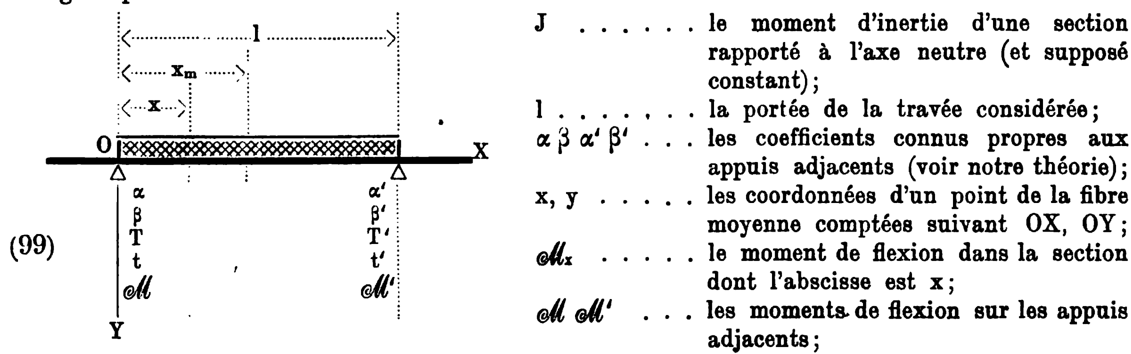
La flèche produite de fait, devra rester comprise entre ces deux valeurs et il semble tout indiqué d'accepter en pratique la moyenne des deux coefficients qui est $\frac{1}{70}$ à très-peu près. Ce coefficient pourra du reste être modifié encore empiriquement suivant le genre de constructions métalliques auxquelles doit être appliquée la formule**.

* Les procédés souvent proposés dans ces derniers temps pour tenir compte de ces détails ne sauraient être recommandés en pratique.

** Pour les grands ponts de toute espèce les formules ainsi rectifiées réussissent toujours très-bien. Il n'en est pas de même pour les ponts en tôle à faible portée où les déformations sur les appuis et l'incertitude relative à la valeur de l à mettre dans la formule, constituent deux causes d'erreur qui altèrent très-sensiblement l'exactitude de cette estimation. Quant au coefficient E on l'admet presque toujours $= 2{,}000.000^{kg}$ par cm^2.

Pour les ponts à poutres continues l'abaissement dans une section considérée pour une combinaison de charge donnée, ne peut être calculé qu'au moyen de procédés plus compliqués pour lesquels il convient de s'en tenir en pratique à ce qui suit:

On calculera avant tout pour la combinaison (tout à fait quelconque) de charge donnée, les moments de flexion sur les appuis adjacents à la travée que l'on considère, en se servant à cet effet des méthodes que nous exposons plus loin aux N^{os} *XLIX* à *LVII*. Désignons (99) sur la figure par:



J . . . . . . le moment d'inertie d'une section rapporté à l'axe neutre (et supposé constant);

l . . . . la portée de la travée considérée;

$\alpha\ \beta\ \alpha'\ \beta'$ . . . les coefficients connus propres aux appuis adjacents (voir notre théorie);

x, y . . . . . les coordonnées d'un point de la fibre moyenne comptées suivant OX, OY;

$\mathcal{M}_x$ . . . . . le moment de flexion dans la section dont l'abscisse est x;

$\mathcal{M}\ \mathcal{M}'$ . . . les moments de flexion sur les appuis adjacents;

t t' . . . . . les tangentes des inclinaisons qu'affecte la fibre moyenne au-dessus de ces appuis;

T T' . . . . . les fonctions de surcharge $+ 6\,E\,J\,t$ et $- 6\,E\,J\,t$ telles qu'elles sont citées au tableau (56) du N° *LIII* (ou au Tab. XIV du Tome II).

Pour obtenir dans ce système les moments $\mathcal{M}\ \mathcal{M}'$ dont nous avons besoin, on se sert des formules que nous établissons au N° *LI*.

(100) . . . $$M = \frac{\alpha}{l}\,\frac{\beta\,T + \beta' T'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \qquad\qquad M' = \frac{\beta'}{l}\,\frac{\alpha\,T + \alpha' T'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

Ces formules donnent les moments sur les appuis adjacents à une travée chargée seule; on en déduit de suite au moyen des α et β de tous les autres appuis, les moments relatifs à ces appuis pour la charge en question. En appliquant successivement ce procédé à toutes les travées qui, d'après la combinaison de surcharge considérée, doivent se trouver en charge, et en faisant ensuite pour chaque appui la somme algébrique des résultats obtenus, on aura les moments aux appuis parmi lesquels se trouvent aussi ceux $\mathcal{M}\ \mathcal{M}'$ qu'il nous faut pour la travée (99).

Ces moments une fois calculés on a d'après les équations aux N^{os} *XLIX* (6) et *L* (20) (21) de notre théorie.

(101) $$\mathcal{M}_x = \frac{(l - x)\,\mathcal{M} + x\,\mathcal{M}'}{l} + \mathfrak{M}_x \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{M}_x = \Sigma_0^x\,P\,(x - a) - \frac{x}{l}\,\Sigma_0^l\,P\,(l - a)$$

(102) . $$t = \frac{1}{6\,E\,J}\left(\frac{T}{l} - 2\,\mathcal{M} - \mathcal{M}'\right) \qquad\qquad t' = -\frac{1}{6\,E\,J}\left(\frac{T'}{l} - 2\,\mathcal{M}' - \mathcal{M}\right)$$

où, les valeurs $\mathfrak{M}_x$ T et T' sont celles des fonctions qui pour les surcharges les plus usitées sont indiquées au tableau (56) du N° *LIII*. Nous admettons ici pour simplifier qu'une charge de p par mètre, couvre la portée entière de la travée et l'on aura:

(103) . . . . $$\mathfrak{M}_x = -\frac{1}{2}\,p\,x\,(l - x) \qquad\qquad T = T' = \frac{1}{4}\,p\,l^3$$

Il vient alors pour l'équation de la fibre moyenne deformée:

(104) . . . . $$E\,J\,\frac{d^2y}{dx^2} = \mathcal{M}_x = \mathcal{M} - \frac{p}{2}\left[l - 2\,\frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}}{pl}\right]x + \frac{1}{2}\,p\,x^2$$

(105) . . . . $$E\,J\,\frac{dy}{dx} = E\,J\,t + \mathcal{M}\,x - \frac{p}{4}\left[l - 2\,\frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}}{pl}\right]x^2 + \frac{1}{6}\,p\,x^3$$

(106) . . . . $$E\,J\,y = E\,J\,t\,x + \frac{\mathcal{M}}{2}\,x^2 - \frac{p}{12}\left[l - 2\,\frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}}{pl}\right]x^3 + \frac{1}{24}\,p\,x^4$$

Le calcul exact de l'abscisse x qui rendrait y maximum, exigerait d'après (105) la résolution d'une équation du troisième degré. Mais on se contente de prendre en pratique le point évidemment très-voisin pour lequel $\mathcal{M}_x$ est minimum et où d'après (104) la fibre moyenne à la plus

forte courbure; en introduisant la valeur correspondante x_m de l'abscisse et celle de t d'après (102) (103) dans la formule, celle-ci devient:

$$(107)\quad EJ\,y_m = \frac{1}{6}\left(\frac{pl^2}{4} - 2\,\mathcal{M} - \mathcal{M}'\right)x_m + \frac{\mathcal{M}}{2}\,x_m^2 - \frac{p}{8}\,x_m^4 \;\ldots \text{avec} \;\ldots\; x_m = \frac{1}{2} + \frac{\mathcal{M} - \mathcal{M}'}{pl}$$

Cette formule pour une poutre continue, se réduit avec $\mathcal{M} = \mathcal{M}' = o$ à la formule (98) déjà trouvée pour la travée indépendante*; en pratique on aura généralement à l'appliquer pour les combinaisons de charges qui donnent les plus grands moments négatifs près du milieu des travées et qui sont indiquées pour la parabole N° 6 dans notre barême des charges (136) du N° *LVII* (aussi Tab. XV du Tome II). Si l'on pouvait pour calculer $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, y admettre les mêmes combinaisons de charge, qui servent aussi aux calculs de résistance, il suffirait d'extraire ces moments des calculs déjà faits. Malheureusement cette condition sera rarement remplie, parce que le calcul des flèches probables devra être généralement effectué à l'occasion des surcharges d'épreuve (§ 8 lit. *a*, 2, de l'ord. autrichienne) pour lesquelles la charge mobile se compose de deux trains, au plus, par voie. On pourra toutefois tenir compte de ces conditions en effectuant les additions algébriques qui fournissent les moments $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, et en réduisant aussi préalablement les moments partiels en raison des charges mobiles à considérer**.

2. Usages des tables du Tome II pour le calcul des poutres à âme pleine.

Nous renvoyons ici à l'exemple de calculs de résistance que nous donnons au N° *XLIII* au sujet d'un pont en tôle de 9^m72 de portée à voie en dessous, pour lequel nous admettons que la charge permanente représente 16°/₀ de la charge mobile***. On trouvera généralement qu'au moins pour tous les ponts en tôle dont la portée ne dépasse pas 14^m, il suffit en pratique de tenir ainsi compte de la charge permanente au moyen d'un poids estimé en centièmes comme nous l'indiquons au Tab. V du Tome II. Admettons donc aussi pour les longerons, le poids additionnel de 4·5°/₀ et pour les poutres transversales, le poids qui est inscrit au Tab. III du Tome II et qui doit être considéré comme appliqué à l'endroit des attaches des longerons. Les fonctions M_a V_b $\mathcal{P}_a$ .... etc. sont du reste, dans notre exemple, tirées des Tab. V et III du Tome II † qui convient aux prescriptions de l'ordonnance autrichienne, mais on pourrait se servir encore d'autres prescriptions sans que tout ce qui suit cesse d'être applicable.

Le calcul des moments d'inertie des trois poutres s'effectue à l'aide des Tab. XI, XII et XIII du Tome II comme suit:

(108)

maîtresse-poutre		poutre transversale		longeron	
1 âme pleine $\frac{900}{10}$	60750	1 âme pleine $\frac{500}{10}$	10417	1 âme pleine $\frac{320}{10}$	2731
4 cornières $\frac{100 \times 100}{12}$.	160475	4 cornières $\frac{100 \times 100}{14}$ ..	51313	4 cornières $\frac{70 \times 70}{8}$ ...	8421
plates bandes $\frac{220}{26}$	245303				
profil plein	466528	profil plein	61730	profil plein	11152
Rivets	— 63527	Rivets	— 5668	Rivets	— 1527
	$J = 403001$		$J = 56062$		$J = 9625$

* Dans le cahier IV ex 1886 „Zeitschrift des österr. Ing.- und Arch.-Vereines“ M. Casimir Zaleski (inspecteur sup^r de la Société des chem. de fer autrichiens de l'État) applique à deux ponts avec poutres à âme pleine l'un à travée indépendante l'autre à trois travées continues, une méthode de calcul particulière pour obtenir la déformation; il y tient compte même de tous les changements de section et de J_x le long de ces poutres. Cette étude laborieuse fournit la preuve de l'exactitude bien suffisante des formules usuelles (98) (107) pour la pratique des ingénieurs.

Pour les poutres à triangles M. Bukowsky, professeur à l'école polytechnique tschèque de Prague, a publié dans le cahier I ex 1880 „Mitth. des Archit.- u. Ing.-Vereines in Böhmen“ une méthode graphique intéressante, pour obtenir la déformation d'une poutre au moyen des déformations de toutes ses parties composantes estimées d'après les efforts qui leur incombent; cette méthode permet de dresser une épure contenant les déformations dans le sens vertical en grandeur naturelle. Cette étude peut également contribuer à confirmer l'usage des formules pratiques citées.

** On calculera d'après les trains de surcharge une échelle spéciale a de surcharges par *m*, équivalente au train, et on prendra pour chaque travée la charge uniforme par *m* qui correspond à sa portée. Les flèches calculées avec ces charges, comme nous l'indiquons dans le texte, coïncident assez bien avec les flèches observées.

*** Notre Tab. V au Tome II indiquerait 15°/₀ en moyenne, mais, le pont étant à voie en dessous, doit être un peu plus lourd; d'ailleurs 16°/₀ résultent de l'estimation faite par la Cie du Nord autrichien dont les nouveaux types contiennent le pont cité.

† V_b = quotient (482969 : 972 = 49690^kg en nombre rond) du moment tournant de la Tab. V par la portée.

Les déductions pour trous de rivets concernent dans les maîtresses-poutres l'assemblage des plates bandes aux cornières, dans les poutres transversales et les longerons, l'assemblage des cornières et de la tôle verticale; cette déduction se calcule à l'aide des Tab. XIII pour les trois poutres, en prenant $H = 87{\cdot}6$*, $H = 36{\cdot}6$, $H = 22{\cdot}2$ ** comme entrées. Les résultats trouvés ci-dessus séparément trouvent encore leur application pour le calcul de l'écartement à donner aux rivets et pour celui de la flèche au milieu de la portée, à savoir:

$J_{\blacktriangle}$ . . . . moment d'inertie du profil plein sur l'appui $= 60{\cdot}750 + 160{\cdot}475$,

J_{plein} . . . moment d'inertie du profil plein vers le milieu $= 466528$.

Les moments statiques $m_{\blacktriangle}$ et $m'_{\blacktriangle}$ des formules établies d'après (93) (92) pour l'écartement des rivets dans les bandes et pour l'épaisseur de l'âme (tôle verticale), concernent le profil de section des maîtresses-poutres sur les appuis et comprennent pour $m_{\blacktriangle}$ le profil d'une bande avec ses cornières, pour $m'_{\blacktriangle}$ la moitié de tout le profil de la poutre. Ces moments peuvent être calculés facilement à l'aide du Tab. X : 1 du Tome II (voir p. VII de l'introduction).

3. Principes à observer dans le choix des types de ponts en tôle.

1. Les types de ponts à âme pleine de la plupart des administrations de chemins de fer comprennent des portées allant jusqu'à 12^m (exceptionnellement 15^m). La hauteur des poutres varie $^1/_8$ à $^1/_{12}$ de la portée et l'on admet plus spécialement le rapport $^1/_8$ pour les portées les plus petites et le rapport $^1/_{12}$ pour les portées les plus grandes. Cette hauteur se trouve du reste limitée, dans le dernier cas, par la largeur des tôles que fournissent les usines, laquelle est d'ordinaire de 1^m20 au plus (exceptionnellement 1^m40) et permet d'atteindre avec le rapport de $^1/_{12}$ (exceptionnellement $^1/_{10}$) des portées allant jusqu'à 15^m.

2. Là où l'on dispose d'une hauteur suffisante les ponts à voie en dessus*** sont les plus avantageux pour toutes les portées. On pose la voie sur traverses de bois fixées aux maîtresses-poutres et faisant consoles pour le platelage extérieur, dans les pays où le bois s'achète à bon compte†; dans le cas contraire où le bois est très-cher, on se sert d'une voie sur longrines fixées sur les maîtresses-poutres; on pose alors le platelage du pont sur les entretoises, sur les consoles extérieures en fer et sur l'appareil même des culées.

3. Les poutres en fer ne se recommandent généralement que pour des portées de plus de 2^m, puisque pour des portées moindres on peut utiliser avec avantage des poutres en bois qui forment alors pour ainsi dire partie de la construction de la voie.

4. Lorsque la hauteur disponible est restreinte et la portée ne dépasse pas 6^m, les ponts à poutres jumelles en profil de] [avec des longrines en bois seront les plus économiques; le platelage reposera dans ce cas sur les entretoises, sur les consoles extérieures en fer et sur les culées même.

5. Lorsque la hauteur disponible est restreinte et que la portée est comprise entre 5 et 8^m, on admettra avec avantage les constructions à voie contrebaissée et on y posera le platelage à l'extérieur des maîtresses-poutres sur des consoles en fer spéciales. On pourra dans ces constructions même pour 8^m de portée, se contenter encore d'une hauteur de 70^{cm} disponible entre le bord inférieur des poutres et la tête du rail.

6. Pour des portées comprises entre 8^m et 12^m (exceptionnellement 15^m) on aura trois espèces de ponts-types à considérer; ce sont les types mentionnés précédemment (2 et 3) pour le cas où la hauteur disponible de construction est suffisante et les types à voie en dessous dans le cas contraire. La voie et le platelage se trouvent dans ce dernier cas posés sur les poutres transversales et les longerons. Ces constructions qui se présentent malheureusement fort souvent en pratique, par suite de l'insuffisance de la hauteur

* L'épaisseur totale des bandes = 38 dépassant 30^{mm}, on la divisera en $12 + 26^{mm}$ par exemple et on trouvera dans les tables pour $H = 87^{cm}6$ . . . 4731·6 et pour $H = 90^{cm}$ . . . 11150·1, donc ensemble 15881·7 à déduire par *cm* de largeur de trous de rivets. La deuxième partie de cette déduction concernant les plates bandes elles-même, peut s'effectuer encore implicitement en calculant les plates bandes à 180 : 26 au lieu de 220 : 26.

** On suppose toujours ici que le trou de rivet se trouve au milieu de la partie libre du côté vertical de la cornière. La hauteur devant servir d'entrée au Tab. XIII, est celle qui est comprise entre les bords centraux des trous des deux bandes, et s'obtient alors l'aide d'une règle mnémonique très-simple:

$H =$ hauteur de l'âme — (côté de cornière + épaisseur de cornière + diamètre de rivet).

*** Voir pour les expressions employées ici et notamment pour la voie en dessus et en dessous . . . . notre nomenclature des N^os^ *I* à *XIII*.

† Ce système n'est pas usité en France; la voie y est généralement posée sur longrines et lorsqu'elle est posée sur traverses, la longueur de celles-ci ne dépasse guère l'écartement des poutres sur lesquelles elles reposent.

disponible, sont bien plus lourdes et plus coûteuses que celles que nous avons citées d'abord; cela tient notamment à la présence des longues poutres transversales. On arrive toutefois à l'aide de ce système à pouvoir se contenter toujours d'une hauteur de 70^{cm}, disponible entre le bord inférieur des poutres et la tête du rail*.

7. Les maîtresses-poutres spéciales pour les garde-corps, sont à éviter en général au point de vue de l'économie, car l'on pourra en dépensant moins, faire porter le platelage extérieur sur des consoles en fer et sur les culées elles-mêmes. Pour les ouvrages à plusieurs voies, pour ceux qui sont situés aux abords des stations . . . et où il n'est pas rare que l'on ait à construire des paliers et trottoirs spéciaux, on devra toujours admettre les maîtresses-poutres en question et il conviendra alors de les calculer au minimum pour une charge mobile de 340^{kg} au m^2, même si cela n'est pas exigé.

b) Poutres à triangles et à treillis en général.

XXXIX. Application des poutres à triangles et à treillis aux ponts de chemins de fer.

1. Pour les portées de 15 à 20^m environ on admettra avec avantage des poutres à bandes rectilignes et à treillis double ou quadruple. Les croisillons composés généralement de fers plats pour les barres travaillant à l'extension et de cornières pour les barres travaillant à la compression devront être au tant que possible assemblés directement avec les tôles verticales des bandes simples (à profil en T), car l'emploi des tôles d'attache spéciales aux nœuds (goussets) ne paraît pas économique. On aura avantage à rechercher des assemblages dits symétriques c. a. d. où les rivets travaillent en double section. Les ponts les plus économiques sont ceux à voie en dessus posée sur traverses-consoles où les maîtresses-poutres écartées de 1^m50 à 2^m50 sont solidement entretoisées et entrecroisées. Dans les contrées où le bois est cher on se sert de longrines et on pose les garde-corps sur des consoles en fer. Lorsque la hauteur disponible de construction est restreinte on construit des ponts à voie contrebaissée et à voie en dessous; ces derniers sont toujours notablement plus lourds que les ponts à voie en dessus**.

2. Pour les portées de 35 à 45^m on aura encore avantage à construire des ponts à bandes rectilignes, et on y admettra des poutres à treillis double ou quadruple, ou avec double triangulation à diagonales tendues. En France on a souvent préconisé pour ces portées des poutres à treillis sextuple où les croisillons tendues sont des fers plats, les croisillons comprimés des fers en [; les rivets des attaches y travaillant en section simple.

On peut toutefois recommander encore ici les mêmes principes de construction que précédemment: assemblages directes des croisillons avec les bandes disposées autant que possible de façon à avoir des rivets travaillant en double section et de façon à éviter les pièces spéciales d'attache ou de remplissage (goussets et fourrures); nous ne comprenons pas parmi ces dernières les plaques rectangulaires très-utiles que l'on interpose depuis une dixaine d'années en Autriche à l'assemblage des croisillons comprimés, pour lui donner plus d'étendue*** et répartir les pressions.

Quant à l'écartement qu'il convient de donner aux maîtresses-poutres en vue de la stabilité du pont, il entraîne même pour les ponts à voie en dessus l'obligation d'admettre des poutres transversales; dans ces conditions c'est presque toujours une disposition à voie contrebaissée que l'on adopte, puisque l'on peut ainsi sans augmenter sensiblement les frais de construction, faciliter de beaucoup le service de l'entretien. Ces constructions convenablement entretoisées et entrecroisées ont une grande stabilité et sont notablement plus légères que les constructions de même portée à voie en dessous; ces dernières exigent un surplus de fer tant pour les poutres transversales, que pour les goussets qui les assemblent avec les montants verticaux et servent à maintenir horizontalement les bandes supérieures. Cet excès de poids tend à disparaître toutefois à mesure que la portée augmente.

* On est descendu sur les lignes du Nord-Ouest autrichien jusqu'à 54^{cm} ce qui implique une augmentation notable des masses de fer nécessaires et constitue des constructions exceptionnelles qu'il convient d'éviter.

** Les constructions avec triangulation simple à diagonales tendues, exécutées pour ces portées en Autriche et en Allemagne ne sont pas à recommander; on les avait calculées sans tenir compte des effets secondaires, et on était arrivé ainsi à des ponts relativement légers. Les avaries découvertes successivement sur quelques uns de ponts, l'accident du pont sur l'Itter près de Hopfgarten qui s'écroula au passage d'un train de marchandises en 1886 et bien d'autres faits encore ont pleinement confirmé les objections que l'Insp. I. R. des chem. de fer de l'Autriche a toujours élevées contre ces constructions, et ont depuis longtemps déjà déterminé les compagnies de chemins de fer à ne plus adopter ce système.

*** Les assemblages entre les croisillons et les bandes constituent les parties faibles de nos ponts modernes à grandes mailles, où nos calculs de résistance ne suffisent point. Il s'y produit sans aucun doute des moments secondaires, qui occasionnent un excès de travail considérable en certains points. Pour les ponts à treillis quadruple et sextuple ces inconvénients sont certainement bien moindres.

3. Pour les portées de 45m à 55m environ, les ponts à voie en dessous présentent certaines difficultés de construction, car en raison de la hauteur libre à réserver pour le passage du matériel roulant (4m80, § 2 de l'ordonnance) les maîtresses-poutres devront ou être relativement très-hautes pour pouvoir être entretoisées vers le haut, ou être relativement très-basses pour pouvoir conserver une rigidité suffisante dans le sens horizontal. Pour esquiver cette difficulté on a souvent fait usage de poutres à bande supérieure courbe (bow-string), pour lesquelles l'entretoisement supérieur ne s'étend que sur une certaine longueur avoisinant le milieu de la portée. Ces poutres à bande courbe se construisent le plus souvent avec une double triangulation à diagonales tendues ou même dans ces derniers temps avec deux triangulations symétriquement disposées et à montants verticaux communs. Pour les ponts à voie en dessus construits avec les portées considérées, on pourrait répéter ce que nous avons dit au 2 pour les portées moindres.

4. Pour les portées de 55m à 80m on est amené à employer presqu'autant de fer pour les ponts à voie en dessus que pour les ponts à voie en dessous; la première disposition mérite toujours la préférence si les conditions de hauteur exigées permettent de l'appliquer; la seconde est toutefois celle que l'on est obligé en pratique d'accepter le plus souvent. Dans les deux cas on devra relier solidement entre elles les bandes supérieures ainsi que les bandes inférieures.

Pour les ponts à deux voies il est avantageux de n'admettre que deux maîtresses-poutres et de longues poutres transversales, plutôt que deux constructions métalliques séparées; on devrs alors construire les poutres en dédoublant les bandes (bandes supérieures en caisson). Pour lea ponts à une seule voie on emploie des bandes simples, ainsi que des bandes doubles; la première disposition semble toutefois devoir se recommander comme plus économique lorsqu'on dispose de cornières de grands calibres.

Enfin pour la forme des maîtresses-poutres de ces ponts, on trouvera que les poutres à bandes droites avec treillis quadruple ou sextuple ou avec double triangulation à diagonales tendues, peuvent être mis en parallèle avec les poutres à bande supérieure courbe ayant presque toujours une double triangulation à diagonales tendues. Il semble toutefois que jusqu'a 70m de portée environ il sera toujours économique de faire usage de poutres à bandes rectilignes* surtout si l'on peut les utiliser comme poutres continues; ajoutons que les poutres droites présentent encore des avantages incontestables pour le service de l'entretien et offrent pour tout observateur impartial un aspect d'ensemble plus agréable.

5. Pour les portées de 80m à 120m, les ponts les plus appréciés (qui ont généralement la voie en dessous), paraissent être ceux qui sont construits avec des bandes supérieures courbes et avec une double ou triple triangulation à diagonales tendues. On a coutume pour des portées aussi grandes, de construire les bandes supérieures en forme de caisson (]⊏) et les bandes inférieures en forme de bandes jumelles (⊥ ⊥). Ces ponts notamment très-répandus en Autriche en Hollande et en Allemagne ne méritent plus guère le nom de Bow-string (arc tendu par une corde) et ont généralement (ou devraient avoir) des montants verticaux sur appuis assez élevés pour admettre un entretoisement supérieur des maîtresses-poutres. On pourra en résumé considérer ces constructions comme une espèce de terme moyen entre le bow-string et la poutre droite, se rapprochant d'avantage de ce dernier système** et faisant ressortir en sa faveur l'avantage que l'on trouve pour des portées semblables, à augmenter la hauteur des poutres dans la région médiane de la portée, plutôt que d'y renforcer seulement les bandes.

Les difficultés occasionnées pour des portées moindres, par les tôles verticales des bandes n'ont plus la même importance ici, où entre deux nœuds consécutifs, ces tôles ont déjà des longueurs (4 à 6m) et des poids tels, qu'on les rencontre) dans le débit ordinaire des usines, et où il ne saurait par suite plus être question de les découper ou déformer en forme de polygone.

* C'est aussi ce que l'on paraît admettre en France où l'on n'a construit jusqu'ici presque exclusivement que des poutres droites jusqu'à de pareilles portées. En Hollande on parait avoir admis précédemment une limite pratique plus élevée qui a baissé ensuite jusqu'à 65m environ. Voir à ce sujet la brochure statistique: „Les travaux publics dans le royaume des Pays-bas", par L. C. van Kerkwyk la Haye, 1878 — et les Annales des Ponts et Chaussées, Mars 1887.

** Poutres à bande courbe ou bien poutres bombées, pourrait être la désignation la plus générale de ce système. La bande courbe peut être de forme parabolique, circulaire, elliptique ou quelconque sans que la résistance à la flexion ni même les procédés de calcul à employer, en soient notablement affectés comme on le verra plus loin; c'est pourquoi aussi les dénominations: poutres paraboliques ou poutres semi-paraboliques, usitées par certains auteurs, doivent être considérées comme généralement impropres.

Ces poutres n'ont du reste plus absolument les caractères distinctifs des poutres (bow-string) paraboliques proprement dites à savoir: sections à peu près constantes des bandes, sections identiques de tous les montants verticaux, sections presque équivalentes de toutes les diagonales, et système de diagonales à effet contraire (Gegenstreben) s'étendant sur la portée entière.

6. Pour les portées de 120^m à 160^m les expériences faites concernent une nombre trop restreint de ponts exécutés en des temps bien différents* pour qu'il soit possible d'en déduire quelques principes généraux concernant les systèmes à recommander, d'après les idées actuelles des ingénieurs. On peut constater toutefois que les ponts exécutés en dernier lieu sont relativement bien plus légers, que les ponts analogues construits avec âmes pleines ou avec treillis à petites mailles, dès l'origine des ponts métalliques.

7. Les indications qui précèdent concernent naturellement les ponts de chemins de fer en pays de plaine. Là où il s'agit de passer sur un ravin profond encaissé entre des rochers solides, c'est le pont en arc qui est tout indiqué d'avance. Les ponts en arc sont encore d'un usage avantageux aux abords des grandes villes où l'on recherche des ouvrages d'un bel aspect. On a négligé d'appliquer ce système de construction en Autriche dans plusieurs cas où il aurait pu procurer une économie notable dans les frais de construction. On possède cependant deux exemples remarquables de ponts autrichiens en arc à tympans rigides construits tout dernièrement; ce sont le pont du chemin de fer de ceinture sur le canal du Danube à Vienne avec 69^m60 de portée et le pont à voie charretière avec 60^m de portée construit pour la route de Cles à Dermullo (Tyrol du Süd) par-dessus la gorge de la Noce qui a 138^m de profondeur**.

En France il existe des exemples très-nombreux et variés de ponts en arcs; parmi les plus récents on peut citer le viaduc de l'Erdre de 95^m de portée, le pont de Nantes à cinq arches de 61^m de portée, le pont de Rouen (en acier) à trois arches de 40^m, 48^m80 et 54^m60, de portée enfin le viaduc de Garabit dont nous avons déjà cité en note la grande arche à 165^m de portée.

8. Pour les ponts en courbe il convient, quelle que soit la portée, de placer l'axe rectiligne de la construction sur l'axe courbe de la voie, de façon que la flèche de la courbe (calculée sur la longueur des poutres) se trouve divisée en deux parties égales*** situées l'une

---

* Nous citons ci-après les ponts les plus connus ayant des ouvertures aussi grandes et appartenant à des systèmes de construction bien différents; nous y ajoutous les poids de fer employés:

No	Désignation des constructions métalliques	Portée	Années de construction	Poids par m de voie	Observations concernant le système de construction
1	Grande arche du viaduc de Garabit de la ligne Marvejols-Neussargues . . . . Trois supports de l'arc divisent en quatre l'écart des grandes palées $178^m = 52 + 2 \times 32 + 52$.	m 165	1882—85	kg 9540	Arc en forme de croissant portant des pontrès continues à double treillis (Syst. Eiffel) au-dessus d'un ravin de 122 m de profondeur. Voir l'ouvrage spécial de M. Boyer, Paris 1888
2	Grande arche du viaduc sur le Douro à Porto	160	1876—77	6000	dto. (compte rendu de la société des ingénieurs civils, Sept. et Oct. 1878)
3	Pont sur le Hudson river à Poughkeepsie .	160	1876—79	7630?	Poutres droites avec double triangulation à diagon. tendues (Expos. de Paris 1878, Engineer 1888. p. 240).
4	Pont sur l'Ohio à Cincinnati	158·5	1876—77	7540	dto. (relevé par M. Croizette-Desnoyers)
5	Pont sur le Mississippi à St.-Louis . . .	158·5	1871—74	5600	Arcs en acier chromé portant aussi une chaussée en bois (portefeuille de l'Ecole des P. et Ch.)
6	Pont sur le Leck à Kuilenbourg	154·5	1868—68	6941	Poutres bombées, triang. triple à diagonales tendues
7	Britanniabridge (détroit de Menai) . . .	143·5	1847—50	11270	Poutres à âme pleine (tubes) Stephenson
8	Viaduc de Saltasch	138·7	1856—58	6575	Bow-string à tube, avec 2 triangulations symétriques.
9	Pont sur la Wahal à Nimègues	130·3	1878—79	4552	Poutres bombées, triang. double à diagonales tendues
10	Conway-bridge	125	1844—48	9270	Poutres à âme pleine (tubes) Stephenson
11	Pont sur la Wahal à Bommel	124	1863—69	6188	Poutres bombées, triang. double à diagonales tendues
12	Pont sur la Vistule à Dirschau	121·1	1854—56	9180	Poutres droites avec treillis à petites mailles

La construction métallique d'une grande arche du viaduc sur le Firth of Forth actuellement en construction dans l'Ecosse, avec 518 mètres de portée, pésera pour les deux voies environ 16260^t, ce qui ferait 15^t6 par mètre de voie. Voir à ce sujet: „Bridging the Firth of Forth" bei B. Baker, London, Bedford press 1887, contenant beaucoup de photolithographies. — Voir encore la note plus récente de M. Gärtner au N° 48 „Wochenschrift des österr. Ing.- und Arch.-Vereines" ex 1887, puis la Revue des chemins de fer (Février 1889).

** Le pont en arc construit en 1884 pour le chemin de fer de ceinture à une flèche de 6^m327 qui pour la portée de 69^m60 donne un surbaissement de 1 : 10·9; ce pont est composé de 4 arcs en fer portant 2 voies; la charge permanente sur chaque arc est de 1500^{kg} par m. Le pont route sur la Noce construit en 1888 a une flèche de 10^m qui pour la portée de 60^m donne un surbaissement de 1 : 6. La chaussée a 6^m de largeur, elle est formée d'une assise de madriers ayant 15^{cm} d'épaisseur et repose sur deux arcs seulement affectés chacun d'une charge permanente de 900^{kg} par m d'arc. Les deux ponts sont munis de triangulations aux tympans et d'articulations aux culées.

*** Si l'on désigne par f la flèche, s la longueur de l'arc, l celle des poutres, ρ le rayon du cercle, on aura exactement:

$$(1) \quad f = \frac{l^2}{8\rho}\left[1 + \frac{1}{16}\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{128}\left(\frac{l}{\rho}\right)^4 + \frac{5}{4096}\left(\frac{l}{\rho}\right)^6 \cdots\right] = \frac{s^2}{8\rho}\left[1 - \frac{1}{48}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{5760}\left(\frac{s}{\rho}\right)^4 - \frac{1}{1290240}\left(\frac{s}{\rho}\right)^6 \cdots\right]$$

$$(2) \quad s = l\left[1 + \frac{1}{24}\left(\frac{l}{\rho}\right)^2 + \frac{3}{640}\left(\frac{l}{\rho}\right)^4 + \frac{1}{7168}\left(\frac{l}{\rho}\right)^6 \cdots\right] \qquad l = s\left[1 - \frac{1}{24}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{1920}\left(\frac{s}{\rho}\right)^4 - \frac{1}{322560}\left(\frac{s}{\rho}\right)^6 \cdots\right]$$

Il suffit en pratique de prendre pour f la valeur $l^2 : 8\rho$ ou bien $s^2 : 8\rho$.

vers le milieu de la portée l'autre près de chaque extrémité de poutre; on pourra se conformer ainsi facilement aux prescriptions du § 2 de l'ordonnance autrichienne. Les formules et règles diverses à l'aide des quelles on a voulu diviser la flèche en parties inégales telles, que les effets de flexion se répartissent également entre les maîtresses-poutres, n'ont pas réussi mieux pratiquement que la règle ci-dessus*.

XL. Calculs des poutres à treillis ou à triangles dans le ponts à travées indépendantes.

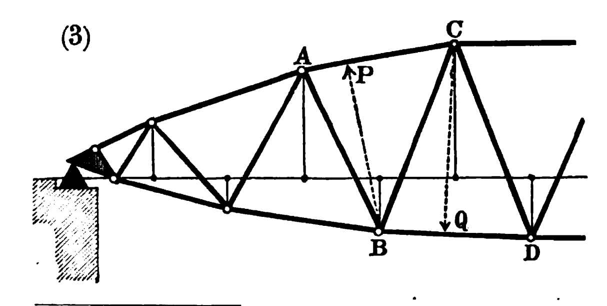
1. **Principes théoriques et règles générales pour effectuer les calculs.**

Nos calculs de résistance doivent toujours être considérés comme une sorte de vérification faite à posteriori. Si le projet a été trouvé insuffisant, il faut en dresser un nouveau meilleur, pour lequel on devra admettre des charges permanentes proportionnellement plus grandes . . . etc. jusqu'à ce que l'on ait un projet rectifié, que la vérification par le calcul confirme, tant en ce qui concerne la résistance, qu'en ce qui concerne les charges permanentes admises.

Les tâtonnements successifs que nous faisons entrevoir ici sont inévitables lorsqu'il s'agit de dresser les projets d'ouvrages exceptionnels (Britanniabridge, pont sur le Mississippi à St.-Louis, viaduc du Douro à Porto, pont du Firth of Forth . . .); pour les ponts ordinaires, construits avec des poutres à treillis ou à triangles de portées usuelles, les recherches en question se simplifient tellement qu'on n'y remarque même presque plus un tâtonnement quelconque, et que la plupart des constructeurs considèrent comme une facilité bien naturelle, établie par l'usage, de pouvoir dresser de suite un projet de pont sur la seule inspection des lignes principales du système de construction, en déterminant les dimensions à donner à toutes les parties, à l'aide d'un calcul unique qui réussit toujours.

Les ponts de toute portée construits en grand nombre dans les systèmes les plus variés, et dont les poids sont connus, offrent des points de comparaison suffisants; on pourra donc estimer d'avance** avec une exactitude bien admissible pour la pratique des calculs de résistance, la charge permanente qu'il convient de considérer pour chaque pont à construire. Cette estimation sera le plus souvent d'autant plus exacte, que chaque ingénieur ou constructeur y utilisera ses propres données d'expérience. Les charges permanentes et mobiles se trouvant ainsi bien connues à l'avance, les calculs de résistance se réduiront effectivement à la détermination des efforts qui incombent aux diverses parties de la construction et à la recherche des profils de section qu'il convient de leur donner en conséquence.

En nous occupant d'établir une nomenclature uniforme pour les ponts métalliques et leur parties principales, nous avons déjà précisé aux N^os^ *II*, *VIII*, *XI* et *XII* les principes sur lesquels sont basés les calculs de résistance et qui concernent toujours, ou les corps solides prismatiques considérés comme faisceaux de fibres élastiques, ou les poutres à triangles considérées comme systèmes articulés. Dans les deux cas on réduit les effets de toutes les forces extérieures agissant sur une section considérée, en **un moment de flexion et un effort tranchant**. Pour le calcul d'une poutre à triangles ayant toute forme que l'on voudra et des barres et éléments de bandes inclinés d'une manière tout à fait quelconque (3), il suffira d'appliquer les règles très-générales que nous avons déjà mentionnées au N° *VIII*, à savoir:



1. **La hauteur théorique d'une poutre à l'endroit d'un nœud situé sur une bande, est la distance de celui-ci à l'élément de l'autre bande qui forme le côté opposé du triangle dont il est le sommet.**

2. **L'effort incombant à un élément de bande quelconque, s'obtient en divisant le moment de flexion calculé pour le nœud opposé, par la hauteur théorique correspondante.**

---

* Les formules perfectionnées devraient tenir compte de la composition des trains et des charges, de la vitesse et de la surélévation de rail (devers) qu'elle entraîne, de la hauteur du centre de gravité des véhicules . . . etc. etc.

** L'auteur a publié en 1880 p. 62—70 et Tab. V de son „Eisenbahnwesen in Frankreich" un tableau statistique concernant 165 ponts de 25 à 160^m d'ouverture. Les indications que nous donnons pour la charge permanente dans notre Tab. V au Tome II du présent ouvrage, résultent des renseignements relevés à cette occasion et rectifiés de façon que les poids cités puissent être admis pour des ponts satisfaisant à la nouvelle ordonnance autrichienne de 1887.

3. L'effort incombant à une barre quelconque BC de la triangulation, s'obtient en écrivant que sur une section recontrant cette barre, il y a équilibre entre l'effort tranchant d'une part et l'ensemble des trois composantes verticales d'autre part, appartenant aux efforts supportés par les pièces rencontrées (les efforts sur les éléments de bande AC et BD sont à déterminer par la méthode déjà expliquée).

Ces règles très-simples sont applicables pour tous les ponts et toutes les combinaisons de charge permanente et mobile; elles sont certainement plus commodes que les autres méthodes de calcul que l'on a proposées pour les systèmes articulés. Pour les barres de la triangulation toutefois on peut simplifier notablement les calculs, pour certains systèmes de construction, ainsi que nous le faisons voir plus loin aux N[os] *XLIV* à *XLVII**.

En ce qui concerne les vérifications relatives à la rivure, aux épaisseurs des tôles dans les attaches (trous de rivets), aux effets de surélévation du travail élémentaire par suite de la répartition inégale des efforts, aux effets de l'aboutement dans les pièces comprimées, aux effets secondaires de toute espèce . . . etc., ainsi qu'à la déformation élastique de la construction, nous renvoyons aux explications et formules déjà données à propos des poutres à âme pleine au N° *XXXVIII* et aux articles spéciaux que l'on trouve aux N[os] *XXVIII* à *XXXIV* du I[er] volume, permettant d'utiliser les tables numériques du II[e] volume.

2. Calcul des ponts à travée indépendante avec poutres à treillis.

Nous avons indiqué et motivé aux N[os] *XI* et *XII* les principes qui actuellement servent de base au calcul des poutres à treillis. Beaucoup d'ingénieurs calculent encore aujourd'hui ces poutres comme les poutres à petites mailles en vérifiant le module d'inertie de leur section. La plupart des ingénieurs et constructeurs toutefois, appliquent aux treillis double et quadruple le principe de la hauteur théorique qui simplifie beaucoup les calculs; ce principe conduit à ce qui suit:

1. L'effort supporté par un élément de bande quelconque s'obtient en divisant le moment de flexion calculé pour son milieu, par la hauteur théorique de la poutre.

2. L'effort supporté par un croisillon quelconque dans un treillis double, quadruple, sextuple . . . etc. s'obtient en prenant la moitié, le quart, le sixième . . . etc. de l'effort tranchant calculé pour le milieu de la maille considérée, et réduisant à l'inclinaison voulue.

3. L'effort à admettre pour un montant vertical de renfort dans le treillis double, est la moitié de la charge mobile incombant à un nœud, augmentée de la demi-différence des charges permanentes que l'on peut supposer concentrées aux extrémités du montant considéré**. Pour le treillis quadruple, sextuple . . . etc., ces montants sont établis suivant des considérations pratiques tirées de la construction elle-même.

L'exemple donné au N° *XLIV* concernant un pont à voie en dessous avec double treillis et renforts verticaux, montre des tableaux de calculs répondant exactement aux règles que nous venons de donner; on y a utilisé aussi les tableaux numériques du Tome II. Sur les croquis indiquant le treillis des maîtresses-poutres ainsi que celui du contreventement, on a noté en haut de chaque barre les efforts trouvés par le calcul (chiffres gros) et on a coté au bas les calibres des fers qui y sont employés (chiffres fins). Quant aux bandes on s'est borné à coter dans chaque maille les plates bandes qui y figurent, ce qui suffit, avec le profil en travers au milieu du pont, pour indiquer la distribution des fers dans le pont entier.

Les efforts supportés par les divers éléments des bandes ont été déduits de l'effort analogue pour le milieu de la portée, en y appliquant les coefficients de réduction du Tab. VI au II[e] volume. La hauteur théorique à admettre dans ces calculs devrait être la distance moyenne des centres de gravité des deux bandes. Il est d'usage toutefois d'y substituer dans les bandes de ce genre, la distance des trous de rivets reliant les cornières aux tôles verticales ce qui diffère peu (ici 2^m80 au lieu de 2^m798)***.

* Tous ces exemples de calculs de résistance sont disposés de façon qu'en outre des tables numériques du II[e] volume il suffise d'une règle à calcul donnant 3 ou 4 chiffres des résultats cherchés, pour pouvoir effectuer toutes les opérations.

** Cette différence est à très-peu près la moitié de la charge de nœud résultant des charges permanentes pour platelage, pièces de voie, longerons et poutres transversales, lesquelles se cumulent au points d'attaches de ces dernières poutres et sont estimées approximativement au Tab. III du Tome II. Ceci suppose toutefois que le poids des maîtresses-poutres proprement dites se répartisse également entre les nœuds supérieurs et inférieurs.

*** On augmente ensuite habituellement le travail du métal trouvé avec la hauteur théorique, dans le rapport par le quel il faudrait multiplier cette dernière pour avoir la hauteur extrême. Ceci donnerait ici $760 \times (3{\cdot}0 : 2{\cdot}8) = 815^{kg}$ pour le travail possible des fibres extrêmes.

Pour le calcul des croisillons du treillis, on trouve indiqués séparément les valeurs V_q et V_p des efforts tranchants dûs à la charge permanente q par m et à la charge mobile p par m; on y a introduit pour q la valeur 2210^kg et pour p les valeurs résultant de l'échelle 𝔟 de l'ordonnance autrichienne. Les nombres V_q décroissant en progression arithmétique s'obtiennent très-facilement et les nombres V_p sont les quotients des moments tournants $\frac{1}{2} p b^2$ de la table V du Tome II, par la portée du pont qui est 31^m08. L'effort tranchant total (par voie) de la colonne (5) $V_{p+q} = V_q + V_p$, conduit immédiatement à l'effort à attribuer aux croisillons $(V_{p+q}) : 4 \sin \gamma$, où l'on désigne par γ l'inclinaison sur l'horizon.

Pour les montants verticaux de renfort, la règle indiquée donnerait* un effort maximum de $\frac{1}{2}(4^t255 \times 2^m82 + 1^t328) = 6^t663$. Ces montants se composent ici de deux cornières $70 \times 80 : 8$. Il y a donc un excès de résistance que l'on retrouve dans presque tous les cas analogues, de façon que généralement ces ponts (connus en France sous le nom de ponts à croix de St.-André) se trouvent dans des conditions excellentes de résistance. Nous devons toutefois faire observer ici que les montants verticaux doivent aussi être trouvés suffisants, si on les considère comme des piliers recevant les charges mobiles des poutres transversales, pour les transmettre aux nœuds des maîtresses-poutres. Le profil de section d'un montant devrait suffire, d'après cela, pour une charge qui, d'après le Tab. III du Tome II, serait ici de $\frac{1}{2}(15^t674 + 1^t328) = 8^t500$. On pourra objecter à cette vérification, qu'elle ne parait s'appliquer plus spécialement qu'au cas des ponts à voie en dessous analogues, et qu'alors les montants se trouvent renforcés dans le bas par les contreforts d'attache de façon à suffire amplement . . . etc.

Pour le contreventement enfin, les grandeurs $W = 1^m75$, $w = 0^m75$ et par suite $\mathcal{W} = 2^m10$, $w = 1^m60$, doivent être comprises comme nous l'avons expliqué au N° *XXVIII*: 2; les effets tranchants évalués pour le milieu des mailles (8·2, 4·75 et 1·05) s'en déduisent facilement. On reconnait que les calibres admis sont plus que suffisants; on constate encore que la considération des effets du vent qui surélèvent le travail du fer dans les bandes inférieures, ne conduit pas à donner à ces dernières une section plus grande (§ 4 lit. *c* de l'ordonnance autrichienne).

3. Calcul des ponts à travée indépendante avec poutres à triangulation double et diagonales tendues.

Les caractères distinctifs des poutres que nous considérons ici, sont la dissymétrie entre les deux bandes, et l'écartement relativement faible des nœuds (ou ce qui revient généralement au même des poutres transversales). Ces constructions ne sont de ce fait usitées que pour des portées supérieures à 40^m, pour lesquelles le treillis double donne déjà des écartements de nœuds relativement grands.

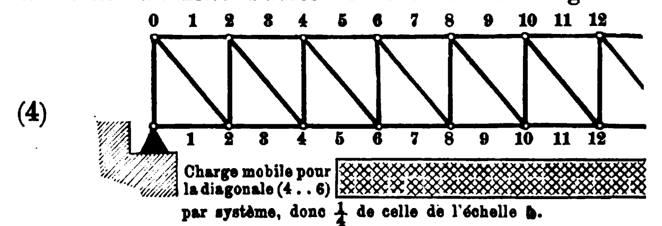
Les calculs de résistance pour ces ponts s'effectuent aujourd'hui presqu'exclusivement d'après la théorie des systèmes articulés. On suppose la poutre décomposée en deux poutres théoriques ayant une triangulation simple chacune, et portant par moitiés les charges permanentes et mobiles. On groupe ensuite ensemble les efforts calculés ainsi séparément, en recomposant la poutre effective, ce qui amène à cumuler les efforts trouvés dans les bandes, tandis que ceux de toutes les barres des triangulations se conservent séparément.

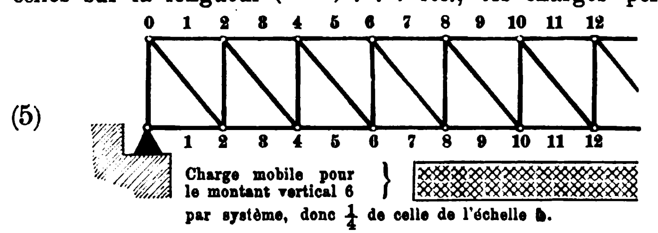
Les tableaux de calculs détaillés de notre exemple au N° *XLV* appliqués à un pont à voie en dessous de 56^m56 de portée, font encore mieux comprendre le mécanisme de ce procédé, et l'on trouve sur le croquis 1. un résumé schématique des efforts maxima qui d'après le calcul, incombent à toutes les pièces de l'une des maîtresses-poutres. Les tableaux 2, 3 et 4 qui suivent sont dressés entièrement d'après le principe des deux poutres à système simple composantes, et, pour le tableau 2 seulement, on a rangé tous les résultats en une seule suite continue pour pouvoir mieux y appliquer les coefficients (du Tab. VI au Tome II) et faire ensuite les additions nécessaires. On y remarque le système de correspondance en biais bien connu** entre les efforts incombant aux éléments des deux bandes. Tous ces calculs du reste, ne constituent qu'un cas particulier fort simple des procédés indiqués d'une manière générale pour les poutres à triangles, et qui réussissent également bien ici pour les barres de la triangulation, comme nous allons le voir.

* En prenant dans le Tome II la charge de l'échelle 𝔟 qui au Tab. V et pour une longueur surchargée de 15^m50 est indiquée avec 8510^kg par m de voie ou 4255^kg par m de poutre, et en admettant pour la charge permanente d'attache celle de 1328^kg qui dans la Tab. III correspond à l'écartement de 2^m82.

** Sur une section verticale on a de fait une bande inférieure notablement plus faible que la bande supérieure, et cela d'autant plus que cette dernière doit encore être renforcée à cause de l'aboutement. Ces dispositions paraîtraient bien moins motivées si on considérait la poutre comme rigide aux nœuds et constituant un équivalent des poutres à âme pleine. Il conviendra donc de renforcer un peu les bandes inférieures.

Considérons par exemple la poutre simple avec triangulation aux nœuds paires (0, 2, 4, 6, 8 . . .) qui est ponctuée dans le croquis; prenons en particulier la diagonale tendue (4 . . . 6) et le montant comprimé 6. Toutes les charges permanentes et mobiles se trouvent par hypothèse concentrées aux nœuds ainsi que cela est expliqué aux N^os^ *XI* à *XIII*. Cette hypothèse peut très-bien être mise d'accord avec celle des charges uniformément réparties que nous introduisons dans les calculs pour plus de simplicité; il suffit pour cela de considérer comme concentrées sur chaque nœud les charges qui agissent de milieu en milieu des mailles attenantes. Si l'on veut alors trouver par exemple la plus grande tension incombant à la diagonale (4 . . 6) on admettra (fig. 4) que la charge mobile d'après l'échelle b s'étend depuis l'appui de droite jusqu'au nœud 5 qui est le milieu de la maille (4 . . 6); on admettra en outre que le nœud 6 reçoit les charges sur la longueur (5 . . 7), le nœud 8 celles sur la longueur (7 . . 9) . . . etc., les charges permanentes étant concentrées en longueur de la même manière. Quant à la répartition de ces dernières charges en hauteur c'est-à-dire entre les deux nœuds d'un même montant, nous supposons que la charge revenant à ce dernier qui est de 5^t656 se divise en $\frac{1}{3}$ ou 1^t880 incombant au nœud supérieur* et $\frac{2}{3}$ ou 3^t776 incombant au nœud inférieur. La charge partielle de 1^t88 au nœud supérieur, constitue un effort additionnel dont on devra tenir compte en calculant les montants. Si l'on veut trouver par exemple la compression maxima incombant au montant 6, on admettra (fig. 5) que la charge mobile d'après l'échelle b s'étend depuis l'appui de droite jusqu'au milieu de la maille (6 . . 8) qui est au nœud 7, que toutes les charges appliquées sur la longueur (7 . . 9) sont concentrées sur le nœud 8 . . . etc.





Pour effectuer du reste les calculs indiqués, soit pour la diagonale tendue (4 . . 6) d'après la (fig. 4), soit pour le montant vertical comprimé 6 d'après la (fig. 5), on n'aura qu'à appliquer la règle générale de la (fig. 3) en remarquant que dans les deux cas les projections verticales des efforts dans les bandes sont nulles et que par suite la composante verticale de l'effort dirigé suivant la barre de triangulation que l'on étudie fait équilibre à l'effort tranchant. Pour avoir l'effort de la diagonale (4 . . 6) on considérera une section verticale menée dans la maille (4 . . 6), pour avoir celui du montant 6 on considérera une section menée à travers ce montant laissant le nœud supérieur sur la droite le nœud inférieur sur la gauche. On reconnait ainsi que la composante verticale de l'effort supporté par la diagonale (4 . . 6) est l'effort tranchant agissant dans la maille (4 . . 6) d'après la charge (4), tandis que l'effort incombant au montant 6 est l'effort tranchant agissant dans la maille (6 . . 8) d'après la charge (5), augmenté de la charge permanente 1^t88 inhérente au nœud supérieur et dont nous avons parlé plus haut.

Remarquons enfin que dans nos tableaux de calcul du N° *XLV* les diagonales sont calculées en partant de l'appui de gauche et en prolongeant les calculs sur la droite en tant que l'on trouve des résultats positifs (tensions); on aura de cette façon calculé également les croisillons dits à effet contraire (Gegenstreben) ainsi que la région de pont sur laquelle ils sont nécessaires. C'est la présence de ces diagonales surtout, qui doit faire reconnaître que les ponts étudiés ici ne présentent point la rigidité des ponts à treillis, dans lesquels toute la partie médiane des poutres renferme des diagonales rigides (et non de longs fers plats), ce qui est beaucoup plus simple et plus solide. La dyssimetrie des bandes dont nous avons déjà parlé, est encore un inconvénient des ponts de ce système; toutefois pour de grandes ouvertures cet inconvénient se trouve supprimé en partie par la nécessité de renforcer les bandes inférieures en vue des effets du vent.

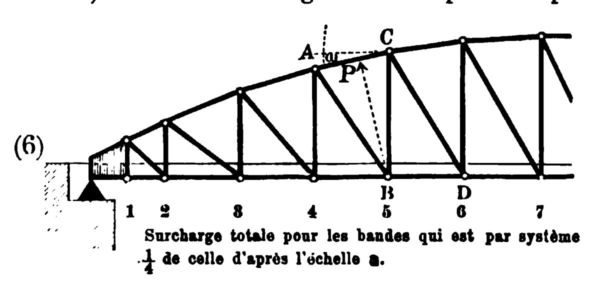
---

* Pour faire une estimation plus exacte on remarquerait que les charges provenant du platelage des pièces de la voie, des longerons et des poutres transversales, lesquelles se concentrent aux attaches de ces dernières poutres et représentent d'après la Tab. III du Tome II environ 1816^{kg} par nœud, doivent former la différence des charges appliquées en haut et en bas des montants dont la somme est 5656^{kg}. La charge du nœud supérieur serait d'après cela égale à $\frac{1}{2}$ (5656^{kg} — 1816^{kg}) = 1920^{kg}, ce qui est à très-peu près la valeur admise dans le texte. Il n'y a guère lieu ici de s'occuper de la répartition des poids dans le sens de la longueur du pont. Pour des ponts de portée considérable il faut en tenir compte.

4. Calcul des ponts à travée indépendante et à voie en dessous ayant des poutres à deux triangulations disposées symétriquement, avec montants verticaux communs, et bandes supérieures courbes.

Les poutres à bande courbe considérées ici, qui sont actuellement en faveur auprès des ingénieurs, jouissent vis-à-vis des poutres à bande courbe avec double triangulation à diagonales tendues, précisément des mêmes avantages que nous venons de mentionner en faveur des poutres à treillis en comparant les diverses espèces de poutres droites étudiées ci-dessus. Ces constructions peuvent être appliquées avec avantage pour des portées de 35 à 55^m et sont très-résistantes pourvu que l'entretoisement des bandes supérieures occupe au moins la moitié de la portée.

Les calculs de résistance ne peuvent toutefois pas être effectués ici à l'aide du procédé simplifié exposé pour les poutres à treillis (analogue à celui qui sert pour les poutres à petites mailles)* et l'on est obligé de décomposer la poutre en deux poutres à triangulations simples à calculer séparément. Ces calculs donnent pour la poutre simple avec triangulation à diagonales comprimées des résultats disposés presque symétriquement par rapport à ceux qui concernent la poutre simple avec triangulation à diagonales tendues; il suffira donc ici d'étudier cette dernière poutre. Considérons par exemple (fig. 6) le montant vertical 5 et les éléments de bandes attenants AC et BD ainsi que la diagonale AB. Pour obtenir d'abord les plus grands efforts dans les bandes il faut supposer que le pont est surchargé sur la portée entière conformément à l'échelle a de l'ordonnance, et tenir compte aussi de la charge permanente. On aura ainsi en appliquant simplement la règle générale pour les poutres à triangles:

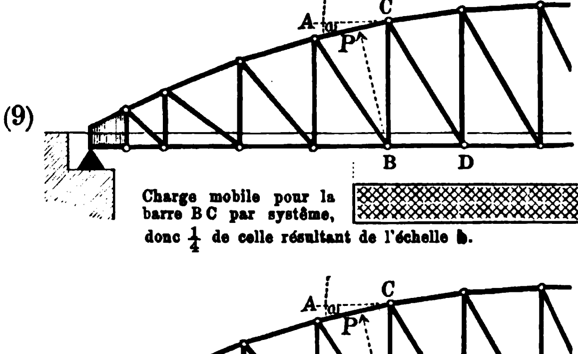


Surcharge totale pour les bandes qui est par système $\frac{1}{4}$ de celle d'après l'échelle a.

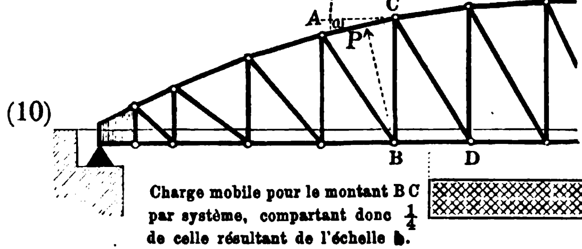
(7) . . . . Effort $BD = \text{Moment}_{(C)} : BC = \text{Moment}_{(B)} : BC$

(8) . . . . . . Effort $AC = \frac{\text{Moment}_{(B)}}{BP} = \frac{\text{Moment}_{(B)}}{BC.\cos\omega} = \frac{\text{Effort } BD}{\cos\omega}$

On retrouve ici la correspondance déjà mentionnée pour les poutres droites, entre les efforts concernant les bandes inférieures et supérieures, pourvu que l'on tienne compte des inclinaisons propres aux éléments de ces dernières.



Charge mobile pour la barre BC par système, donc $\frac{1}{4}$ de celle résultant de l'échelle b.



Charge mobile pour le montant BC par système, comportant donc $\frac{1}{4}$ de celle résultant de l'échelle b.

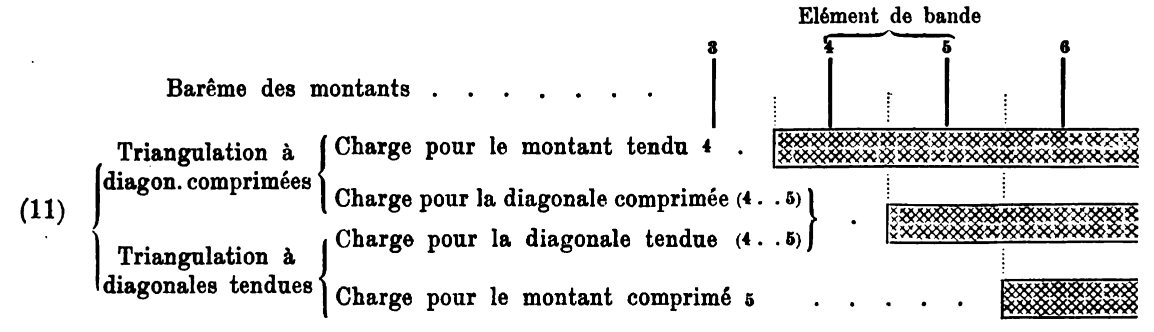
Pour le calcul des croisillons on pourra également bien appliquer ici la règle générale, en considérant pour la diagonale AB la charge mobile de la fig. (9) et pour le montant BC celle de la fig. (10)**. Pour avoir l'effort qui incombe à la diagonale tendue AB on mène une section verticale à travers la maille AC et en projetant les efforts propres aux trois pièces recontrées sur la verticale on reconnaît que les composantes verticales de AB et AC font ensemble équilibre à l'effort tranchant qui agit dans la maille, en sorte que l'élément incliné de la bande comprimée vient soulager ici la barre tendue de la triangulation. Pour avoir l'effort incombant au montant BC il faut mener la section à travers sa longueur de façon à laisser le nœud supérieur C sur la droite et le nœud inférieur B sur la gauche; on reconnaît alors qu'ici encore

* Des calculs entendus dans ce sens, où les moments de flexion et les efforts tranchants sont évalués comme pour les poutres à treillis au milieu des mailles, mais où l'on tient compte bien entendu des inclinaisons des éléments de bandes et des croisillons, — ont bien été effectués à titre d'essai, mais ils donnent lieu à des différences notables surtout dans les mailles qui avoisinent les appuis.

** Nous ferons voir plus loin que contrairement aux usages admis dont nous tenons compte ici, on a tort d'introduire cet effort de compression dans les calculs, en tant qu'il s'agit de recomposer la poutre à système double pour en déduire les efforts incombant aux montants.

la composante verticale de l'élément de bande comprimée AC vient soulager la barre comprimée BC de la triangulation; on remarquera toutefois que l'effort suivant AC diffère de l'effort considéré ci-dessus, puisqu'ici la charge qui agit est celle de la fig. (10) et non celle de la fig. (9)*. Pour les charges mobiles et permanentes à considérer dans les deux cas, on aura du reste à admettre une concentration dans les nœuds, telle que nous l'avons expliquée à propos des poutres droites.

D'après ce qui précède une poutre à bande courbe avec triangulation à diagonales tendues donnera lieu à trois espèces d'efforts à calculer pour chaque élément de bande tel que AC, résultant de trois hypothèses différentes de la charge mobile; ce sont la surcharge totale d'après l'échelle a pour les dimensions à donner aux bandes, et les surcharges partielles fig. (9) et fig. (10) d'après l'échelle b pour les dimensions à donner aux croisillons. Les mêmes remarques s'appliquent également à la deuxième poutre simple composante avec triangulation à diagonales comprimées, mais on trouvera que pour les diagonales ce sont les surcharges déjà utilisées pour la première poutre simple, que l'on aura à utiliser de nouveau ici. On aurait donc en résumé, pour chaque élément de bande, à calculer en tout les efforts provenant des surcharges partielles que nous représentons ci-après, par exemple pour la maille (4 . . 5):



Les efforts de bande correspondants se calculeront en prenant les moments de flexion au montant 4 s'il s'agit de la triangulation à diagonales comprimées et au montant 5 s'il s'agit de celle à diagonales tendues. On a introduit dans ces calculs depuis quelque temps une simplification très-pratique qui permet de ne plus calculer que les moments de flexion (et non les composantes verticales des efforts dans les éléments des bandes). Ce nouveau procédé consiste à utiliser simplement l'équilibre qui, pour une surcharge donnée, doit toujours avoir lieu à chaque nœud de la bande inférieure, entre les efforts de toutes les pièces qui y concourent et la charge de nœud qui y est appliquée directement.

Considérons à cet effet la triangulation à diagonales tendues soumise à l'une des surcharges partielles des fig. (9) ou fig. (10) et l'équilibre au nœud B en particulier, sur lequel agissent quatre pièces de construction ainsi que la charge qui lui est directement appliquée, cette dernière se composant dans le cas (9) de la charge mobile et de la charge permanente, dans le cas (10) de la charge permanente seulement. L'équilibre du nœud B en plan, exige que la composante horizontale de l'effort suivant AB soit égale à la différence des deux efforts de bande appliqués en B; l'équilibre du même nœud en projection verticale exige que la composante verticale de l'effort suivant AB soit égale à l'effort de la barre BC augmenté de la charge appliquée directement au nœud B. Si donc nous désignons par:

(12)
- $\mathcal{M}\ \mathcal{M}'$ . . les moments de flexion en A et C pour une charge convenable;
- $H\ H'$ . . . les hauteurs des montants verticaux A et C;
- $\mathcal{P}$ . . . . la charge appliquée directement au nœud B;
- γ . . . . . l'inclinaison de la diagonale AB sur l'horison, il résulte immédiatement des

conditions d'équilibre sur le nœud B, que l'on aura:

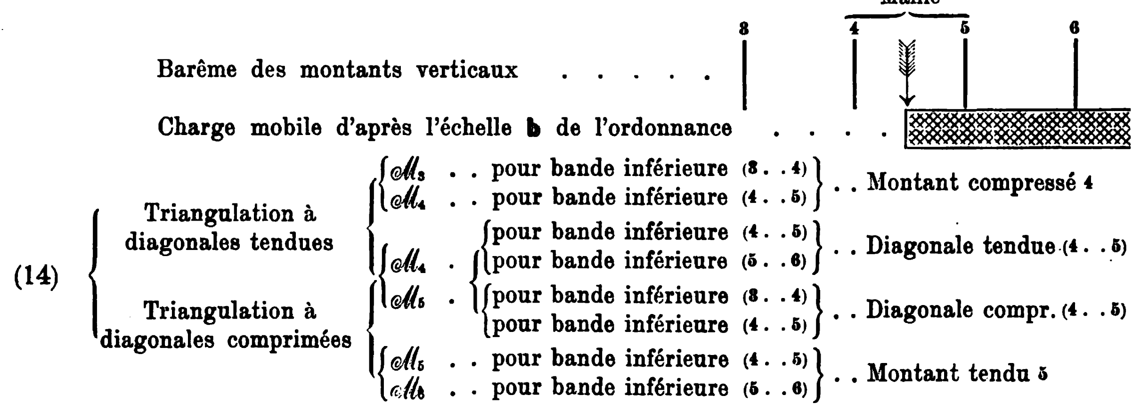
$$(13)\ .\quad \text{Tension } AB = \frac{1}{\cos\gamma}\left(\frac{\mathcal{M}'}{H'} - \frac{\mathcal{M}}{H}\right) \qquad \text{Pression } BC = \operatorname{tg}\gamma\left(\frac{\mathcal{M}'}{H'} - \frac{\mathcal{M}}{H}\right) - \mathcal{P}$$

* Dans la triangulation à diagonales comprimées on obtient la plus grande tension possible dans le même montant BC, en supposant le nœud inférieur B surchargé, c'est-à-dire avec la charge mobile de la fig. (9); on mène alors la section à travers le montant BC, de façon à laisser le nœud C sur la gauche et le nœud B sur la droite; c'est donc l'élément de bande comprimé sur la droite de C, qui vient soulager la barre tendue BC de la triangulation.

Ces formules ne contiennent que les Moments $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ et la charge $\mathcal{P}$, elles subsistent à très-peu près pour la triangulation à diagonales comprimées; il faut supposer alors le nœud B sur le bas du montant A puis accepter les expressions (13) pour la diagonale $B\,C$ et le montant A, en prenant $+\ \mathcal{P}$ pour ce dernier.

Pour calculer commodément les moments $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ on considère d'abord séparément les effets de la charge permanente et ceux de la charge mobile. Les moments dûs à la charge permanente, sont des grandeurs proportionnelles aux moments dûs à la charge totale déjà calculés d'après (6), lesquelles restent toujours les mêmes pour toutes les combinaisons de charges (9) (10) . . . etc. à considérer ultérieurement. Les moments pour la charge mobile seule (9) (10) s'obtiennent, pour un nœud quelconque, en multipliant la distance de ce point à l'appui de gauche, par la réaction inhérente à cet appui; cette réaction n'est du reste autre chose que l'effort tranchant dû à la charge mobile (échelle **b**)*.

Nous sommes donc ramenés ainsi (comme pour les poutres droites) à calculer tout d'abord les efforts tranchants dûs à la charge mobile dans chaque maille, ce qui se fera immédiatement en conformité de l'échelle **b** de l'ordonnance en divisant par la portée du pont, les moments tournants de notre Tab. V du Tome II, qui correspondent aux distances de l'appui de droite à tous les milieux de mailles. En appliquant à chaque effort ainsi trouvé, et considéré comme réaction de l'appui de gauche, tous les bras de leviers auxquels il doit correspondre, on trouve qu'il fournira 4 moments de flexion et 4 efforts de barres des 2 triangulations, ainsi que nous le faisons voir ci-après, pour l'effort tranchant dans la maille (4 . . 5) par exemple:



On reconnaît d'après cela qu'avec l'effort tranchant de la maille (4 . . 5) et avec les 4 Moments $\mathcal{M}_3$ $\mathcal{M}_4$ $\mathcal{M}_5$ $\mathcal{M}_6$ qui en résultent, on déterminera les efforts incombant aux deux diagonales de la maille (4 . . 5) et l'un des deux efforts incombant à chacun des montants 4 et 5, attenant à cette maille. Comme toutefois dans la méthode de calcul expliquée (13) il ne s'agit d'abord que des composantes horizontales des efforts supportés par les diagonales en général, lesquelles sont égales ici pour les deux diagonales de la maille (4 . . 5), on voit que le procédé ci-dessus se réduit de fait à déterminer trois composantes horizontales résultant des différences des quotients $\mathcal{M} : H$ calculés pour les 4 montants 3, 4, 5, 6 de la poutre.

En ce qui concerne les montants verticaux, qui forment des barres communes aux deux triangulations simples composantes, le procédé de calcul usité jusqu'ici et qui consiste à calculer chaque poutre simple composante, en faisant pour chacune de ses parties l'hypothèse de charge mobile la plus défavorable, se trouve en défaut lorsqu'on vient recomposer ensuite la poutre que nous étudions et additionner algébriquement les efforts trouvés séparément pour les montants dans les deux systèmes. L'effort cherché d'un montant dans le cas actuel, où la voie est en dessous, se présente en effet toujours comme une tension, résultant de la différence de deux efforts de signe contraire. Or les deux hypothèses de charges mobiles que l'on fait habituellement dans

* Cela résulte immédiatement de ce que la partie de gauche de la poutre se trouve sans charge. Une exception à la règle que nous indiquons, se présente de ce fait, à propos du calcul des montants tendus dans la triangulation à diagonales comprimées où il faut pour avoir exactement $\mathcal{M}'$ soustraire encore du produit indiqué, ce que nous appellerons le moment nodal (produit de la charge de nœud par l'écartement de deux nœuds) ainsi que nous le faisons dans l'exemple que nous donnons au N° *XLVI*. On aurait dans la fig. (14) pour le calcul du montant tendu 5

$$\mathcal{M}_6 = V_{(4\,..\,5)} \times \text{Distance}_{(0\,..\,6)} - \text{Charge nodale}\ (5) \times \text{Ecartement}_{(5\,..\,6)}.$$

les deux poutres simples composantes, pour un seul et même montant commun, ne sont pas d'accord, ainsi que cela résulte du barême (14) et des fig. (9) et (10) concernant les deux hypothèses pour le montant BC. Le train ne pouvant avoir qu'une seule et même longueur dans la poutre composée, la double hypothèse de charge mobile ne serait admissible que s'il en résultait un effort de tension plus grand pour le montant considéré BC. C'est précisément le contraire qui a lieu car en acceptant la surcharge (9) pour les deux triangulations (nœud inférieur chargé) la compression provenant de la triangulation à diagonales tendues, qui entre en déduction dans le résultat final, sera moindre, et on obtiendra par suite une valeur plus forte pour la tension cherchée du montant. Il en résulte que pour calculer l'effort incombant à un montant vertical dans la poutre composée il faudra toujours supposer le nœud inférieur chargé dans les deux triangulations simples. Ce perfectionnement ne donne du reste lieu à aucune complication nouvelle, dans les calculs de la triangulation à diagonales tendues, où les composantes horizontales dont on a besoin se trouvent déjà calculées pour les diagonales. Il amène au contraire une légère simplification dans le barême (14), où la première des quatre barres peut disparaître.

Dans l'exemple du N° *XLVI* sur lequel nous allons donner encore quelques explications, nous citons parallèlement les calculs effectués pour les montants, par les deux procédés dont nous venons de parler, afin de mettre en évidence les différences qui en résultent et qui ne sont pas sans importance. Dans le croquis schématique N° 1 de nos tableaux, on a coté en chiffres gros sur toutes les lignes du système, les efforts les plus grands qui résultent des calculs; on y a coté en chiffres fins les données de dimensions ainsi que les inclinaisons des diverses pièces sur l'horizon, en conformité des calculs détaillés aux N°s 2 et 3.

Dans les tableaux de calculs N° 4 à 9 qui suivent on a bien effectué les opérations en considérant séparement les deux poutres composantes à triangulation simple, et ce n'est que pour plus de simplicité et de commodité dans les calculs, que l'on a groupé les résultats en séries continues d'après l'ensemble de la poutre.

Pour le tableau N° 4 qui contient les efforts supportés par les éléments des bandes, on a fait usage des coefficients de réduction (Tab. VI du Tome II); le tableau 5 fait voir le travail du fer qui en résulte.

Dans le tableau N° 6 le calcul des efforts tranchants dûs à la charge mobile, se trouve effectué à l'aide des moments tournants conformes à l'échelle **b** de l'ordonnance (Tab. V du Tome II). Les efforts tranchants dûs à la charge permanente ne sont pas nécessaires, puisqu'on tient compte de cette charge, en utilisant les moments de flexion correspondants calculés au tableau N° 4. le tableau N° 6 renferme toutefois dans les colonnes (7) et (8) sous le titre: „Effets aux nœuds" deux espèces de fonctions dérivant immédiatement de l'échelle **b** et qui servent dans les tableaux N° 7 et 9 aux calculs des montants.

Dans le tableau 7 on trouve réuni tout ce qui concerne le calcul des composantes horizontales des diagonales pour les diverses hypothèses de charge mobile; on y a utilisé les efforts tranchants V_p du tableau N° 6 comme nous l'avons expliqué (13) (14). Les moments $\mathcal{M}_p$ de la colonne (5) sont les produits des efforts V_p et des bras de levier de la colonne (4); on a toutefois porté en déduction de tous les moments marqués*, le moment nodal correspondant du tableau N° 6. Les moments $\mathcal{M}_q$ de la colonne (6) sont ceux de la colonne (3) du tableau N° 4, que l'on utilise ici en les répétant autant de fois qu'il est nécessaire. Les moments $\mathcal{M}_{p+q}$ de la colonne (7) résultent de la somme $\mathcal{M}_p + \mathcal{M}_q$ et sont ceux $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ dont on a finalement besoin pour appliquer notre méthode (13); les quotients de la colonne (9) qu'on en déduit en divisant par les hauteurs des montants donnent les composantes horizontales cherchées $S \cos \gamma$ de la colonne (10) (où l'on désigne par S l'effort de diagonale et par γ son inclinaison sur l'horizon). Les deux dernières colonnes (11) et (12) indiquent la maille et la barre de la triangulation où les composantes $S \cos \gamma$ doivent être utilisées; on y a marqué à l'aide des signes + et — les montants (des systèmes simples) qui sont tendus ou comprimés.

Dans le tableau N° 8 on a utilisé les composantes horizontales $S \cos \gamma$ du tableau N° 7, pour calculer les efforts S supportés par les diagonales des deux systèmes, en utilisant les valeurs $\cos \gamma$ du tableau N° 2; on y trouve aussi le travail du fer qui en résulte pour toutes les diagonales.

Dans le tableau N° 9 enfin on a utilisé les composante horizontales $S \cos \gamma$ du tableau N° 7 pour calculer les efforts de tension ou de compression qui incombant aux montants dans l'une et l'autre des deux triangulations. Pour la triangulation à diagonales tendues, on y a placé parallèlement les résultats provenant des deux hypothèses de charge mobile, dont nous avons

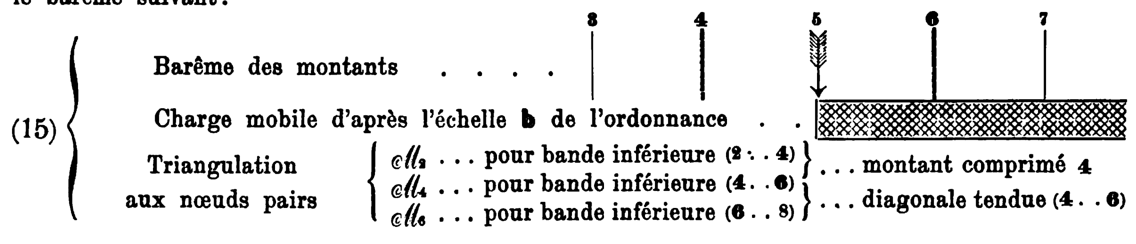
parlé. Les composantes horizontales de la colonne (3) sont marquées „Vertic. (—)" dans le tableau N° 7; celles de la colonne (6) au contraire, sont marquées „Diagon." dans le tableau N° 7, parce qu'on les utilise également pour les diagonales au tableau N° 8. Si donc on adoptait le dernier mode de calcul des colonnes (6) (7) (8) que nous recommandons comme plus exact, en pourrait se dispenser de calculer dans le tableau N° 7 tout ce qui concerne les valeurs marquées „Vertic. (—)". Les pressions dans les montants inscrites dans les colonnes (5) et (8) s'obtiennent en utilisant les valeurs de $\operatorname{tg}\gamma$ du tableau N° 2 et en déduisant du produit $S \cos\gamma \,.\, \operatorname{tg}\gamma$ la charge nodale qui comprendra pour (5) la charge permanente seulement et pour (8) l'ensemble des charges permanente et mobile, cette dernière étant tirée du tableau N° 6. Pour les montants tendus de la colonne (12) c'est au contraire une addition de la charge nodale que l'on effectue. Les résultats obtenus finalement pour les montants communs, d'après les deux hypothèses de charge mobile, se trouvent inscrits parallèlement dans les colonnes (13) et (14) et font voir que la rectification que nous signalons entraîne une augmentation notable des tensions cherchées.

En pratique on construit les montants verticaux dans les ponts de cette espèce, toujours notablement plus forts que ne l'exigerait la théorie et on se contente de les vérifier approximativement par les procédés applicables aux ponts à treillis. Dans le cas actuel cette estimation donnerait d'après les charges nodales des tableaux N° 3 et 6, la tension: $7{\cdot}25 + 0{\cdot}67 = 7^t92$ ce qui est une valeur comprise entre celles du tableau N° 9. On trouve une valeur plus grande par une estimation fondée sur la demi-charge d'attache des poutres transversales; elle serait d'après le Tab. III du Tome II, égale à $\frac{1}{2}(17{\cdot}871 + 1{\cdot}580) = 9^t72$. Si donc, dans tous les cas analogues, on voulait se contenter de celle de ces estimations qui donne la plus grande valeur, on réduirait les calculs que nous expliquons ci-dessus, à leur moitié environ*.

5. Calcul des ponts à travée indépendante et à voie en dessous avec poutres à deux triangulations de même sens à diagonales tendues et avec bandes supérieures courbes.

Les poutres à bande courbe dont il est question ici ont été très-employées dans ces derniers temps; elles offrent une certaine analogie avec les poutres droites ayant deux triangulations disposées de la même façon et que nous avons étudiées au N° 3. La répartition des efforts à supporter par toutes les pièces composantes, quoique très-analogue en général, se trouve toutefois modifiée sensiblement par la présence de la bande courbe qui non seulement entraîne, une plus grande complication dans les calculs, mais qui force aussi à en altérer le mécanisme.

On décompose également ici la poutre donnée, en deux poutres à triangulation simple, à chacune desquelles on peut appliquer ensuite les procédés déjà exposés au N° 4 d'après les fig. (6), (9) et (10), qui concernent d'une manière générale une poutre avec triangulation simple à diagonales tendues; on utilisera à cet effet le procédé simplifié (13) qui n'exige que le calcul des divers moments de flexion**. Lorsqu'on emploie cette méthode il est commode de traiter les deux triangulations dans des tableaux de calculs séparés et d'y réunir les moments fournis par chaque valeur de l'effort tranchant, ainsi que nous l'avons déjà fait voir pour le pont étudié au N° 4 qui précède. On a par exemple pour la maille (4 . . 6) de la triangulation aux nœuds pairs, le barême suivant:



On reconnaît d'après cela qu'avec la charge mobile s'étendant de l'appui de droite au milieu de la maille (4 . . 6) de la triangulation, et avec les trois moments $\mathcal{M}_2$ $\mathcal{M}_4$ $\mathcal{M}_6$ qui en dérivent, on pourra obtenir les efforts qui incombent au montant de gauche 4 et à la diagonale (4 . . 6) de la maille considérée. Les moments dûs à la charge mobile, seront comme précédem-

* On ferait disparaître ainsi tout le tableau N° 9, la moitié du tableau N° 7 c'est à d. tout ce qui y concerne les nombres marqués „Vertic.", puis enfin les deux dernières colonnes du tableau N° 6.

** Le calcul des efforts sur les éléments de la bande courbe, dont on faisait usage antérieurement, exigeait encore le calcul des inclinaisons dans chaque poutre à triangulation simple c. a. d. concernant les éléments de bande fictifs (0 . . 1, 1 . . 3, 3 . . 5, . . .) et (0 . . 2, 2 . . 4, 4 . . 6, . . .). Ce calcul accessoire n'est plus nécessaire en suivant la méthode nouvelle.

ment, les produits de l'effort tranchant V_p qui agit dans la maille, par les distances de l'appui de gauche aux montants 2, 4 et 6 où on les évalue.

L'exemple de calculs de pont que nous donnons au N° *XLVII* a été traité entièrement comme nous venons de l'expliquer*. Le croquis schématique N° 1 indique la forme un peu elliptique de l'une des maîtresses-poutres; on y a coté en chiffres gros les efforts trouvés par les calculs et en chiffres fins les données de dimensions, dont on trouve les calculs detaillés au tableau N° 2 de la même page.

Dans tous les tableaux suivants N° 4 à 11 on a constamment traité séparément les deux poutres fictives à triangulation simple, et ce n'est que pour plus de simplicité, que dans les tableaux N° 4 et 5 concernant les bandes, on a réuni tous les résultats en séries continues pour l'ensemble de la poutre. Le calculs relatifs aux barres des deux triangulations sont contenus séparément dans les tableaux N° 6, 7, 8 et ceux N° 9, 10, 11.

Dans le tableau N° 4 relatif aux bandes on utilise pour le calcul des moments de flexion, les coefficients de réduction du Tab. VI au Tome II (charge permanente et charge totale) et les deux dernières colonnes remettent ici en évidence la correspondance connue, entre les efforts qui incombent aux éléments des deux bandes. Les résultats trouvés sont utilisés dans le tableau N° 5 pour vérifier le travail du fer dans toutes les parties des bandes en se servant pour celles du haut, des valeurs $\cos \gamma$ tirées du tableau N° 2.

Quant aux barres des triangulations, nous renvoyons à nos expliquations fig. (9) (10) (13) (15) en ajoutant qu'ici, comme pour les ponts analogues à poutres droites, les diagonales ont été calculées en partant de l'appui de gauche et cheminant vers la droite jusqu'à ce que l'on arrive à une compression au lieu de la tension cherchée; on aura alors déterminé les efforts incombant à toutes les diagonales y compris celles dites à effet contraire, et la région du pont où celles-ci sont nécessaires.

Pour terminer ce qui concerne les ponts que nous venons d'étudier, nous devons encore attirer l'attention des ingénieurs sur quelques particularités qui les concernent, surtout pour des portées plus grandes. On donne actuellement volontiers à la bande supérieure une courbure peu prononcée de façon à obtenir au-dessus des appuis des montants suffisamment élevés pour y admettre un entretoisement supérieur. Comme le fait voir notre exemple du N° *XLVII*, la méthode pour calculer ce genre de poutres est tout à fait indépendante de la forme spéciale adoptée pour la bande courbe. On a toutefois admis, il y a peu d'années encore, que la forme courbe la plus avantageuse était la forme parabolique (polygone inscrit dans une parabole) et on a construit beaucoup de ponts de cette espèce avec des montants sur appuis relativement bas. Il est facile de constater en appliquant le calcul aux poutres de cette forme, que lorsque le rapport du montant extrême à celui qui se trouve près du milieu de la portée descend au-dessous de certaines limites, on n'obtient pas les plus grands efforts exercés sur tous les montant en les supposant comprimés sous l'action d'une surcharge partielle comme nous l'avons exposé; pour un certain nombre de montants de la région médiane on obtient des efforts de tension bien supérieurs en admettant une surcharge couvrant la portée entière**. En pareil cas il faut concevoir que dans toute la région médiane en question, la voie chargée se trouve en quelque sorte suspendue au moyen des barres verticales et inclinées à la bande supérieure comme à une voute, le changement de sens dans les efforts des montants verticaux n'ayant lieu qu'à une certaine distance de part et d'autre du milieu de la portée. Ce cas spécial d'équilibre statique (pour la surcharge de toute la portée) où la construction à l'exception de la seule bande supérieure, n'aura dans toute sa région médiane que des efforts de tension à supporter, sera encore plus facile à comprendre quand nous aurons ajouté que dans le cas particulier de montants extrêmes nuls, la région médiane considérée vient occuper toute la portée. Les tensions de toutes les diagonales se réduisent alors à zéro, celles des éléments de bande inférieure sont égales (ou constantes) et on a tout simplement un pont suspendu renversé.

De pareils ponts ne se construisent plus actuellement. Des ingénieurs distingués cherchent à éviter également l'emploi des croisillons dits à effet contraire, en constituant toutes, les barres de triangulation dans la région médiane, comme pièces rigides résistant à la compression et à l'extension; c'est un perfectionnement très-appréciable apporté à ce genre de ponts.

* Ce pont exécuté par la compagnie de la „Galizische Carl Ludwig-Bahn" est conçu dans un système adopté tout d'abord par la „compagnie des chemins de fer autrichiens de l'Etat" pour un pont sur un bras du Danube près Stadlau. Ce système offre l'avantage de donner pour les barres de triangulation voisines des appuis, des sections peu différentes.

** Par exemple le pont construit sur le canal du Danube à Kaiser-Ebersdorf près Vienne en 1880, dont les poutres ont une portée de 90^m avec 13^m125 de hauteur médiane et 3^m seulement de hauteur extrême.

XLI. Observations sur l'emploi de poutres à treillis ou à triangulations pour les ponts à poutres continues.

Nous donnons plus loin aux N^{os} *XLIX* à *LVI* une théorie et des procédés généralisés très-complets pour calculer les ponts à poutres continues, en mettant le lecteur à même d'appliquer à ces ponts telles hypothèses de charges permanentes et mobiles qu'il voudra, et en particulier celles qui sont prescrites par l'ordonnance autrichienne du 15 Septembre 1887, ainsi que nous le faisons voir par l'exemple d'un pont à 5 travées avec treillis double que nous donnons au N° *LIX*. Le but que l'on a en vue en effectuant ces calculs est d'arriver le plus facilement et le plus rapidement possible à construire l'épure usuelle de la distribution des fers dans les bandes et croisillons, ou, ce qui revient au même, l'épure des moments de flexion et des efforts tranchants*.

Il importe maintenant d'insister sur ce fait qu'au moyen des moments de flexion et des efforts tranchants, on pourra déterminer les dimensions à donner aux diverses pièces dans les poutres continues, absolument comme on l'a fait pour les poutres reposant librement sur deux appuis. On décomposera donc la poutre effective donnée en ses poutres à triangulation simple, et l'on appliquera à chacune d'elles les règles générales citées au N° *XL* . 1. fig. (3).

Les poutres continues exécutées jusqu'ici appartiennent presque toutes aux poutres droites à treillis ou à triangulations avec diagonales tendues, que nous avons étudiées au N° *XL* . 2 et 3 pour la travée indépendante; on y pourra donc utiliser les moments de flexion et les efforts tranchants au moyen des procédés fort simples que nous avons exposés**. L'épure de la distribution des fers dans les bandes et croisillons se trouve alors en relation simple et directe avec celle des moments de flexion et des efforts tranchants, on pourra donc facilement les réunir en une seule ainsi que cela se fait fréquemment.

En ce qui concerne le choix du système de construction, à faire pour les ponts à poutres continues, nous ne pouvons que constater la présence des deux systèmes mentionnés, parmi les constructions existantes, en ajoutant cependant que ce sont les poutres en treillis qui figurent dans la très-grande majorité de ces ponts, et qui par leurs qualités particulières se recommandent aussi plus spécialement pour le principe de la continuité. La symétrie des treillis dans le sens vertical, la rigidité des croisillons dans toute la partie médiane des travées . . . etc. sont ici des avantages manifestes par rapport aux propriétés toutes opposées que l'on rencontre dans les triangulations dissymétriques***.

Les avantages réels et pratiques que l'on peut trouver à construire des ponts à poutres continues, consistent essentiellement en une économie modérée dans les quantités de métal à mettre en œuvre et en une augmentation souvent très-considérable de la stabilité et du pouvoir résistant par rapport aux charges mobiles effectives, par ce que les combinaisons de surcharge que l'on est obligé d'admettre dans les calculs de résistance, ne se réalisent presque jamais. Ces avantages sont d'autant plus considérables que les portées sont plus grandes. Pour des viaducs très-élevés, ou pour des ponts construits sur de grands fleuves ou sur des eaux de grande profondeur, le principe des poutres continues permet également d'effectuer le montage au moyen d'un lançage convenable, ce qui implique souvent une économie très-notable dans les frais

---

* Les procédés indiqués permettent de calculer les moments de flexion et les efforts tranchants et de les utiliser en tableaux de calculs comme nous l'avons fait pour les ponts à travées indépendantes. On préférera toutefois le plus souvent construire l'épure des moments graphiquement au moyen de patrons paraboliques, et se borner pour celle des efforts tranchants, à calculer quelques points de chaque contour en le traçant ensuite à la règle courbe, ces procédés suffisant en pratique.

** On ne saurait nier la possibilité de construire des ponts à poutres continues avec bandes courbes, que la pratique n'a pas admis jusqu'ici; ces constructions exigeraient toutefois des procédés nouveaux et spéciaux pour le calcul des moments de flexion et des efforts tranchants. Si l'on suppose ces fonctions des forces extérieures connues et déterminées, le calcul des ponts en question d'après les règles générales du N° *XL* . 1 . fig. (3) n'offre aucune difficulté.

L'exposition de Paris en 1867 offrait aux visiteurs un grand projet de pont sur le Bosphore à trois travées: $162^{m}45 + 205^{m}99 + 162^{m}45$, dont l'aspect général se présentant fort bien semblait vouloir réaliser l'idée de la poutre continue à bandes courbes. Ce projet conçu par C. de Ruppert alors directeur de la construction à la compagnie des chemins de fer autrichiens de l'Etat était du reste dressé non d'après la théorie des poutres continues comme on l'a souvent admis mais d'après une théorie spéciale voulant utiliser la résistance des piles métalliques à la flexion; et qui a soulevé des objections bien fondées.

*** Il y a plus d'une dixaine d'années on a construit en Autriche des ponts à poutres continues avec une triangulation simple à diagonales tendues. Ce système de construction qui appliqué aux ponts à travées indépendantes n'a pas bien réussi, convenait encore bien moins pour le principe de la continuité; aussi les ponts en question ont dû être reconstruits depuis.

d'échaffaudages. Ces avantages sont toutefois compensés souvent par des difficultés et des inconvénients inhérents à ce système et qu'il convient de signaler.

Il faut avant tout que les piles soient fondées et maçonnées avec grand soin, et qu'elles se trouvent achevées depuis assez longtemps pour que les tassements inévitables dans les premiers temps aient cessé de se produire avant l'époque où l'on vient y asseoir la construction métallique. Pour des piles de grande hauteur on évite généralement la difficulté en y employant, pour la majeure partie, des constructions métalliques. On doit pouvoir compter dans tous les cas sur la parfaite stabilité des appuis à partir du moment où l'on y pose la superstructure métallique, car il est toujours difficile et couteux* de les modifier ensuite.

Pour de faibles portées il peut arriver que la construction métallique risque d'être soulevée à ses extrémités au-dessus des culées, par l'effet de la charge mobile sur les travées intermédiaires; on est alors obligé de retenir les poutres au moyen de tiges ancrées dans la maçonnerie et articulées aux appuis. Cette complication, au sujet de laquelle le calcul donnera les indications nécessaires, peut être esquivée souvent (portées de 20 à 30^m) par un léger changement dans la répartition des ouvertures.

Les ingénieurs auront à décider dans chaque cas particulier s'il y a lieu ou non, d'adopter le système des poutres continues; lorsqu'il est appliqué avec discernement il offre sans aucun doute d'excellentes conditions de sécurité pour le service. C'est ce que prouvent les nombreux ponts construits dans ce système, et la résistance exceptionnelle qu'on y a pu constater dans des cas de force majeure.

XLII. Calcul des contreventements et effets du vent sur les bandes.

En discutant au N° *XXVIII* . 2 . les prescriptions du § 3 lit. *f* de l'ordonnance autrichienne concernant les effets du vent, nous avons déjà fait voir, que l'on peut tenir compte de ces effets d'une manière simple, en les introduisant dans les calculs absolument comme on le fait pour les charges verticales. Nous aurons à considérer d'après cela pour faire les calculs:

1. une surface d'application du vent de $\mathcal{W}$ par mètre (charge permanente) s'étendant sur toute la portée, et représentant le pont seul;

2. une surface d'application du vent de w par mètre, comptée à partir de l'un des appuis jusqu'à la section que l'on considère (charge mobile) et représentant l'augmentation de la surface exposée par mètre, qui résulte de la présence du train seul.

Si nous désignons à ce sujet par:

(16) . . { l . . . . . la portée du pont considéré;
a, b . . . les distances d'une section aux deux appuis;
p . . . . . la pression du vent par m^2 (qui est 170^{kg} pour le pont chargé, 270^{kg} pour le pont non chargé, d'après l'ordonnance autrichienne).

On trouvera que l'effort tranchant sur une section d'abscisse a, dans le pont en surcharge partielle, ainsi que le moment de flexion sur la même section dans le pont en surcharge totale, seront exprimés comme suit:

(17) . .

(18) Effort tranchant$_{(a)} = \dfrac{p}{2}\left[\mathcal{W}(b-a) + w\dfrac{b^2}{l}\right]$ Moment$_{(a)} = \dfrac{p}{2}\, a\, b\,(\mathcal{W} + w)$

Ces formules devront être essayées comparativement, pour le cas où $p = 270^{kg}$ et $w = o$ ainsi que pour le cas où $p = 170^{kg}$ et $o < w < 2^m 50$; on utilisera ensuite les plus grands résultats trouvés par les deux hypothèses. On pourra à cet effet se servir de la table graphique

* Avec les engins que les usines et entrepreneurs de constructions métalliques se sont procurés dans ces derniers temps, pour effectuer les reconstructions de ponts par voie de lançage latéral, les difficultés signalées s'applanissent de beaucoup. Avec les verrins hydrauliques dont on dispose habituellement on pourra par exemple élever très-facilement de quelques centimètres des ponts de 50^m de portée, sans déranger le service.

du N° *XXVIII*. 2 (Tab. VII du Tome II) qui dans bien des cas facilitera les comparaisons. L'étude des projets présentés en Autriche depuis la publication de la nouvelle ordonnance, permet du reste de signaler déjà quelques résultats d'expérience comme suit:

1. L'hypothèse de 270^{kg} par m^2 n'est applicable en général qu'aux grandes portées; pour tous les ponts de petite portée c'est exclusivement l'hypothèses de 170^{kg} qu'on aura à considérer ainsi qu'il est facile de s'en assurer sur l'abaque. Pour un pont à voie en dessus avec 80^m de portée par exemple, il faudrait que $\mathcal{W}$ fût supérieur à 4^m3 pour que l'effort tranchant près d'un appui ainsi que tous les moments en général, obtenus avec l'hypothèse de 270^{kg} (pont sans charge) puissent dépasser les effets analogues obtenus avec l'hypothèse de 170^{kg} (pont chargé); celle-ci devra cependant toujours être utilisée pour le contreventement de la partie médiane du pont*.

2. Pour des ponts ayant au plus 25^m de portée la question des effets du vent n'a qu'une importance minime; on y pourra supposer la pression du vent de 170^{kg} appliquée en toute rigueur, et le contreventement répondant au calcul sera toujours moins fort que celui qu'on est amené à y établir de fait, conformément aux éxigences de la construction elle-même. C'est pour des raisons pratiques également qu'il convient d'éviter les contreventements en fers plats, et de chercher à maintenir les barres même lorsqu'elles sont à profil rigide, soit en les assemblant entre elles, soit en les attachant aux poutres transversales et aux longerons.

3. Quoique pour des portées un peu supérieures les résultats des calculs commencent à devenir décisifs pour les dimensions à donner au contreventement, on trouvera cependant que pour des ponts de moins de 45^m de portée environ, il n'est pas nécessaire de renforcer les bandes à cause du vent, parce que le jeu restant entre le travail limite du fer d'au plus 787^{kg} par cm^2 fixé au § 4 lit. *a* pour ces ponts, et le travail surélevé toléré jusqu'à 1000^{kg} par cm^2 au § 4 lit. *e*, sera suffisant pour comprendre les effets additionnels calculés quant au vent. Les ponts que nous considérons sont généralement encore très-rigides dans le sens horizontal. Dans le cas où la voie est en dessus l'écartement horizontal des fibres extrêmes sera d'au moins 3^m environ ou 1 : 15 de la portée; toute la construction forme alors avec ses entretoisements et entrecroisements rigides un véritable corps solide résistant avec ses bandes inférieures et supérieures contreventées, d'une manière suffisante à la déformation horizontale. Dans le cas où la voie est en dessous (la construction étant alors ouverte vers le haut) l'écartement horizontal des fibres extrêmes dépassera sûrement le 1 : 10 de la portée, en sorte que les seules bandes inférieures et leur contreventement, renforcés par le système rigide formé par les poutres transversales et les longerons, suffiront amplement pour parer à tout effort horizontal.

4. Pour des portées de 45 à 55^m environ et pour des ponts à voie en dessous, l'entretoisement supérieur est comme nous l'avons indiqué au N° *XXXIX* possible mais douteux en pratique. Dans le cas de bandes supérieures courbes avec entretoisement et contreventement sur une partie de leur longueur, il convient de ne compter dans les calculs que sur le contreventement complet reliant les bandes inférieures, ce qui n'empêche pas de constituer le contreventement partiel supérieur aussi rigide que possible. Pour des ponts à voie en dessus ayant la portée considérée, on pourait répéter ce que nous avons dit au N° 3 pour les ponts de portée moindre; seulement à mesure que la porte augmente on aura à s'occuper d'avantage de la répartition des effets du vent entre les bandes supérieures et inférieures. Cette question concernant surtout les ponts de portées plus grandes, et le surplus de métal que les effets additionnels du vent y amènent pour les bandes, à mesure que la portée augmente, nous la traiterons ci-dessous d'une manière générale.

5. Pour des portées de 55 à 80^m environ il devient intéressant d'examiner de quelle manière les effets du vent se répartissent entre les différentes pièces de la construction, tant pour les bandes supérieures et inférieures, que pour les parois de croisillons disposées horizontalement et verticalement.

Nous admettons que les contreventements supérieur et inférieur ont tous deux la longueur de la portée entière, et forment avec les bandes, des poutres rigides à peu-près horizontales**

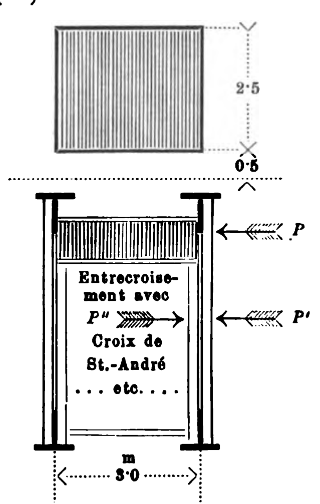
* On voit sur l'abaque que l'on a pour le vent de 170^{kg} aux appuis . . . $29{\cdot}2 + 17{\cdot}0 = 46^t2$ et pour le vent de 270^{kg} . . . $29{\cdot}2 \times (270 : 170) = 46^t4$. Ce calcul suppose $w = 2^m50$. Pour des ponts de 80^m analogues à voie en dessous on aurait donc sûrement les deux alternatives à considérer.

** Il sera de peu d'importance pour la résistance du pont dans le sens horizontal, que ces poutres soient exactement horizontales ou légèrement bombées comme cela arrive pour les ponts à bandes supérieures courbes.

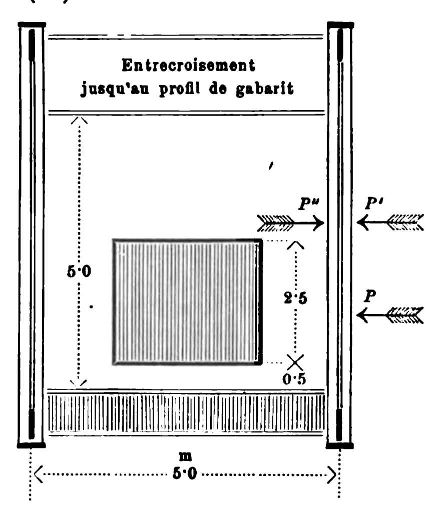
qui se terminent au-dessus des appuis par des cadres indéformables* (portiques) maintenus contre la torsion sur les piles ou culées comme s'il y avait des encastrements. Nous supposons en outre que tout le long du pont il y a un certain nombre de cadres rigides analogues.

Ces conditions qui malheureusement n'ont pas toujours été entièrement remplies pour tous les ponts exécutés antérieurement, sont pourtant indispensables, pour que toutes les pièces de la construction puissent concourir convenablement à paralyser les effets du vent**. Si l'on admet qu'on y ait satisfait suffisamment, on pourra comparer la construction métallique toute entière à un corps solide rigide si la voie est en dessus, ou a un tube rigide si elle est en dessous et dans les deux cas il y aura sur les piles ou culées des appuis fixes s'il s'agit de flexion, ou même des encastrements s'il s'agit de torsion. Nous représentons ci-après les profils en travers types pour ces deux hypothèses:

(19) Pont à voie en dessus



(20) Pont à voie en dessous



Considérons dans l'un ou l'autre cas (19) ou (20) un élément de longueur du pont caracterisé par son profil et la résultante P des pressions du vent qui y sont appliquées. Par le centre de gravité du profil de pont, menons deux forces horizontales P' et P'', égales et de signe contraire telles que $P = P' = P''$. Nous pouvons sans rien changer à l'équilibre établi, considérer l'ensemble de ces trois forces comme remplaçant la force unique P. L'action du vent ainsi définie sera représentée par une force P' appliquée au centre de gravité du profil de pont et par le couple $(+P - P'')$ tendant à provoquer la torsion du profil.

Comme le centre de gravité est à peu près également éloigné des bandes inférieures et supérieures il en résulterait que les effets des moments de flexion et des efforts tranchants dûs à l'action du vent, se répartissent également entre les deux contreventements. Il reste ensuite le couple de torsion qui agit sur les 4 parois rigides du pont et produit dans les croisillons qui les composent des efforts additionnels, lesquels concerneront généralement surtout les croisillons de contreventement qui sont les plus éloignés de l'axe de torsion.

Le moment de torsion en une section quelconque résulte de l'application des moments de torsion sur les appuis qui limitent la travée, et de l'application de tous les couples $(+P'' - P'')$ élémentaires; il se calculera âbsolument comme on calcule les moments de flexion et les efforts tranchants. On reconnaît ainsi que pour un vent appliqué sur toute la portée par exemple, le moment de torsion est nul au milieu de la travée et maximum sur les appuis où il y a encastrement. Le moment de torsion sur un appui, augmenté du moment de renversement qu'y produisent toutes les forces P' donnera le moment de renversement total sur cet appui***.

* Cet encadrement sera consolidé par un entrecroisement convenable (croix de St.-André . . . etc.) en cas de voie en dessus et par des armatures rigides aux quatre angles en cas de voie en dessous.

** Dans le cas contraire, celle des deux poutres horizontales (bandes et contreventement) qui ne se trouve pas maintenue directement par les appuis, pourra se déplacer toute entière sans que la résistance spéciale de son contreventement soit utilisée, et tous les profils en travers se trouvant alors déformés outre mesure, tout calcul de répartition serait en défaut.

*** Cette remarque n'est destinée qu'à élucider la répartition des forces que nous considérons, car s'il s'agissait exceptionnellement de juger de la possibilité d'un soulèvement ou même d'un renversement du pont par le vent, il serait bien plus simple de calculer directement le moment de renversement des pressions de vent appliquées.

En pratique on pourra se convaincre facilement du peu d'importance des moments de torsion*. On n'a donc généralement à tenir compte surtout que des moments de flexion et des efforts tranchants provenant du vent et à cet égard les ingénieurs ont renoncé depuis longtemps à s'en tenir à la répartition égale motivée ci-dessus, parce que les constructions métalliques ne sont pas en réalité maintenues au-dessus des appuis d'un façon qui justifie entièrement l'hypothèse des encastrements et surtout parce que l'action du vent n'est nullement une action purement statique comme le supposent toujours tous les calculs, et que les coups de vent frappant le train de surcharge par exemple, devront être parés tout d'abord par la voie elle même et ses supports, la répartition ultérieure n'ayant pas le temps de s'effectuer . . . etc.

Pour tenir compte de toutes ces considérations pratiques, on pourra répartir la majeure partie des effets du vent sur celle des deux poutres horizontales de contreventement, qui est voisine de la voie en s'en tenant généralement au rapport très-usité $(\frac{1}{2}\mathcal{W}+w):(\frac{1}{2}\mathcal{W})$ ou dans le cas d'une voie intermédiaire, en tenant au moins compte pour la partie w, du rapport des distances de la voie aux deux bandes. Ajoutons du reste que l'ensemble solidement rivé que forment les longerons et les poutres transversales, doit aussi contribuer pour beaucoup à la rigidité de tout le système.

La résistance d'une construction métallique aux effets du vent ou plus généralement aux causes de déformations ou d'oscillations dans le sens horizontal, dépend en premier lieu du rapport de l'écartement des maîtresses-poutres à la portée du pont, qui pour de grandes portées ne devrait pas descendre au-dessous de 1 : 15. Ce rapport indiquerait pour les portées considérées de 55 à 80^m un écartement minimum de 3^m67 à 5^m33 environ. On reconnaît par suite aussi que les ponts à double voie se trouveront dans des conditions de stabilité bien meilleures.

6. **Pour des portées de 80 à 120^m, les ponts à une seule voie donnent déjà lieu à quelques difficultés concernant les effets du vent et la stabilité du profil en travers.** Ces ponts deviennent coûteux outre mesure si l'on veut leur donner une largeur de profil suffisante. Pour la portée de 120^m par exemple on n'aura même avec 6^m de largeur qu'un rapport de $6:120=1:20$, tandis que dans un pont à deux voies avec 8^m6 d'écartement pour les maîtresses-poutres on aura un rapport surpassant 1 : 14. Pour des portées encore plus grandes les avantages relatifs des ponts à deux voies, paraîtront plus manifestes encore.

Pour des ponts d'aussi grande portée, à une seule voie en dessus ou intermédiaire, les constructeurs, afin d'éviter les longues poutres transversales et de conserver cependant la stabilité voulue à la base, ont souvent utilisé un expédient qui consiste à donner aux maîtresses-poutres une certaine inclinaison sur la verticale.

c) Exemples de calculs de résistance pour ponts à travée indépendante.

Les exemples de calculs de résistance que nous donnons ci-après aux Nos *XLIII* et *XLVII* concernent des types de ponts construits dans ces dernières temps en Autriche conformément aux prescriptions de la nouvelle ordonnance. Ces calculs ont été disposés sous forme de tableaux qui font reconnaître tout le mécanisme des opérations en facilitant les comparaisons.

Pour le pont en tôle *XLIII*, les maîtresses-poutres, poutres transversales et les longerons sont indiqués par des croquis de détail qui suffiraient à la rigueur pour mettre immédiatement les travaux en adjudication. Pour le pont à treillis *XLIV* l'ensemble des croquis et calculs indiqués suffirait, pour dresser le projet définif devant servir à l'adjudication des travaux. On y a indiqué aussi les calculs concernant le contreventement d'après les nouvelles prescriptions autrichiennes.

Pour les ponts à triangulations *XLV*, *XLVI* et *XLVII* au contraire, nos tableaux de calculs ne renferment que ce qui concerne les charges permanentes et mobiles agissant verticalement, mais ces tableaux sont aussi détaillés que pour les ponts qui précédent de façon à bien faire voir le mécanisme simplifié des procédés appliqués. Dans tous ces ponts, choisis comme exemples, il ne serait pas nécessaire de renforcer les bandes en vue des effets du vent.

* A titre d'exemple prouvant d'une manière frappante la justesse de cette remarque nous citerons l'arche centrale du viaduc de Porto sur le Douro, laquelle a 160^m de portée, 47^m40 de hauteur à la clef et se trouve construite pour une seule voie dans des conditions pouvant laisser préjuger que la torsion y sera considérable. Le calcul a prouvé cependant qu'avec un vent de 150 ou 250^{kg} la torsion n'y surélève le travail du fer que de 100^{kg} par cm^2 pour les croisillons de contreventement et 172^{kg} par cm^2 au plus pour ceux du treillis. Voir la publ. de M. T. Seyrig. Mémoires et comptes rendus de la société des ingénieurs civils Sept. et Octobre 1878. Paris, E. Lacroix. Au viaduc de Garabit dont la portée est de 165^m et la flèche de 51^m86 sous clef, le calcul fait avec un vent de 270^{kg} pour le pont sans surcharge et 150^{kg} pour le pont avec surcharge, donne pour les effets de la torsion des efforts maxima de 345^{kg} par cm^2 sur le treillis et de 242^{kg} par cm^2 sur le contreventement (Boyer, viaduc de Garabit. Dunod, Paris 1888).



Nous renvoyons du reste pour de plus amples détails à nos explications des N^{os} *XXXVIII* à *XLII* où se trouvent réunies toutes les considérations théoriques sur lesquelles reposent tous ces calculs, et nous renvoyons en particulier au N° précédent *XLII* pour tout ce qui concerne les effets du vent.

En comparant tous nos tableaux on pourra y constater la complication croissante qui encombre les calculs de résistance à fur et à mesure que l'on s'écarte d'avantage des types de poutres a profil symétrique les plus usités depuis l'origine. Tous les calculs relatifs aux poutres à treillis et à triangulations, reposant sur l'hypothèse des systèmes articulés, il est hors de doute que les efforts que l'on en déduit pour les pièces de la construction, doivent être un peu exagérés, car la raideur des nœuds et de tous les assemblages rivés, implique un surcroît de sécurité incontestable. Mais pour les mêmes raisons les efforts qui ne sont que des résultantes théoriques agissant dans le sens de la longueur des pièces ne donnent qu'un travail moyen du métal, qui sera dépassé de beaucoup dans certaines fibres élémentaires par suite des répartitions inégales et effets secondaires de toute espèce. Parmi tous ces effets mentionnés au N° *XXXII* nous n'avons introduit dans nos tableaux que ceux concernant l'aboutement, et on aurait à ajouter pour d'autres effets analogues, les verifications complémentaires nécessaires.

En raison du grand nombre de ponts métalliques déjà construits, on pourrait à volonté ajouter d'autres exemples à ceux que nous citons, et dresser des tableaux de calculs concernant les types les plus variés des maîtresses-poutres. Nous avons cru devoir nous en tenir aux types cités comme étant ceux que les ingénieurs ont choisis fréquemment dans ces derniers temps, et comme amenant à appliquer des procédés de calculs caractéristiques, pouvant être utilisés dans tous les cas analogues. Nous n'entendons donc nullement présenter ces exemples de ponts comme des modèles susceptibles de devenir des types dans des conditions de portées et de hauteurs à peu-près identiques. Ce sont en un mot les calculs et non les ponts que nous citons comme types.

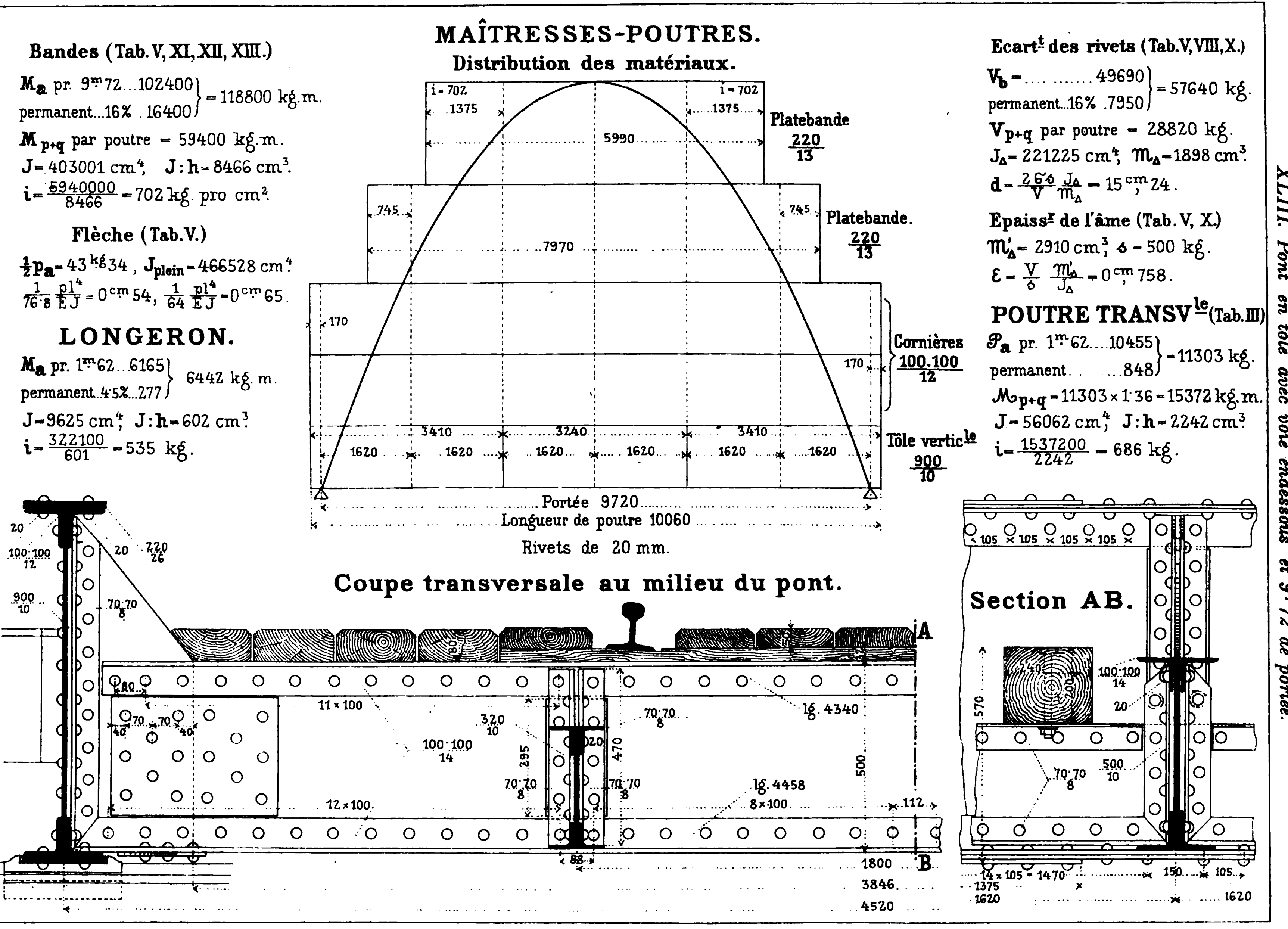
Dans cet ordre d'idées il importe de remarquer que notamment dans les exemples des N^{os} *XLV* et *XLVII* concernant des poutres à triangulations dissymétriques, nous tenons compte des diagonales dites à effet contraire, qui sont très-employées en Autriche et en Allemagne, mais non en France où l'on préfère les triangulations disposées symétriquement. La présence de ces diagonales à effet contraire, constitue une complication des tableaux de calculs et des poutres qu'ils concernent; ces dernières n'ayant dans toute leur partie médiane que des diagonales en fers plats sont peu rigides. Il est d'ailleurs fort difficile, lors du montage, d'amener tous ces longs fers plats à être simultanément bien tendus et même s'ils l'étaient on ne saurait éviter, qu'au passage des trains rapides, il ne s'y développe des mouvements vibratoires qui, sans cesse répétés, compromettent la rivure des attaches.

On augmente de beaucoup la rigidité des poutres que nous considérons, en n'y admettant, dans toute la partie médiane, que des diagonales rigides composées de cornières, fers à *T*, fers en *U* . . . etc. On peut alors supprimer les diagonales à effet contraire, ce qui simplifie beaucoup toute la triangulation et les tableaux de calculs qui en dérivent. En Autriche on a déjà construit dans ce système quelques ponts à triangulations dissymétriques du genre de celles que nous citons aux N^{os} *XLV* et *XLVII*; en Saxe on s'est décidé à éviter absolument les fers plats même pour les barres qui avoisinent les culées.

Les exemples de calculs que nous citons concernent donc les cas les plus compliqués qui se présenteront en pratique; ajoutons même que notre exemple du N° *XLVII* se trouve assujetti à une difficulté que nous avons signalée pour tous les ponts à voie en dessous ayant des portées comprises entre 45 et 55^m; la forme spéciale qu'y affecte la bande courbe témoigne de la sollicitude des ingénieurs de pouvoir donner à l'entretoisement supérieur le plus de développement possible. Pour les ponts analogues ayant des portées plus grandes il convient de prolonger cet entretoisement jusqu'au droit des appuis en y donnant aux montants verticaux la hauteur voulue. La bande supérieure possède alors la forme en courbe douce connue, que l'on rencontre dans les grands ponts construits en Hollande et plus récemment en Autriche.

Notre exemple du N° *XLVIII* concerne un pont de ce genre, construit avec 100^m de portée pour une voie seulement; il est remarquable par la grande hauteur des poutres et les grandes mailles de la triangulation, ainsi que par la légèreté relative qui en résulte, il convenait donc particulièrement bien pour un exemple de l'application des procédés graphiques, où nous voulions tenir compte des nouvelles bases de calculs de résistance, prescrites par l'ordonnance autrichienne. Nous sommes d'avis qu'une pareille estimation graphique, quelqu'élégante qu'elle paraisse, ne peut être admise que pour contrôler les calculs numériques que nous considérons comme indispensables pour un ouvrage de cette importance.

XLIII. Pont en tôle avec voie endessous et 9m.72 de portée.



XLIV. Pont de la Brumovka au Km 40% de la ligne Ung. Brod-Landesgrenze. Portée = 31m08.

Maîtresses-poutres à double treillis et montants de renfort, avec voie endessous.

Calcul du travail dans les croisillons.

Maille	Charge permanente V_q	Charge mobile $\frac{1}{2}pb^2$	Charge mobile V_p	Ensemble V_{p+q}	$\frac{V_{p+q}}{4\sin\gamma}$	Crois. tendus Ω	Crois. tendus i	Croisillons comprimés Ω	Croisillons comprimés i_0	Croisillons comprimés Aboutem.t	Croisillons comprimés i
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	t	t.m	t	t	t	cm²	Kg	cm²	Kg.		Kg
0..1	31·161	3036·8	97·90	129·06	45·79	61·44	745	70·08	653	1·12	732
1..2	24·929	2556·7	82·42	107·35	38·09	51·84	735	59·20	643	1·12	720
2..3	18·697	2103·5	67·81	86·51	30·69	42·24	727	51·20	600	1·16	695
3..4	12·465	1681·8	54·22	66·68	23·66	32·64	725	41·60	569	1·16	660
4..5	6·233	1327·3	42·79	49·02	17·39	25·68	677	29·60	588	1·24	729
5..6	0·000	1011·3	32·60	32·60	11·57	15·04	769	20·80	556	1·30	723

Calcul du travail dans les bandes.

Charge par m de voie: permanente 2210 kg. Scala a 6004 „ 8214 „

Maille	Effort de bandes par poutre — Formule	Effort	Bande infre Ω	Bande infre i	Bande supérieure Ω	Bande supérieure i_0	Bande supérieure Aboutem.t	Bande supérieure i
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
		t	cm²	Kg	cm²	Kg		Kg
5..6	$\frac{1}{8}(4107 \times \overline{31·02}^2) : 2·80 =$	176·4	234·4	752	252·8	698	1·09	760
4..5	176·425 × 0·9669 =	170·6	234·4	728	252·8	675	1·09	736
3..4	— „ — × 0·8678 =	153·1	203·8	751	228·3	671	1·10	738
2..3	— „ — × 0·7025 =	123·9	173·2	716	191·6	647	1·11	718
1..2	— „ — × 0·4711 =	83·1	112·0	742	154·9	536	1·13	606
0..1	— „ — × 0·1736 =	30·6	81·4	376	118·2	259	1·18	305

Croquis schématique du treillis.

γ = 44°48' ℓ' = 29·61 … 26·79 … 23·97 … 21·15 … 18·33 … 15·51 Milieu du pont.

Croquis du contre-ventement.

γ = 39°30'20" γ = 28°47'40"

W = 1m75, W' = 2m10; w = 0m75, w = 1m60

ℓ' = 28·20 … 22·56 … 15·51

Coupe transversale.

XLV. Pont sur la March au Km. 8·09 de la ligne Kojetein-Bielitz. (Portée = 56m56) avec double triangulation à diagonales tendues, bandes droites et voie en dessous.

1. Croquis schématique de l'une des maîtresses-poutres.

0 1 2 3 4 5 6 7 Milieu 8 9 10 11 12 13 14

871 1341 171·8 200·0 218·8 228·2 228·2

111·86 40·51 41·22 79·62 56·68 39·55 68·51 32·68 57·61 26·38 47·10 20·25 37·47 14·28 28·10 8·53 18·97 10·17 1·83 6·85

0·0 30·6 87·1 134·1 171·8 200·0 218·8

<. 4·04 .×. 4·04 .×. 4·04 .×. 4·04 .×. 4·04 .×. 4·04 .×. 4·04 .><. . . . . . . 28·28 = 1/2 l . . . . >

b = 54·54 . . . 48·48 . . . . . . 40·40 . . . . 32·32 . . . . . . 24·24 . . . . . . 16·16 . . . . jusqu'à l'appui . . . . . >

b = . 52·52 . . . . 44·44 . . . . 36·36 . . . . 28·28 . . . . 20·20 . . . . jusqu'à l'appui . . . . . >

Charges par m de voie: permanente . . . 2t797, mobile d'après Scala a . . . 5t103, ensemble . . . 7t900

2. Calcul du travail dans les bandes de la poutre composée donnée.

Effort de bande par poutre				Bande inférieure			Bande supérieure				
Expression de l'effort		par système S_{p+q}	pr. les deux systèmes ensemble	dans la maille	Surface de section Ω	Travail par cm² t	dans la maille	Surface de section Ω	Travail par cm²		
Nœud	Formule selon les mailles								sans aboutement t_0	coefficient d'aboutement	avec aboutement t
(1)	(2)	(3) t	(4) t	(5)	(6) cm²	(7) kg	(8)	(9) cm²	(10) kg	(11)	(12) kg
7	$(S)_7 = \frac{7{\cdot}9 \times \overline{56{\cdot}56}^2}{32 \times 6{\cdot}85} =$	115·3									
6	$(S)_7 \times 0{\cdot}97959$	112·9	228·2	—	—	—	5…7	314·2	726	1·07	777
5	„ × 0·91837	105·9	218·8	6…7	293·2	747	4…5	„	697	„	746
4	„ × 0·81633	94·12	200·0	5…6	257·2	778	3…4	272·2	735	„	786
3	„ × 0·67347	77·65	171·8	4…5	221·2	777	2…3	„	631	„	675
2	„ × 0·48980	56·47	134·1	3…4	169·2	793	1…2	229·2	585	1·08	632
1	„ × 0·26531	30·59	87·1	2…3	139·2	626	0…1	169·2	515	1·09	561
0	„ × 0·00000	0·00	30·6	1…2	139·2	220	—	—	—	—	—

3. Calcul du travail dans les barres de la triangulation aux nœuds impairs.

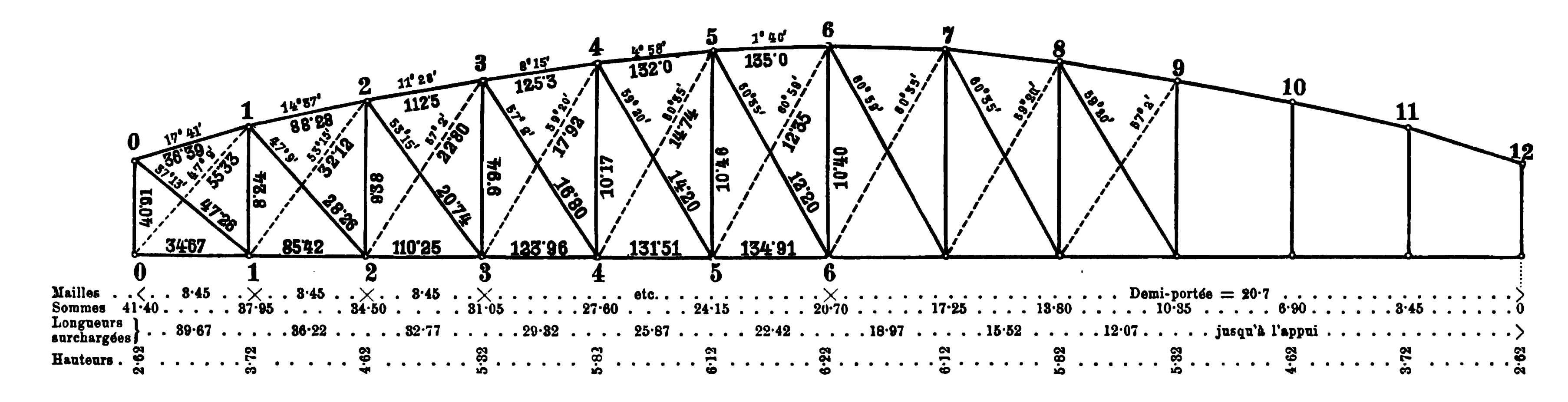
Effort tranchant par voie					Barres tendues				Barres comprimées					
dans la maille	pr. la charge permanente V_g	d'après Scala b		Ensemble V_{p+q}	dans la maille	Tension $\frac{V_{p+q}}{4 \sin \gamma}$	Surface de section Ω	Travail par cm² t	au nœud	Compression $\frac{V_{p+q}}{4} + 1{\cdot}88$	Surface de section Ω	Travail par cm²		
		$\frac{1}{2} pb^2$	$V_p = \frac{pb^2}{2l}$									sans aboutement t_0	coefficient d'aboutement	avec aboutement t
(1)	(2) t	(3) mt	(4) t	(5) t	(6)	(7) t	(8) cm²	(9) kg	(10)	(11) t	(12) cm²	(13) kg	(14)	(15) kg
0..1	+73·45	8469·6	149·8	223·3	0..1	64·82	86·4	751	0	57·70	$\frac{1}{2}$ 280	$\frac{111660}{280}$	1·24	495
1..3	+56·50	6937·2	122·7	179·2	1..3	68·51	94·4	726	1	46·68	90·2	518	1·21	627
3..5	+33·90	5048·3	89·3	123·2	3..5	47·10	64·0	736	3	32·68	68·0	481	1·39	669
5..7	+11·30	3519·0	62·2	73·5	5..7	28·10	40·0	703	5	20·25	52·0	390	1·58	616
7..9	−11·30	2145·5	37·9	26·6	7..9	10·17	40·0	254	7	8·53	35·8	238	1·74	414

4. Calcul du travail dans les barres de la triangulation aux nœuds pairs.

Effort tranchant par voie					Barres tendues				Barres comprimées					
dans la maille	pr. la charge permanente V_g	d'après Scala b		Ensemble V_{p+q}	dans la maille	Tension $\frac{V_{p+q}}{4 \sin \gamma}$	Surface de section Ω	Travail par cm² t	au nœud	Compression $\frac{V_{p+q}}{4} + 1{\cdot}88$	Surface de section Ω	Travail par cm²		
		$\frac{1}{2} pb^2$	$V_p = \frac{pb^2}{2l}$									sans aboutement t_0	coefficient d'aboutement	avec aboutement t
(1)	(2) t	(3) mt	(4) t	(5) t	(6)	(7) t	(8) cm²	(9) kg	(10)	(11) t	(12) cm²	(13) kg	(14)	(15) kg
0..2	+67·80	7946·5	140·5	208·3	0..2	79·62	102·4	777	0	53·96	$\frac{1}{2}$ 280	$\frac{111660}{280}$	1·24	495
2..4	+45·20	5968·8	105·5	150·7	2..4	57·61	78·4	735	2	39·55	76·0	520	1·21	629
4..6	+22·60	4266·8	75·4	98·0	4..6	37·47	52·0	721	4	26·38	60·0	440	1·47	647
6..8	+ 0·00	2807·3	49·6	49·6	6..8	18·97	32·0	593	6	14·28	44·0	325	1·72	559
8.10	−22·60	1547·7	27·4	4·8	8.10	1·83	32·0	57	—	—	—	—	—	—

XLVI. Pont sur la Becwa au Km 59·09 de la ligne Kojetein-Bielitz. (Portée = 41m40) avec deux triangulations disposées symétriquement, bande supérieure courbe et voie en dessous.

1. Croquis schématique de l'une des maîtresses-poutres.



2. Inclinaisons des diverses pièces sur l'horizon.

Angle γ pour les diagonales						Angles ω pour la bande supérieure					
cos γ	Angle γ	tang γ	Diagonales tendues: Maille	Diagonales tendues: Ouverture	Hauteur de montant	Différence de hauteur	Éléments de bande: Ouverture	Éléments de bande: Maille	tang ω	Angle ω	cos ω
				m	m	m	m				
0·7963	37° 13′	0·7594	0...1	3·45	2·62	1·10	3·45	0...1	0·3188	17° 41′	0·9527
0·6801	47° 9′	1·0782	1...2	„	3·72	0·90	„	1...2	0·2609	14° 37′	0·9676
0·5983	53° 15′	1·339	2...3	„	4·62	0·70	„	2...3	0·2029	11° 28′	0·9800
0·5442	57° 2′	1·542	3...4	„	5·32	0·50	„	3...4	0·1449	8° 15′	0·9896
0·5100	59° 20′	1·687	4...5	„	5·82	0·30	„	4...5	0·0870	4° 58′	0·9962
0·4912	60° 35′	1·774	5...6	„	6·12	0·10	„	5...6	0·0290	1° 40′	0·9996
0·4851	60° 59′	1·803	6...7	„	6·22						

3. Charges pour les calculs de résistance.

1. **Charges permanentes et mobiles** (scala a) par mètre de voie

	Perman.	Mobile	Ensemble
	t	t	t
Charge par voie . .	2·320	5·560	7·880
„ „ poutre .	1·160	2·780	3·940
„ „ système .	0·580	1·390	1·970

2. Charges permanentes de nœud par système

au montant:	En haut	En bas	Ensemble
	t	t	t
intermédiaire . . .	0·667	1·334	2·001
sur un appui . . .	0·333	0·667	1·000

XLVI. (Suite).

Distribution des efforts de bandes, qui, dans la poutre composée donnée, résultent des charges permanentes et mobiles (scala a).

4. Composantes horizontales des efforts de bandes dans la poutre composée donnée.

Expressions du moment selon les nœuds		Moments de flexion par système		Hauteur théorique des montants	Composante horizontale des efforts de bandes			Observations
Nœud	Formule de $M =$	pr. la charge permanente $= q$ pr. m	pr. la charge totale $= (p+q)$ pr. m		par système $\frac{\text{Mom } (p+q)}{\text{Hauteur}}$	pr. les 2 systèmes ensemble	pr. bande dans la maille	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	ad (2), (3), (4): $(M_6)_q = \frac{0{\cdot}58}{8}\,\overline{41{\cdot}4}^2 = 124{\cdot}3^{mt}$ $(M_6)_{p+q} = \frac{1{\cdot}97}{8}\,\overline{41{\cdot}4}^2 = 422{\cdot}1^{mt}$ se calculent directement (aussi avec Tab. V approximativement). Tous les autres moments résultent ensuite de l'application des coefficients (2) de notre barême (Tab. VI du tome II). ad (6), (7): Les efforts de la colonne (6) appartiennent aux poutres simples; on les cumule dans la colonne (7).
		mt	mt	m	t	t		
6	$M_6 \times$ 1·00000	124·3	422·1	6·22	67·86	134·91	5...6	
5	„ $\times$ 0·97222	120·8	410·3	6·12	67·05	131·51	4...5	
4	„ $\times$ 0·88889	110·5	375·2	5·82	64·46	123·96	3...4	
3	„ $\times$ 0·75000	93·20	316·6	5·32	59·50	110·25	2...3	
2	„ $\times$ 0·55555	69·04	234·5	4·62	50·75	85·42	1...2	
1	„ $\times$ 0·30556	37·97	129·0	3·72	34·67	34·67	0...1	
0	„ $\times$ 0·00000	0·00	0·0	2·62	0·00			

5. Travail du fer dans les éléments de bandes de la poutre composée donnée.

Bande inférieure				Bande supérieure							
Maille	Effort de bande	Surface de section	Travail par cm²	Maille	cos ω	Effort horizontal	Effort de bande	Surface de section	Travail par cm² sans aboutement	Coefficient d'aboutement	Travail par cm² avec aboutement
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	t	cm	kg			t	t	cm	kg		kg
5..6	134·91	174·3	774	5..6	0·9996	134·91	135·0	196·6	686	1·10	755
4..5	131·51	174·3	754	4..5	0·9962	131·51	132·0	196·6	671	1·10	738
3..4	123·96	174·3	711	3..4	0·9896	123·96	125·3	196·6	637	1·10	701
2..3	110·25	143·1	771	2..3	0·9800	110·25	112·5	166·2	677	1·12	758
1..2	85·42	111·9	764	1..2	0·9676	85·42	88·28	133·4	662	1·15	761
0..1	34·67	75·68	458	0..1	0·9527	34·67	36·39	78·8	462	1·55	716

Distribution des efforts dans les barres de triangulation.

6. Effort tranchant dû à la charge mobile seule, dans chaque poutre à triangulation simple (1/4 de la scala b).

Charge par voie (scala b)			Moment tournant	Efforts tranchants par système		Effets aux nœuds par système		Observations
jusqu'au milieu de la maille	sur la longueur $b =$	par m $(p)_b =$	$\frac{1}{2} pb^2$	dans la maille	$V_p = \frac{1}{4l} \frac{pb^2}{2}$	Charge $3{\cdot}45 \times \frac{p}{4}$	Moment $\overline{3{\cdot}45}^2 \times \frac{p}{4}$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	ad (3), (4): Ces valeurs sont données immédiatement par la Tab. V du tome II, par voie; on en déduit les fonctions des colonnes (6), (7), (8) évaluées par système. ad (7): Les charges nodales d'après l'échelle b servent à la vérification des montants. ad (8) et (7): Le moment nodal (8) rectifie le moment correspondant marqué* dans le tableau 7 (page suivante) calculé pour la charge mobile seule (scala b).
	m	t	mt		t	t	t	
0....1	39·67	6·2238	4896·5	0....1	29·57	5·368	18·52	
1....2	36·22	6·4646	4240·3	1....2	25·61	5·576	19·24	
2....3	32·77	6·7061	3600·7	2....3	21·74	5·784	19·96	
3....4	29·32	6·9476	2986·3	3....4	18·03	5·992	20·67	
4....5	25·87	7·1891	2405·6	4....5	14·53	6·201	21·39	
5....6	22·42	7·4306	1867·5	5....6	11·28	6·409	22·11	
6....7	18·97	7·7854	1400·8	6....7	8·459	6·715	23·17	
7....8	15·52	8·4064	1012·4	7....8	6·113	7·250	25·01	
8....9	12·07	9·3790	683·2	8....9	4·126	—	—	

XLVI. (Suite).

Efforts des barres tendues et comprimées dans les deux triangulations.

7. Composantes horizontales des efforts incombant aux diagonales.

Efforts tranchants pour la charge mobile		Moments					Hauteur théorique des montants	Efforts			
		pour la charge mobile			pour la charge permante.	Ensemble		dans la bande	Composantes horizontales des barres		
jusqu'au milieu de	V_p	Nœud	bras de levier	$\mathcal{M}_p$	$\mathcal{M}_q$	$\mathcal{M}_{(p+q)}$	H	$\frac{\mathcal{M}_{(p+q)}}{H}$	$S \cos \gamma$	Diagonale, Verticale	pour la maille
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
(0 . . 1)	29·57 ×	1	3·45	102·01	37·97	139·98	3·72	37·63	= 37·63	Diagon. . .	0 . . 1
		2	6·90	185·6 *	69·04	254·6	4·62	55·11	. . 17·48	Vertic. . (+)	1 . . 2
(1 . . 2)	25·61 ×	1	3·45	88·34	37·97	126·31	3·72	33·96	= 33·96	Vertic. . (—)	0 . . 1
		2	6·90	176·7	69·04	245·7	4·62	53·18	. . 19·22	Diagon. . .	1 . . 2
		3	10·35	245·9 *	93·20	339·1	5·32	63·74	. . 10·56	Vertic. . (+)	2 . . 3
(2 . . 3)	21·74 ×	1	3·45	75·02	37·97	112·99	3·72	30·37	. . 17·08	Vertic. . (—)	1 . . 2
		2	6·90	150·0	69·04	219·0	4·62	47·40	. . 12·41	Diagon. . .	2 . . 3
		3	10·35	225·0	93·20	318·2	5·32	59·81	. . 7·29	Vertic. . (+)	3 . . 4
		4	13·80	280·0 *	110·5	390·5	5·82	67·10			
(3 . . 4)	18·03 ×	2	6·90	124·4	69·04	193·4	4·62	41·86	. . 10·75	Vertic. . (—)	2 . . 3
		3	10·35	186·7	93·20	279·9	5·32	52·61	. . 9·14	Diagon. . .	3 . . 4
		4	13·80	248·9	110·5	359·4	5·82	61·75	. . 5·42	Vertic. . (+)	4 . . 5
		5	17·25	290·3 *	120·8	411·1	6·12	67·17			
(4 . . 5)	14·53 ×	3	10·35	150·4	93·20	243·6	5·32	45·78	. . 7·66	Vertic. . (—)	3 . . 4
		4	13·80	200·5	110·5	311·0	5·82	53·44	. . 7·24	Diagon. . .	4 . . 5
		5	17·25	250·6	120·8	371·4	6·12	60·68	. . 4·22	Vertic. . (+)	5 . . 6
		6	20·70	279·4 *	124·3	403·7	6·22	64·90			
(5 . . 6)	11·28 ×	4	13·80	155·6	110·5	266·1	5·82	45·72	. . 5·80	Vertic. . (—)	4 . . 5
		5	17·25	194·4	120·8	315·3	6·12	51·52	. . 5·99	Diagon. . .	5 . . 6
		6	20·70	233·4	124·3	357·7	6·22	57·51	. . 3·13	Vertic. . (+)	6 . . 7
		7	24·15	250·3 *	120·8	371·1	6·12	60·64			
(6 . . 7)	8·459 ×	5	17·25	145·9	120·8	266·7	6·12	43·58	. . 4·56	Vertic. . (—)	5 . . 6
		6	20·70	175·1	124·3	299·4	6·22	48·14	. . 4·98	Diagon. . .	6 . . 7
		7	24·15	204·3	120·8	325·1	6·12	53·12			
(7 . . 8)	6·113 ×	6	20·70	126·6	124·3	250·9	6·22	40·34	. . 3·52	Vertic. . (—)	6 . . 7
		7	24·15	147·6	120·8	268·4	6·12	43·86	. . 4·11	Diagon. . .	7 . . 8
		8	27·60	168·7	110·5	279·2	5·82	47·97			
(8 . . 9)	4·126 ×	8	27·60	113·9	110·5	224·4	5·82	38·56	. . 3·04	Diagon. . .	8 . . 9
		9	31·05	128·1	93·2	221·3	5·32	41·60			

* Déduction faite du moment nodal $\frac{1}{8} p \times (3{\cdot}45)^2$ du tableau 6.

8. Efforts dans les diagonales et travail du fer qui en résulte.

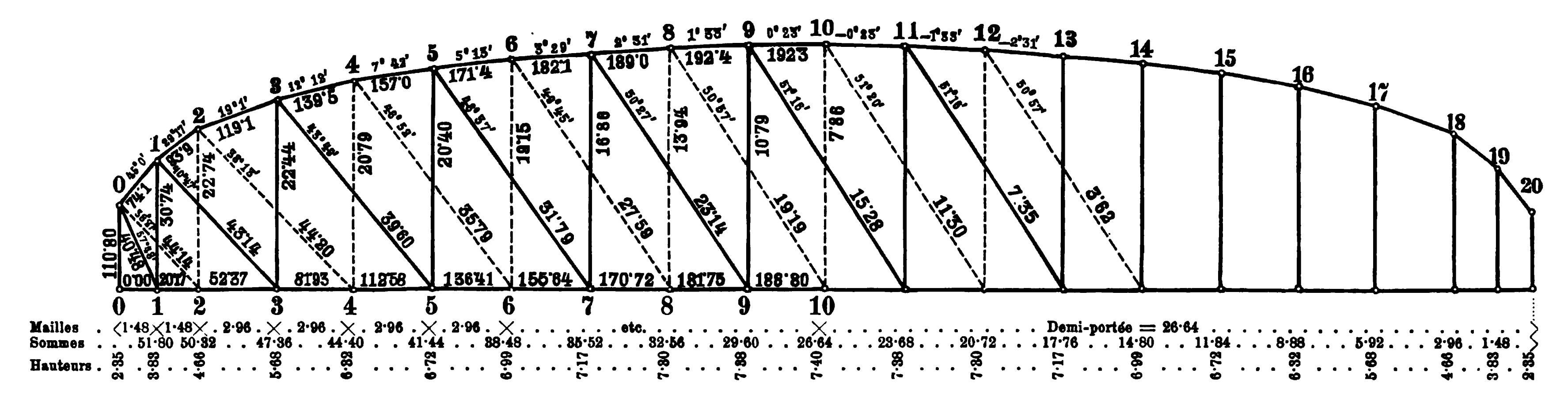
Effort horizontal		Diagonales tendues				Diagonales comprimées					
									Travail par cm²		
dans la maille	$S \cos \gamma$	$\cos \gamma$	Effort de barre S	Surface de section	Travail par cm²	$\cos \gamma$	Effort de barre S	Surface de section	sans aboutement	Coefficient d'aboutement	avec aboutement
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	t		t	cm	kg		t	cm	kg		kg
0 . . 1	37·63	0·7963	47·26	60·5	781	0·6801	55·33	90·2	613	1·28	785
1 . . 2	19·22	0·6801	28·26	37·2	760	0·5983	32·12	60·0	535	1·41	755
2 . . 3	12·41	0·5983	20·74	30·0	691	0·5442	22·80	52·0	438	1·62	710
3 . . 4	9·14	0·5442	16·80	30·0	560	0·5100	17·92	47·0	381	1·76	671
4 . . 5	7·24	0·5100	14·20	30·0	473	0·4912	14·74	44·0	335	2·02	676
5 . . 6	5·99	0·4912	12·20	30·0	407	0·4851	12·35	44·0	281	2·10	589
6 . . 7	4·98	0·4851	10·27	—	—	0·4912	10·14	—	—	—	—

9. Calcul comparatif des efforts dans les montants, pour les deux hypothèses de charge.

Nœud	Triangulation à diagonales tendues							Triang. à diagon. comprimées				Montants	
		1) avec la charge usuelle			2) avec nœud infer. chargé					Effort vertical		Résultats	
	tg γ	Composante horizontale	Effort vertical: $S \cos \gamma \operatorname{tg} \gamma$	Effort vertical: Montant	Composante horizontale	Effort vertical: $S \cos \gamma \operatorname{tg} \gamma$	Effort vertical: Montant	tg γ	Composante horizontale	$S \cos \gamma \operatorname{tg} \gamma$	Montant	avec 1)	avec 2)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
		t	t	t	t	t	t		t	t	t	t	t
0	—	Appui	. . . . . =	—40·91	—	—	—	—	Nœud	sur appui .	. = 47·52	Ch.d'app.	= 88·43
1	0·7594	33·96	25·79	—24·46	37·63	28·57	—21·87	1·339	17·48	23·41	+30·11	+ 5·65	+ 8·24
2	1·0782	17·03	18·36	—17·03	19·22	20·72	—13·81	1·542	10·56	16·28	+23·19	+ 6·16	+ 9·38
3	1·339	10·75	14·39	—13·06	12·41	16·60	— 9·48	1·687	7·29	12·30	+19·42	+ 6·36	+ 9·94
4	1·542	7·66	11·81	—10·48	9·14	14·09	— 6·76	1·774	5·42	9·61	+16·93	+ 6·45	+10·17
5	1·687	5·80	9·78	— 8·45	7·24	12·21	— 4·68	1·803	4·22	7·61	+15·14	+ 6·69	+10·46
6	1·774	4·56	8·09	— 6·76	5·99	10·63	— 2·89	1·774	3·13	5·55	+13·29	+ 6·53	+10·40

XLVII. Pont sur le Wiar au Km 247·59 de la ligne Krakau-Lemberg. (Portée = 53ᵐ28) avec double triangulation à diagonales tendues, bande supérieure courbe et voie en dessous.

1. Croquis schématique de l'une des maîtresses-poutres.



2. Inclinaisons des diverses pièces sur l'horizon.

Angle γ pour les diagonales					
cos γ	Angle γ	tang γ	Diagonales tendues — Maille	Diagonales tendues — Ouvert.	Hauteur de montant
0·5329	57° 48′	1·5878	0...1	1·48	2·35
0·7832	38° 27′	0·7939	0...2	2·96	2·35
0·7572	40° 47′	0·8626	1...3	4·44	3·83
0·7857	38° 13′	0·7872	2...4	5·92	4·66
0·7216	43° 49′	0·9595	3...5	„	5·68
0·6837	46° 52′	1·0676	4...6	„	6·32
0·6611	48° 37′	1·1352	5...7	„	6·72
0·6461	49° 45′	1·181	6...8	„	6·99
0·6367	50° 27′	1·211	7...9	„	7·17
0·6300	50° 57′	1·233	8..10	„	7·30
0·6257	51° 16′	1·247	9..11	„	7·38
0·6248	51° 20′	1·250	10..12	„	7·40

Angles ω pour la bande supérieure					
Différence de hauteur	Éléments de bande — Ouvert.	Éléments de bande — Maille	tang ω	Angle ω	cos ω
1·48	1·48	0...1	1·0000	45° 0′	0·7071
0·83	1·48	1...2	0·5608	29° 17′	0·8722
1·02	2·96	2...3	0·3446	19° 1′	0·9454
0·64	„	3...4	0·2162	12° 12′	0·9774
0·40	„	4...5	0·13514	7° 42′	0·9910
0·27	„	5...6	0·09122	5° 13′	0·9959
0·18	„	6...7	0·06081	3° 29′	0·9982
0·13	„	7...8	0·04392	2° 31′	0·9990
0·08	„	8...9	0·02703	1° 33′	0·9996
0·02	„	9..10	0·00676	0° 23′	1·0000

3. Charges pour les calculs de résistance.

1. Charges permanentes et mobiles (scala a) par mètre de voie

	Perman.	Mobile	Ensemble
	t	t	t
Charge par voie	2·860	5·200	8·060
„ „ poutre . . .	1·430	2·600	4·030
„ „ système . . .	0·715	1·300	2·015

2. Charges permanentes de nœud par système

	Montant	Système	En haut	En bas	Ensemble
			t	t	t
Pour les efforts des montants	N° 0	impair	0·175	0·350	0·525
	„ 0	pair	0·350	0·700	1·050
	„ 1	impair	0·700	1·400	2·100
	„ 2	pair	1·050	2·100	3·150
	„ 3	impair	1·225	2·450	3·675
	„ 4	pair	1·400	2·800	4·200

XLVII. (Suite).

Distribution des efforts de bandes, qui, dans la poutre composée donnée, résultent des charges permanentes et mobiles (Scala a).

4. Composantes horizontales des efforts de bandes par poutre.

Expressions du moment selon les nœuds: Nœud	Formule de $M=$	Moment de flexion par système: pr. la charge permanente $= q$ pr. m	pr. la charge totale $=(p+q)$ pr. m	Hauteur théorique des montants	Compos. horizontales des efforts de bandes: par système $\frac{\text{Mom } (p+q)}{\text{Hauteur}}$	pour les deux systèmes ensemble	à prendre pour la maille dans la bande inférieure	bande supérieure
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
		mt	mt	m	t	t		
10	$M_{10} \times 1\cdot00000$	253·7	715·0	7·40	96·62	192·31	—	9..10 / 8..9
9	„ 0·98765	250·6	706·2	7·38	95·69	188·80	9..10	7..8
8	„ 0·95062	241·2	679·7	7·30	93·11	181·75	8..9	6..7
7	„ 0·88889	225·5	635·6	7·17	88·64	170·72	7..8	5..6
6	„ 0·80247	203·6	573·8	6·99	82·08	155·64	6..7	4..5
5	„ 0·69136	175·4	494·3	6·72	73·56	136·41	5..6	3..4
4	„ 0·55556	141·0	397·2	6·32	62·85	112·58	4..5	2..3
3	„ 0·39506	100·23	282·5	5·68	49·73	81·93	3..4	1..2
2	„ 0·20988	53·24	150·1	4·66	32·20	52·37	2..3	0..1
1	„ 0·10802	27·41	77·23	3·83	20·17	20·17	1..2	—
0	„ 0·00000	0·00	0·00	2·35	0·00			

Observations (10)

ad (2), (3), (4):

Les moments de flexion:

$$(M_{10})_q = \frac{0\cdot715}{8} \cdot \overline{53\cdot28}^2 = 253\cdot7$$

$$(M_{10})_{p+q} = \frac{2\cdot015}{8} \cdot \overline{53\cdot28}^2 = 715\cdot0$$

se calculent directement (aussi avec la Tab. V du tome II approximativement). Tous les autres moments résultent ensuite de l'application (2) de notre barême (Tab. VI du tome II).

ad (6), (7):

Les efforts de la colonne (6) appartiennent aux deux poutres à triangulation simple; on les cumule dans la colonne (7).

5. Travail du fer dans les éléments de bandes de la poutre composée donnée.

Bande inférieure: Maille	Effort de bande	Surface de section	Travail par cm²	Bande supérieure: Maille	cos ω	Effort horizontal	Effort de bande	Surface de section	Travail par cm²: sans aboutement	Coefficient d'aboutement	avec aboutement
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	t	cm²	kg			t	t	cm²	kg		kg
9..10	188·80	267·5	706	9..10 / 8..9	1·0000 / 0·9996	192·31	192·3 / 192·4	299·2	643	1·12	720
8..9	181·75	„	679	7..8	0·9990	188·80	189·0	„	631	„	706
7..8	170·72	„	638	6..7	0·9982	181·75	182·1	„	608	„	681
6..7	155·64	234·0	665	5..6	0·9959	170·72	171·4	259·4	661	„	740
5..6	136·41	200·5	680	4..5	0·9910	155·64	157·0	„	605	„	678
4..5	112·58	„	562	3..4	0·9774	136·41	139·5	219·6	635	„	711
3..4	81·93	167·0	491	2..3	0·9454	112·58	119·1	„	542	1·13	612
2..3	52·37	127·2	412	1..2	0·8722	81·93	93·9	179·8	523	1·13	591
1..2	20·17	„	158	0..1	0·7071	52·37	74·1	„	413	1·05	434

XLVII. (Suite).

Distribution des efforts dans les barres de la triangulation aux nœuds impairs, sous l'action des charges permanentes et mobiles (scala **b***).*

6. Efforts tranchants provenant de la charge mobile seule (par système, ¼ de la charge b).

Charge par voie d'après l'échelle b				Efforts tranch. par système		
jusqu'au	sur la longueur b =	par mètre $(p)_b$ =	Moment tournant par voie Moment = $\frac{1}{2} pb^2$	dans la maille	$V_p = \frac{1}{4l} \frac{pb^2}{2}$	Observations
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	m	t	mt		t	ad (1):
milieu de (0:1)	52·54	5·7611	7951·6	0... 1	37·31	La surcharge est limitée du côté gauche en des points qui, pour les premières mailles du système, sont au milieu des longueurs (0..1), (1..3); pour les mailles suivantes, les milieux donnant la limite, se trouvent sur les nœuds pairs 4, 6, 8..... de l'autre triangulation.
„ „ (1:3)	49·58	5·8647	7208·2	1... 3	33·82	ad (3), (4), (5), (6):
nœud 4	44·40	6·0460	5959·4	3... 5	27·97	Les valeurs (3), (4) sont données (par voie) dans la Tab. V du tome II; on les utilise dans la colonne (6).
„ 6	38·48	6·3064	4668·9	5... 7	21·91	
„ 8	32·56	6·7218	3562·5	7... 9	16·72	
„ 10	26·64	7·1352	2538·5	9...11	11·91	
„ 12	20·72	7·5496	1620·6	11...13	7·604	
„ 14	14·80	8·5600	937·5	13...15	4·399	

7. Composantes horizontales des efforts supportés par les diagonales,

Efforts tranchants pour la charge mobile		Moments de flexion					Hauteur théorique des montants	Efforts			
		pour la charge mobile			pour la charge permanente	Ensemble		les bandes	Composantes horizontales		
Limite de surcharge	V_p =	au nœud	bras de levier	$\mathcal{M}_p$ =	$\mathcal{M}_q$ =	$\mathcal{M}_{p+q}$ =	H =	$\frac{\mathcal{M}_{p+q}}{H}$ =	$S \cos \gamma$ =	Diagonale, Verticale	Maille
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	t		m	mt	mt	mt	m	t	t		
(0:1)	37·31 × ..	1	1·48	55·22	27·41	82·63	3·83	21·57	= 21·57	Diagon.	0.. 1
(1:3)	33·82 × ..	1	1·48	50·06	27·41	77·47	3·83	20·23	= 20·23	Vertic. (—)	0.. 1
		3	5·92	200·2	100·23	300·4	5·68	52·90	..32·67	Diagon.	1.. 3
4	27·97 × ..	1	1·48	41·30	27·41	68·71	3·83	17·94	..28·86	Vertic. (—)	1.. 3
		3	5·92	165·6	100·23	265·8	5·68	46·80	..28·58	Diagon.	3.. 5
		5	11·84	331·2	175·4	506·6	6·72	75·38			
6	21·91 × ..	3	5·92	130·0	100·23	230·2	5·68	40·53	..24·17	Vertic. (—)	3.. 5
		5	11·84	259·4	175·4	434·8	6·72	64·70	..21·02	Diagon.	5.. 7
		7	17·76	389·1	225·5	614·6	7·17	85·72			
8	16·72 × ..	5	11·84	197·9	175·4	373·3	6·72	55·56	..17·30	Vertic. (—)	5.. 7
		7	17·76	296·9	225·5	522·4	7·17	72·86	..14·73	Diagon.	7.. 9
		9	23·68	395·8	250·6	646·4	7·38	87·59			
10	11·91 × ..	7	17·76	211·5	225·5	437·0	7·17	60·96	..11·21	Vertic. (—)	7.. 9
		9	23·68	282·1	250·6	532·7	7·38	72·17	.. 9·56	Diagon.	9..11
		11	29·60	352·6	250·6	603·2	7·38	81·73			
12	7·604 × ..	11	29·60	225·6	250·6	476·2	7·38	64·52	.. 4·60	Diagon.	11..13
		13	35·52	270·1	225·5	495·6	7·17	69·12			
14	4·399 × ..	13	35·52	156·2	225·5	381·7	7·17	53·24	— 0·01	Diagon.	13..15
		15	41·44	182·3	175·4	357·7	6·72	53·23			

8. Travail du fer dans toutes les barres du système.

Diagonales tendues						Montants verticaux comprimés								
Composante horizontale		cos γ	Effort de barre	Surface de section	Travail par cm²	Composante horizontale		tg γ	Effort vertical		surface de section	Travail par cm²		
Maille	$S \cos \gamma$		S			nœud	$S \cos \gamma$		$S \cos \gamma \times \mathrm{tg}\, \gamma$	dans le montant		sans aboutement	Coefficient d'about.	avec aboutement
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
	t		t	cm²	kg				t	t	cm²	kg		kg
0.. 1	21·57	0·5329	40·48	59·5	680	0	0·00	—	Chge d'app.	= 56·01	201·9	278	—	—
1.. 3	32·67	0·7572	43·14	61·9	697	1	20·23	1·5878	32·14	30·74	61·4	501	1·32	661
3.. 5	28·58	0·7216	39·60	54·7	724	3	28·86	0·8626	24·90	22·44	52·0	431	1·74	751
5.. 7	21·02	0·6611	31·79	46·1	690	5	24·17	0·9595	23·20	20·40	56·8	359	2·03	729
7.. 9	14·73	0·6367	23·14	34·1	678	7	17·30	1·1352	19·66	16·86	52·0	324	2·19	710
9..11	9·56	0·6257	15·28	24·6	621	9	11·21	1·211	13·59	10·79	52·0	207	2·27	471
11..13	4·60	0·6257	7·352	18·2	404	—	—	—	—	—	—	—	—	—

XLVII. (Suite).

Distribution des efforts dans les barres de la triangulation aux nœuds pairs, sous l'action des charges permanentes et mobiles (scala 𝔟*).*

9. Efforts tranchants provenant de la charge mobile seule (par système, $^1/_4$ de la charge 𝔟).

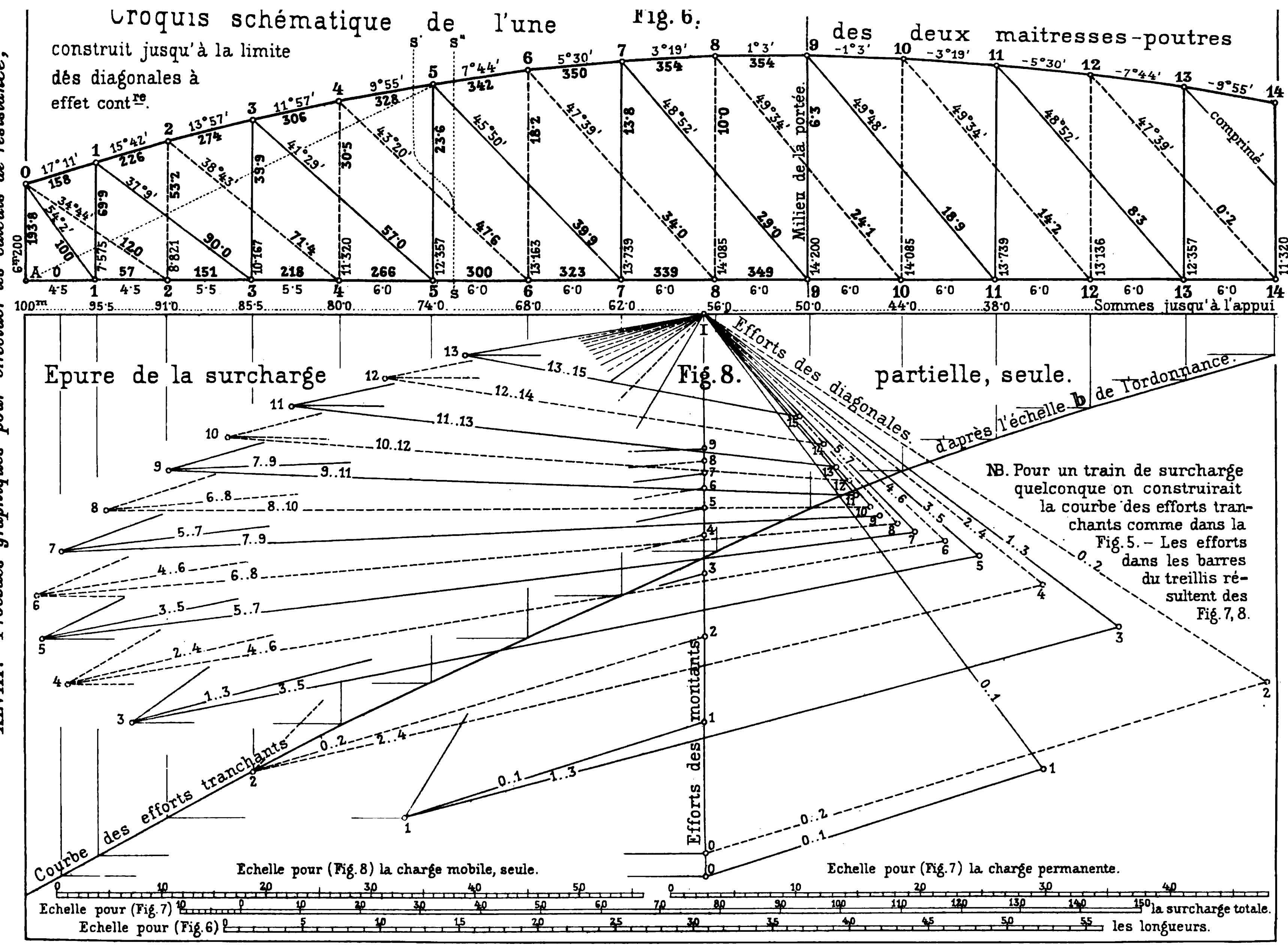
Charge par voie d'après l'échelle 𝔟			Moment tournant par voie: Moment $= ^1/_2\, pb^2$	Efforts tranch. par système		Observations
jusqu'au	sur la longueur $b =$	par mètre $(p)_b$		dans la maille	$V_p = \frac{1}{4l}\,\frac{pb^2}{2}$	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	m	t	mt		t	
nœud 1	51·80	5·7870	7764·0	0… 2	36·43	**ad (1):** La surcharge est limitée du côté gauche, aux milieux des mailles du système, qui sont situés au droit des nœuds impairs 1, 3, 5 . . . . de l'autre triangulation. **ad (4), (6):** Les efforts tranchants V_p s'obtiennent en divisant les nombres tabulaires (4) par $4l$; ils servent à calculer les moments relatifs à p, auxquels il faut ajouter les moments provenant de q.
„ 3	47·36	5·9424	6664·3	2… 4	31·27	
„ 5	41·44	6·1496	5280·3	4… 6	24·78	
„ 7	35·52	6·5136	4109·0	6… 8	19·28	
„ 9	29·60	6·9280	3035·0	8…10	14·24	
„ 11	23·68	7·3424	2058·6	10…12	9·659	
„ 13	17·76	8·0048	1262·1	12…14	5·922	
„ 15	11·84	9·4480	662·5	14…16	3·109	

10. Composantes horizontales des efforts supportés par les diagonales.

Efforts tranchants pour la charge mobile		Moments de flexion					Hauteur théorique des montants	Efforts			
		pour la charge mobile			pour la charge permanente	Ensemble		de bandes	Composantes horizontales		
Limite de surcharge	$V_p =$	au nœud	bras de levier	$\mathcal{M}_p =$	$\mathcal{M}_q =$	$\mathcal{M}_{p+q} =$	$H =$	$\frac{\mathcal{M}_{p+q}}{H} =$	$S\cos\gamma =$	Diagonales, Verticale	Maille
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
			m	mt	mt	mt	m	t	t		
1	36·43 × ..	2	2·96	107·84	53·24	161·08	4·66	34·57	= 34·57	Diagon.	0.. 2
3	31·27 × ..	2	2·96	92·56	53·24	145·80	4·66	31·29	= 31·29	Vertic. (—)	0.. 2
		4	8·88	277·7	141·0	418·7	6·32	66·02	.. 34·73	Diagon.	2.. 4
5	24·78 × ..	2	2·96	73·34	53·24	126·58	4·66	27·16	.. 29·96	Vertic. (—)	2.. 4
		4	8·88	220·0	141·0	361·0	6·32	57·12	.. 24·47	Diagon.	4.. 6
		6	14·80	366·7	203·6	570·3	6·99	81·59			
7	19·28 × ..	4	8·88	171·2	141·0	312·2	6·32	49·39	.. 20·56	Vertic. (—)	4.. 6
		6	14·80	285·4	203·6	489·0	6·99	69·95	.. 17·83	Diagon.	6.. 8
		8	20·72	399·6	241·2	640·8	7·30	87·78			
9	14·24 × ..	6	14·80	210·8	203·6	414·4	6·99	59·28	.. 14·17	Vertic. (—)	6.. 8
		8	20·72	295·1	241·2	536·3	7·30	73·45	.. 12·09	Diagon.	8..10
		10	26·64	379·4	253·7	633·1	7·40	85·54			
11	9·659 × ..	8	20·72	200·1	241·2	441·3	7·30	60·41	.. 8·65	Vertic. (—)	8..10
		10	26·64	257·3	253·7	511·0	7·40	69·06	.. 7·06	Diagon.	10..12
		12	32·56	314·5	241·2	555·7	7·30	76·12			
13	5·922 × ..	12	32·56	192·8	241·2	434·0	7·30	59·45	.. 2·28	Diagon.	12..14
		14	38·48	227·9	203·6	431·5	6·99	61·73			
15	3·109 × ..	14	38·48	119·6	203·6	323·2	6·99	46·23	— 2·09	Diagon.	14..16
		16	44·40	138·0	141·0	279·0	6·32	44·14			

11. Travail du fer dans toutes les barres du système.

Diagonales tendues						Montants verticaux comprimés								
Composante horizontale		cos γ	Effort de barre	Surface de section	Travail par cm²	Composante horizontale		tg γ	Effort vertical		Surface de section	Travail par cm²		
Maille	$S\cos\gamma$		S			nœud	$S\cos\gamma$		$S\cos\gamma \times \text{tg}\,\gamma$	dans le montant		sans aboutement	Coefficient d'about.	avec aboutement
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
	t		t	cm²	kg				t	t	cm²	kg		kg
0.. 2	34·57	0·7832	44·14	64·3	686	0	0·00	—	Chge. d'app. =	54·78	201·9	271	—	—
2.. 4	34·73	0·7857	44·20	61·9	714	2	31·29	0·7939	24·84	22·74	52·0	437	1·49	651
4.. 6	24·47	0·6837	35·79	50·9	715	4	29·96	0·7872	23·59	20·79	56·8	366	1·91	699
6.. 8	17·83	0·6461	27·59	41·3	668	6	20·56	1·0676	21·95	19·15	56·8	337	2·13	718
8..10	12·09	0·6300	19·19	29·3	655	8	14·17	1·181	16·74	13·94	52·0	268	2·24	600
10..12	7·06	0·6248	11·30	18·2	620	10	8·65	1·233	10·66	7·86	52·0	151	2·28	344
12..14	2·28	0·6300	3·619	18·2	199	—	—	—	—	—	—	—	—	—

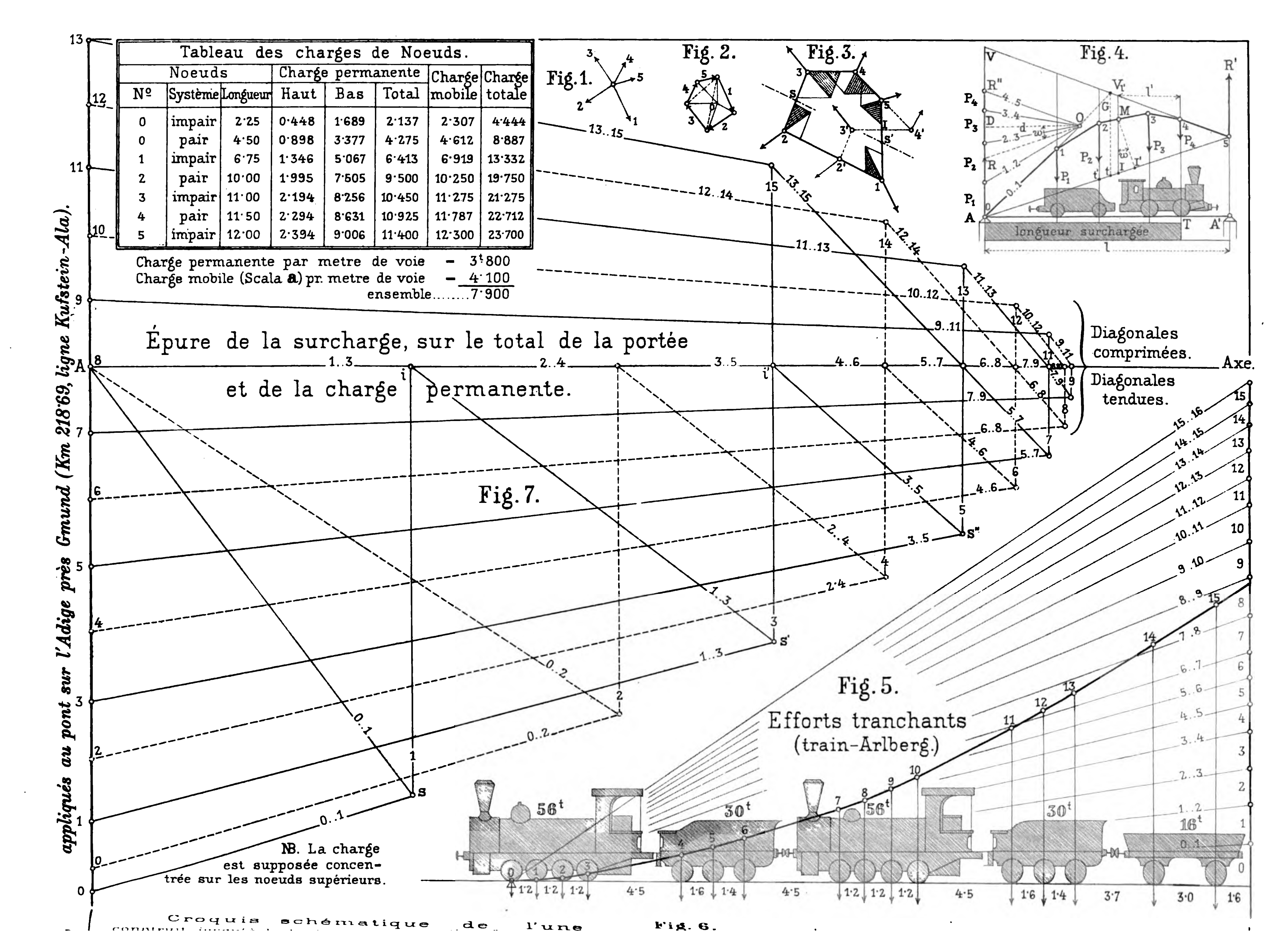


Croquis schématique de l'une des deux maitresses-poutres
Fig. 6.
construit jusqu'à la limite des diagonales à effet contre.
Milieu de la portée.
Sommes jusqu'à l'appui
comprimé
Epure de la surcharge partielle, seule.
Fig. 8.
Efforts des diagonales, d'après l'échelle b de l'ordonnance.
Efforts des montants
Courbe des efforts tranchants
NB. Pour un train de surcharge quelconque on construirait la courbe des efforts tranchants comme dans la Fig. 5. – Les efforts dans les barres du treillis résultent des Fig. 7, 8.
Echelle pour (Fig. 8) la charge mobile, seule.
Echelle pour (Fig. 7) la charge permanente.
Echelle pour (Fig. 7) la surcharge totale.
Echelle pour (Fig. 6) les longueurs.

appliqués au pont sur l'Adige près Gmund (Km 218'69, ligne Kufstein-Ala).

Tableau des charges de Noeuds.							
Noeuds			Charge permanente			Charge mobile	Charge totale
Nº	Système	Longueur	Haut	Bas	Total		
0	impair	2·25	0·448	1·689	2·137	2·307	4·444
0	pair	4·50	0·898	3·377	4·275	4·612	8·887
1	impair	6·75	1·346	5·067	6·413	6·919	13·332
2	pair	10·00	1·995	7·505	9·500	10·250	19·750
3	impair	11·00	2·194	8·256	10·450	11·275	21·275
4	pair	11·50	2·294	8·631	10·925	11·787	22·712
5	impair	12·00	2·394	9·006	11·400	12·300	23·700

Charge permanente par metre de voie – 3t800
Charge mobile (Scala **a**) pr. metre de voie – 4·100
ensemble........7·900



XLVIII. Procédés graphiques.

1. Généralités.

Les méthodes de calculs que nous avons exposées et leur application aux exemples que nous venons de citer, supposent toujours que les efforts maxima cherchés, qui incombent à toutes les pièces, seront calculés au moyen d'opérations numériques, qui donneront l'approximation voulue. En nous en tenant jusqu'ici uniquement à cette façon de procéder nous considérons qu'elle est la seule précise, mais nous devons reconnaître que dans bien des cas on pourra s'aider de constructions graphiques pour obtenir rapidement des résultats approchés et contrôler les calculs numériques.

Les procédés graphiques ont, depuis une vingtaine d'années, pris un grand développement; des auteurs distingués comme Méry, Poncelet, Maxwell, Cullmann, Cremona, Collignon, Mohr, Lippich, Maurice Lévy, Bresse, Winkler, Müller, Seyrig . . . etc. ont puissament contribué par leur travaux et leurs publications à les rendre plus simples et plus pratiques*.

On sait que l'on peut généralement construire à l'aide de la règle et du compas toutes les expressions algébriques qui ne comportant que des additions, soustractions, multiplications, divisions et élevations aux puissances ou bien encore qui ne contiennent que des radicaux dont l'indice est une puissance de deux. Ceci comprend toutes les formules dont on doit faire usage pour les calculs de résistance et les procédés graphiques les plus usités n'exigent même que l'usage de la règle divisée et des équerres. Ces constructions sont d'autant plus heureuses qu'elles sont plus simples et plus claires et à cet égard ce sont les épures de Cullmann et les suites schématiques de polygones des forces imaginées par Crémona, qui constituent les solutions les plus élégantes, puisqu'on n'y trouve presque pas plus de lignes qu'il n'y a d'inconnues cherchées.

Les constructions graphiques ont l'avantage de parler aux yeux, mais malgré tous les perfectionnements, elles laisseront toujours l'ingénieur sous la dépendance des instruments de dessin; les erreurs et l'incertitude qui en résultent seront d'autant plus grandes que les résultats cherchés exigeront des opérations plus longues et moins directes. Si une longueur s'obtient par la résolution graphique d'un seul triangle avec une certaine approximation, la même longueur sera bien moins certaine si elle résulte de la résolution de toute une série de triangles intermédiaires où les écarts se cumulent. Comme autres causes d'erreurs nous signalerons les angles trop aigus, les lignes trop longues . . . etc. C'est pour toutes ces raisons sans doute, que les constructions graphiques se sont moins répandues en France qu'en Autriche et en Allemagne. Les procédés de calcul facilités par les tables numériques que nous publions sont, comme il est facile de le reconnaître, à la fois bien plus exacts et plus expéditifs que les méthodes graphiques**. Il nous a toutefois paru intéressant de donner ici les constructions graphiques les plus élégantes et les plus avantageuses, qui peuvent encore concourir, dans certaines conditions, avec les procédés numériques***, lorsqu'il s'agit de ponts à bandes courbes, pour lesquels les calculs sont les plus laborieux. Nous donnons sur la planche annexe l'exemple d'un pont de ce genre, avec 100^m de portée récemment construit en Autriche conformément à l'ordonnance, et dont la résistance se trouve vérifiée par les procédés graphiques; nous rappelons préalablement ce qui suit.

---

* 1. Méry. Ann. des P. et. Ch. 1840. Etude de la stabilité voutes, tracé des courbes de pression.
2. Poncelet. Mémorial de l'officier du génie, 1840. Etude de la poussée des terres etc.
3. J. Clark Maxwell. Engineer. Vol. 24. p. 402. On the application of the theory of reciprocal polar figures to the diagrams of forces. Philos. Magazine. Avril 1864.
4. L. Cremona. Le figure reciproche nella statica grafica. Milano. J. Giugno, 1872.
5. C. Cullmann. Die graphische Statik, Zürich 1864. — (2me édition 1875 parue à moitié.) Traduction française de Glasser, Jacquier et Valat. Dunod, 1880.
6. Mohr. Theorie der continuirlichen Träger. Zeitschr. des hannovr. Arch.- u. I.-V. 1860, 1868.
7. Maurice Lévy. La statique graphique et ses applications. Paris 1874. — 2me édition 1886.
8. F. Lippich. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Wien, Waldheim, 1871.
9. Dr. E. Winkler. Vorträge über Brückenbau, Wien, C. Gerold's Sohn, 1875. nouv. édition 1886.
10. Bresse. Note sur la détermination graphique des moments fléchissants qui se produisent dans une poutre à deux appuis simples pendant le passage d'un convoi. Ann. des P. et Ch. 1877. 2me sem (avec une variante du polygone funiculaire de Cullmann).
11. Collignon. Note sur la détermination graphique des moments fléchissants dans les pièces chargées de poids discontinus. Ann. des P. et Ch. Juillet. 1885.
12. Müller-Breslau. Die graphische Statik der Bauconstructionen. Leipzig, Baumgärtner, 1887. Edition française: Müller et Seyrig. Éléments de la statique graphique. Paris, 1886.

** Ceci suppose que pour les calculs de détail on se servira des règles à calcul logarithmiques connues qui se fabriquent à Paris et qui dans tous les cas offrent toujours plus d'exactitude comme instruments, que la règle et le crayon.

*** Il y a des graphiqueurs qui pour toute proportion que l'on expédie en France par un seul coup de règle à calcul, ont besoin de la planchette et du crayon, et qui voudraient faire de la statique graphique une science à part.

2. Polygone des forces et polygone funiculaire.

Trois forces qui se font équilibre en un point matériel doivent comme on sait, satisfaire au parallélogramme des forces ou au triangle des forces, ce dernier pouvant s'obtenir en supposant que le point matériel se meuve successivement dans la direction des trois forces sur des longueurs proportionnelles à leurs intensités. Cette proposition se généralise immédiatement pour un nombre quelconque de forces (fig. 1) supposées en équilibre en un point matériel. On composera à cet effet (fig. 2) les forces N° 1 et N° 2 en une résultante qui est la ligne ponctuée joignant l'origine de la première à l'extremité de la seconde; on composera ensuite cette résultante et la force N° 3 en une nouvelle résultante qui est la ligne ponctuée joignant à l'extrémité de la force N° 3 l'origine de la résultante précédente c'est à dire l'origine de la force N° 1, et ainsi de suite ...; la dernière résultante obtenue de cette façon, après avoir employé toutes les forces qui se font équilibre, devra être nulle et l'on aura rangé ainsi toutes ces forces en un polygone fermé. Il en résulte ce théorème:

Pourqu'un nombre quelconque de forces appliquées à un point matériel soient en équilibre, il faut et il suffit qu'en faisant mouvoir le point matériel successivement dans la direction de toutes ces forces, sur des longueurs proportionelles à leurs intensités, on revienne au point de départ, ou en d'autres termes mieux connus: il faut et il suffit qu'en construisant le polygone des forces à partir d'un point quelconque, on obtienne un polygone fermé.

Remarquons qu'en construisant ce polygone, on pourra prendre les forces dans un ordre quelconque; s'il y en a n c'est donc $1 . 2 . 3 \ldots . n$ polygones (nombre de permutations) que l'on pourrait former ainsi. Mais pour un seul et même polygone on aura n permutations circulaires des numéros 1, 2 ... et n qui lui correspondent dans un sens, suivant que l'on donne successivement à chacune des n forces le N° 1, et on en aura autant en faisant le numérotage en sens inverse.

Donc enfin on aura généralement*:

(21) . . . . Nombre de polygones de n forces $= (1 . 2 . 3 \ldots . n) : 2n$

Chacun de ces polygones en nombre limité, convient également bien comme expression graphique de l'équilibre. Inversement, étant données $(n - 1)$ forces agissant sur un point matériel, en construisant avec elles un polygone des forces qui ne se ferme pas, on obtient en le fermant la n^{me} force qu'il faudrait ajouter pour établir l'équilibre et qui est égale et contraire à la résultante des $(n - 1)$ forces données. Le polygone donne donc immédiatement la résultante d'un système de forces appliquées à un point**.

Considérons maintenant (fig. 2) l'un quelconque des polygones des forces exprimant l'équilibre; joignons un point O quelconque du plan que nous appellerons **pôle**, aux sommets de ce polygone et construisons, au moyen de droites parallèles à ces **rayons**, un **polygone funiculaire** quelconque fermé (fig. 3). Supposons qu'on applique à chaque sommet celle des forces qui est comprise entre le couple de rayons qui en dérivent dans le polygone des forces (fig. 2). Le polygone funiculaire (fig. 3) sera en équilibre, car en construisant à chaque sommet entre les tensions funiculaires et la force appliquée le triangle des forces on obtiendra évidemment une figure fermée qui n'est autre que le triangle formé dans le polygone des forces (fig. 2) par la force de même numéro et les deux rayons qui la comprennent.

Les figures font voir immédiatement les relations réciproques nombreuses qui existent entre le polygone des forces et le polygone funiculaire. Pour un seul et même polygone des forces et un pôle choisi à volonté, on pourra construire une infinité de polygones funiculaires puisque les côtés de ces derniers peuvent être déplacés d'une manière quelconque parallèlement à eux-mêmes. Ces translations modifient seulement la forme de ces polygones; elles peuvent faire passer les efforts funiculaires de la tension à la compression ou inversement, mais elles n'altèrent en rien les propriétés caractéristiques du polygone funiculaire en équilibre. Ainsi en remplaçant (fig. 3) le contour 2 3 4 par le contour parallèle 2' 3' 4' on obtient le polygone équivalent 1 2' 3' 4' 5, dans lequel le côté 4' 5 est comprimé tandis que dans le polygone primitif 1 2 3 4 5 tous les côtés sont tendus.

---

* Ceci donne généralement $3 . 4 . 5 \ldots (n - 1)$ lorsque $n > 3$ et l'on aura

pour $n =$	3	4	5	6	7	8	9	10	......
polygones	1	3	12	60	360	2520	20160	201600	.....

Ces divers polygones présentent des angles saillants ou rentrants et des côtés qui se coupent sur leur longueur même ou sur leurs prolongements; ceci n'influe en rien sur leurs propriétés générales.

** Si parmi n forces en équilibre on en connaît $(n - 2)$ ainsi que les directions des deux dernières, celles-ci s'obtiendront immédiatement en formant le polygone au moyen de deux côtés qui leurs sont parallèles.

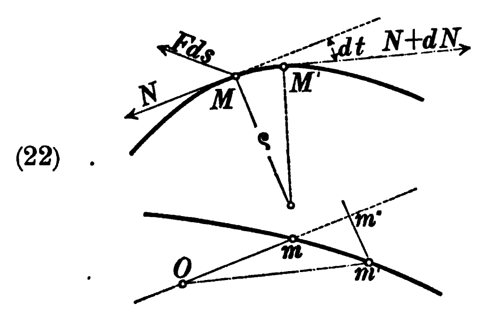
Si inversement un polygone funiculaire quelconque en équilibre (fig. 3) est donné, en construisant pour chaque sommet le triangle des forces et en juxtaposant ensuite (fig. 2) tous ces triangles de façon à faire coïncider les côtés funiculaires égaux, on obtiendra immédiatement le polygone des forces avec son pôle, et avec les rayons partant de ce point qui représentent les tensions (ou compressions) funiculaires.

En résumé pour un polygone fermé des forces et un pôle donnés, on pourra construire une infinité de polygones funiculaires à côtés tendus ou comprimés qui sont en équilibre, tandis que l'un quelconque de ces polygones étant donné, on n'en peut déduire qu'un seul polygone des forces avec son pôle.

Le polygone funiculaire ouvert qu'on avait seul considéré pendant longtemps (ponts suspendus) n'est qu'un cas particulier du polygone fermé dont nous venons de parler. Supposons en effet que l'on coupe le polygone funiculaire (fig. 3) suivant SS' en enlevant la partie inférieure avec les forces 1 et 2 et appliquant aux points SS' les tensions funiculaires pour maintenir l'équilibre. Le polygone ouvert ainsi obtenu se transformera immédiatement en un polygone fermé si nous supposons que l'on joigne SS' à l'aide d'un cable à tension nulle. Le polygone des forces qui correspond au nouveau polygone funiculaire fermé, s'obtiendra (fig. 2) en supprimant les forces 1 et 2 et leur rayon commun; les 2 rayons adjacents ferment alors ce nouveau polygone des forces. On voit ainsi que le polygone funiculaire ouvert peut être toujours considéré comme un polygone funiculaire fermé avec un cable à tension nulle et avec un polygone des forces dont l'un des sommets est le pôle.

On a quelques fois à considérer aussi le cas où les forces appliquées au polygone funiculaire deviennent infiniment petites (ou différentielles). On a dans ce cas une courbe funiculaire fermée en équilibre sous l'action de forces distribuées d'une manière continue sur sa longueur; les forces élémentaires appliquées peuvent du reste être orientées parallèlement suivant deux directions opposées ou être orientées suivant une direction variant d'une manière continue de 0 à 2π (réservoirs et chaudières) tout le long de la courbe, ou être quelconques.

Le polygone des forces devient alors généralement une courbe des forces fermée, dans laquelle les éléments différentiels d'un arc compris entre deux rayons quelconques partant du pôle, représentent toutes les forces appliquées à l'arc correspondant de la courbe funiculaire, supposées juxtaposées bout à bout en longueur. Les deux rayons polaires représentent en grandeur et direction les tensions (ou compressions) funiculaires qui doivent être appliquées aux deux extrémités de l'arc funiculaire considéré pour maintenir l'équilibre. Tout ce que nous avons dit pour les polygones se répétera ici pour les courbes considérées comme polygones à éléments infiniments petits; il y aura lieu seulement de distinguer le cas des courbes fermées et celui des courbes ouvertes qui se présente le plus souvent.

(22) . 

Considérons (22) un élément MM' infiniment petit de longueur ds dans une semblable courbe funiculaire, cet élément ou, ce qui revient au même, sa tangente en M faisant un angle t avec un axe fixe. Soient $x\,y$ les coordonnées de M dans un système d'axes rectangulaires, N et $N+dN$ les tensions (ou compressions) funiculaires appliquées en M et M', Fds la force appliquée à l'élément MM' (en un point quelconque pour lequel nous prendrons le point M) $X\,ds$ et $Y\,ds$ ses composantes parallèlement aux axes coordonnées. On devra avoir pour l'équilibre:

(23) . . . $$X\,ds = \frac{d}{ds}\left(N\frac{dx}{ds}\right)ds \qquad Y\,ds = \frac{d}{ds}\left(N\frac{dy}{ds}\right)ds$$

Ces équations sont nécessaires et suffisantes pour l'équilibre; en les intégrant et éliminant N on obtiendrait l'équation de la courbe funiculaire. En considérant le polygone des forces où Om, Om' sont les tensions funiculaires et où $m\,m' = Fds$ et $m\,m'' = dN$ on obtient pour les équations d'équilibre d'autres formes souvent commodes. Désignons à cet effet par $F_t\,ds$ et $F_n\,ds$ les composantes tangentielle et normale de Fds; on aura en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur.

(24) . $$F_t\,ds = m\,m'' = d\,N \qquad F_t = \frac{d\,N}{ds} \qquad F_n\,ds = m'\,m'' = N\,dt \qquad F_n = N\frac{dt}{ds} = \frac{N}{\rho}$$

en désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe funiculaire*.

* „La statique graphique“ de M. Maurice Lévy déjà citée, contient au premier volume p. 506 (édition de 1886) des développements théoriques plus étendus sur cette question; nous y renvoyons le lecteur.

Le cas des forces parallèles verticales se déduit de suite du cas général que nous venons d'étudier; on a: $X = o$, $Y = F$, la première équation (23) dont le premier membre est nul s'intègre de suite et il en résulte que la seconde se simplifie comme suit:

$$(25) \quad . \ . \ . \quad N\frac{dx}{ds} = \text{const.} = \mathscr{H} \qquad N\frac{dy}{ds} = N\frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds} = \mathscr{H}\frac{dy}{dx} \qquad F = \mathscr{H}\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Si au lieu de F qui est la force par unité de longueur de la courbe on considére la charge p_x par unité de longueur de l'abscisse et pour l'abscisse x on aura:

$$(26) \quad . \ . \ . \quad F ds = p_x dx \qquad \frac{d.}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{F}{\mathscr{H}} = \frac{p_x}{\mathscr{H}}\frac{dx}{ds} \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{p_x}{\mathscr{H}}$$

C'est l'équation connue des cables funiculaires qui, lorsque p_x est constant, donne la parabole des ponts suspendus; nous y revenons au N° LX à propos de la théorie de Mohr.

Les applications du polygone ou de la courbe funiculaire en équilibre, sont aussi nombreuses que fécondes. La résultante d'un nombre ou d'une suite quelconque de forces, passe par le point d'intersection des côtés ou tangentes funiculaires prolongés ou non qui les comprennent; la résultante des forces complémentaires passe par le même point . . . etc.* Dans le cas de forces parallèles qui va nous occuper plus spécialement, il y a toujours des côtés tendus et des côtés comprimés.

3. Le polygone funiculaire considéré comme poutre de pont et comme polygone représentatif des moments de flexion.

Supposons que dans la théorie qui précède les forces en équilibre (fig. 1) concourent en un point éloigné en faisant entre elles des angles très-aigus et, se divisant, pour qu'il y ait équilibre, en deux groupes distincts suivant qu'elles sont dirigées vers le point de concours dans un sens ou qu'elles en reviennent dans le sens à peu-près inverse. Le polygone des forces (fig. 2) aura alors une forme très-allongée sa largeur se réduisant d'autant plus que le point de concours des forces s'éloigne d'avantage. Si l'on suppose, pour fixer les idées, que le point de concours passe à l'infini tandis que toutes les forces du faisceau restent appliquées à des points fixes et conservent des intensités constantes, on aura à la limite un système de forces parallèles en équilibre, et le polygone des forces se réduira à une portion de ligne droite que l'on devra parcourir d'abord dans un sens, puis en sens inverse, pour faire le tour du polygone idéal qui s'y trouve représenté. C'est là le cas ordinaire à considérer dans les calculs de ponts où les charges et poids sont dirigés verticalement du haut en bas et font équilibre aux réactions des appuis dirigées en sens inverse.

Considérons (fig. 4) la travée indépendante d'un pont $A\,A'$, supportant des charges isolées P_1 P_2 P_3 . . . etc. appliquées d'une manière quelconque. Portons ces charges bout à bout verticalement, par exemple au-dessus de l'appui A et joignons un point quelconque O du plan à tous les points obtenus qui sont les sommets de la fig. 2. On aura construit ainsi la moitié $R''\,A$ du polygone des forces qui provient des charges P_1 P_2 . . . etc. c'est-à-dire des forces descendantes. Pour avoir la seconde moitié $A\,R''$ qui correspond aux forces ascendantes c. a. d. aux réactions des appuis R et R' dont nous connaissons seulement la somme $A\,R''$, construisons le polygone funiculaire 0 1 2 3 . . . 5 ayant ses côtés parallèles aux rayons qui partent du pôle O et ses sommets situés sur les forces parallèles en équilibre; fermons ensuite ce polygone avec la ligne (5 . . 0) et menons parallèlement à cette droite le rayon $O\,R$. On aura déterminé ainsi le point R cherché tel que les longueurs $A\,R$ et $R\,R''$ représentent les deux réactions cherchées des appuis, ainsi que le démontre la théorie qui précède.

Il résulte immédiatement de cette construction, que l'effort tranchant dans l'intervalle de deux charges quelconque P_2 et P_3 sera représenté par la distance du point R au sommet du polygone des forces qui se trouve sur le rayon 2 . . 3 correspondant (à compter positivement dans un sens et négativement dans l'autre).

Menons maintenant une verticale $M\,I$ quelconque dont l'abscisse est x, à travers le polygone funiculaire; abaissons du point M la perpendiculaire $M\,I'$ sur la droite (0 . . 5), du pôle O la perpendiculaire $O\,D$ sur $A\,R''$ et posons:

$$(27) \quad . \ . \ . \quad \text{Angle } I\,M\,I' = \omega = \text{Angle } R\,O\,D \qquad O\,D = d = \text{distance polaire.}$$

---

* Ainsi dans le polygone 1 2' 3' 4' 5 le point I où se coupent les côtés (1 . . 5) et (3' . . 4') se trouve sur la résultante des forces 1 2' 3' ou sur celle des forces 4' 5. C'est une généralisation du principe déjà utilisé il y a une quarantaine d'années par Méry pour la construction des courbes de pressions dans les voûtes.

Le polygone funiculaire fermé peut être considéré comme une véritable poutre de pont portant toutes les charges mais n'ayant que la bande polygonale supérieure comprimée et la bande rectiligne inférieure tendue (sans croisillons).

Si l'on désigne par $\mathcal{M}_x$ le moment de flexion sur la section MI, évalué à la manière ordinaire, et, pouvant avec l'effort tranchant, remplacer l'une des deux moitiés du polygone supposée enlevée, il faudra pour l'équilibre que l'on ait par rapport au point M:

(28) . . . . $\mathcal{M}_x = (MI') \times$ tension $(0\,..\,5) = MI \times \cos w \times OR = MI \times d$

Le moment de flexion $\mathcal{M}_x$ varie donc proportionnellement à MI ou en d'autres termes le polygone funiculaire est en même temps le polygone représentatif des moments de flexion* à une échelle qui dépend de la distance polaire d et que l'on pourra par conséquent choisir à volonté tout d'abord. Cette grandeur d représente en même temps la composante horizontale constante des efforts de bandes dans la conception du polygone funiculaire considéré comme poutre de pont.

Pour étudier maintenant comment varient les effets de charge du train lorsqu'on le déplace sur la travée AA' ou ce qui revient au même lorsqu'on déplace cette dernière, le train restant immobile, il faut supposer que les côtés (0 . . 1) et (4 . . 5) du polygone funiculaire soient prolongés** indéfiniment et que toute la figure restant invariable la corde (0 . . 5) seule se déplace de façon à avoir toujours ses extrémités sur le polygone et à conserver une projection horizontale constante $= l$. Dans cette hypothèse le rayon OR variera seul dans le polygone des forces; pour chaque position de la corde (0 . . 5) le point R correspondant donne les efforts tranchants tandis que le polygone funiculaire représente les moments de flexion.

Occupons nous d'abord de ces derniers. On construira sur papier millimètre un polygone funiculaire ouvert suffisamment bombé*** embrassant tout le train de surcharge même si celui-ci est bien plus long que la portée du pont dont il s'agit spécialement. On transportera ensuite la portée l tracée sur une bande de papier en la tenant horizontalement appuyée en A sur le polygone, et en s'aidant en A' du canevas millimétrique pour avoir l'autre extrémité de la corde tendue. On déplacera ensuite ainsi cette dernière jusqu'à ce que l'on ait pour les sommets du polygone correspondant aux essieux lourds, les plus grandes ordonnées possibles. En tenant compte des propriétés connues des essieux formant force médiane et de la condition à remplir pour réaliser le maximum maximorum (voir notre N° *XVI*) on pourra ainsi trouver très-rapidement la position que donne le maximum puisque l'on a à chaque instant sur le polygone des forces AR'' la force médiane de la partie du train chargeant le pont, et sur le polygone funiculaire la verticale du centre de gravité des charges†. Cette façon de procéder suffit en pratique. On peut toutefois rechercher la courbe enveloppe de la corde mobile. Tant que les extrémités de cette corde restent sur deux côtés du polygone la courbe est une parabole à axe vertical qui leur est tangente comme on le démontre facilement. La courbe enveloppe totale est donc une ligne brisée composée d'arcs de parabole à axes verticaux. La position de la corde mobile qui donne le maximum pour un essieu P_2 qui peut être force médiane proportionnelle, s'obtient en menant à la parabole correspondante, la tangente dont le contact est sur P_2. Cette construction très-subtile†† n'a qu'une valeur douteuse en pratique.

Remarquons que le polygone funiculaire une fois construit pour un train de surcharge donné on pourra s'en servir pour obtenir à une même échelle les moments de flexion sur des portées de ponts quelconques.

Si l'on veut ensuite (fig. 4) avoir un polygone des moments à corde horizontale AA', il suffit de reporter sur cette droite, les ordonnées mesurées sur la corde oblique. Cela revient à déformer le polygone verticalement de manière que la corde inclinée arrive en AA' ou de manière que le pôle O descende sur l'horizontale du point R.

---

* En reportant les hauteurs MI mesurées aux sommets 1, 2, 3 . . . . sur la ligne des appuis AA' en obtient immédiatement ce polygone dans sa disposition usuelle.

** Le point de concours G de ces droites donne la verticale passant par le centre de gravité du train.

*** On prendra pour d une valeur assez petite donnant une échelle simple convenable.

† La force médiane est celle ou tombe le milieu de la partie de la longueur AR'' qui correspond à l'ensemble des essieux chargeant le pont et la verticale du centre de gravité de ces essieux passe par le point de concours G des côtés du polygone funiculaire qui les comprennent.

†† Menant à droite et à gauche de G des verticales qui en sont éloignées de $^1/_2\, l$ on obtient les points A et 5 et la corde $A\,..\,5$ que la verticale de G divise au point t en parties égales. P_2 rencontrant $A\,..\,5$ en t' on mène par le milieu de $t\,t'$ une droite telle que ce point soit le milieu de la corde nouvelle, en opérant comme ci-dessus pour la première corde $A\,..\,5$. La corde ainsi obtenue donnera la solution cherchée.

4. Le polygone funiculaire considéré comme courbe représentative des efforts tranchants maxima.

Les efforts tranchants à lire (fig. 4) sur le polygone des forces à partir du point R n'ont pas d'application pratique, puisque les efforts maxima dont on doit tenir compte s'obtiennent en surchargeant une longueur qui varie avec la section que l'on considère, en sorte qu'il faudrait alors renouveler la construction sans cesse. On démontre que le polygone funiculaire déjà construit pour les moments de flexion, constitue lui même à une certaine échelle le contour représentatif des efforts tranchants maxima cherchés, que l'on obtient ainsi tout d'un coup et c'est là une des solutions les plus élégantes de la statique graphique.

Cherchons l'effort tranchant maximum sur la section T pour laquelle il faudra surcharger la longueur $A\,T$ c. a. d. placer le premier essieu du train en T. L'effort cherché n'est autre que la réaction d'appui R' provoquée en A' puisque par hypothèse la longueur $T\,A'$ est libre de poids et charges. Prolongeons le côté 5 . 4 du polygone funiculaire jusqu'au point V où il rencontre la verticale de l'appui A. Les triangles semblables $A\,5\,V$ et $R\,O\,R''$ donnent:

(29) . . . . . $\frac{A\,V}{l} = \frac{R'}{d}$ d'où par conséquent . . . $R' = \frac{d}{l} \times A\,V$*

Déplaçons comme précédemment la corde (A .. 5) de façon que sa projection horizontale reste égale à l et considérons d'une manière générale la position pour laquelle l'appui A arrive à un point quelconque M. Désignons par l' la longueur qui est alors surchargée et par $V_{l'}$ la distance verticale du point M à la droite 5 .. V, on aura alors comme pour la position ci-dessus $R' = (d : l) \times V_{l'}$ ou bien encore $V_{l'} = (l : d) \times R'$

Par conséquent à une échelle convenablement choisie, $V_{l'}$ est l'ordonnée représentative de l'effort tranchant cherché en T pour la longueur surchargée l' comptée à partir de l'appui de gauche alors en M. Si maintenant on déplace la corde A .. 5 de manière que l'appui de droite arrive au point 4, le polygone funiculaire, suffisamment prolongé sur la gauche, sera par rapport à la droite 5 . 4 . V également prolongée, la courbe représentative des efforts tranchants maxima pour des longueurs surchargées l' comptées à partir de l'appui de gauche et variant de o à l. Il faut remarquer seulement que les abscisses sont renversées par rapport au train; ainsi pour l'abscisse $A'\,T$ il faudra prendre $l' = l - A'\,T$ pour avoir l'ordonnée cherchée. En pratique on prend ici toujours $d = l$ de façon à n'avoir aucune réduction et on construit le polygone, comme nous le faisons voir dans la fig. 5 pour le train-Arlberg jusqu'à 35^m de portée. Cette figure ainsi construite pour une certaine portée l pourra être utilisée pour une portée moindre l_1 à condition que l'on tienne compte de la réduction (29) que nous avons signalée. Si l'on désigne par V et V_1 les efforts tranchants mesurés à une même échelle sur les dessins dans les deux cas on aura généralement $V \,.\, l = V_1\,l_1$. C'est la relation connue que nous citons en note aux N^{os} *XVII* page 45 et *XXVIII* page 82.

5. Application pratique des procédés graphiques. Cas des surcharges uniformément réparties équivalentes.

Les solutions élégantes que nous venons de citer sont connues depuis plus de vingt ans; ce qui les caractérise c'est qu'elles s'appliquent directement au train de surcharge lui-même presque avec plus de facilité que si l'on se servait de surcharges uniformes équivalentes. En pratique on devra toutefois construire toujours au moins deux polygones funiculaires (fig. 4 et 5) pour utiliser des échelles convenables et à mesure que la portée du pont augmente ces procédés deviennent de plus en plus pénibles et exigent le contrôle d'opérations numériques au moins pour certains points plus importants. Si au lieu d'un seul train de surcharge ce sont plusieurs trains dont on doit tenir compte, les difficultés augmentent encore, et l'on est de plus en plus amené à en revenir à la considération des charges uniformes équivalentes et aux procédés numériques.

Pour ces raisons purement pratiques, certains ingénieurs en Autriche calculaient avant 1887 les moments à l'aide de la surcharge uniforme équivalente** et les efforts tranchants à

* Il résulte de là que la longueur $A\,V$ représente le moment statique m_A de toutes les charges $P_1\,P_2$ . . . etc. par rapport à l'appui A car $R' = m_A : l$ ce qui donne $m_A = (A\,V) \times d$; donc $A\,V$ représente m_A à la même échelle à laquelle les ordonnées du polygone funiculaire représentent les moments de flexion.

** Pour la conception d'une charge uniforme de p par m le polygone représentatif de la fig. 4 se réduit à la parabole connue à axe vertical ayant sa plus grande ordonnée $^1/_8\,pl^2$ au milieu de la portée. L'hypothèse de surcharges uniformes et partielles de p par m s'étendant d'un appui à la section considérée, transforme le polygone représentatif de la fig. 5 en une parabole à axe vertical ayant son sommet sur un appui et sa plus grande ordonnée $^1/_2\,pl$ sur l'autre.

l'aide du procédé graphique de la fig. 5, qui ne donne pas lieu aux erreurs que nous signalons aux N°s *XVII* et *XXII* pour l'application des surcharges uniformes et partielles usitées antérieurement. Depuis la publication de l'ordonnance du 15 Sept. 1887 qui règle complètement cette question, au moyen des surcharges uniformes de l'échelle b, on construit le contour représentatif des efforts tranchants maxima au moyen d'un nombre suffisant de ses ordonnées, qui sont les quotients des moments tournants correspondants (calculés une fois pour toutes, Tab. V de notre Tome II) par la portée. Ce dernier procédé, surtout lorsqu'on se sert de la règle à calcul usuelle, est le plus sûr et le plus rapide, c'est celui que l'on trouve appliqué dans la fig. 8 dont nous parlons plus loin.

Remarquons du reste que l'application des procédés graphiques est entrée depuis quelques temps dans une voie nouvelle. On tend à abandonner la conception des moments de flexion plus spéciale aux calculs numériques et à rechercher directement les efforts qui incombent à toutes les pièces, par la seule considération de l'équilibre sur les nœuds. Les ponts modernes à larges mailles et à bandes courbes, calculés comme systèmes articulés ont surtout mis en évidence les avantages de cette façon de procéder, que les figures schématiques de Cremona ont rendue aussi générale qu'élégante; l'application suivante en pourra donner une idée.

6. Pont à voie en dessous avec double triangulation à diagonales tendues et bandes supérieures courbes, récemment construit au *km* 218·69 de la ligne Kufstein—Ala sur l'Adige près Gmund, avec 100^m de portée.

La fig. 6 représente le croquis schématique de l'une des maîtresses-poutres; on y a inscrit les cotes de dimensions et les inclinaisons en caractères fins* et les efforts maxima trouvés, en caractères pleins. Ces efforts sont ceux qui résultent des charges verticales, abstraction faite des effets du vent, dont on devra tenir compte séparément. Nous citons dans un petit tableau annexé à la fig. 7 les hypothèses admises pour la charge permanente et la charge mobile ainsi que les charges de nœuds qui en résultent; nous supposons pour simplifier que dans chaque triangulation simple, les charges concentrées en un nœud sont les charges comprises entre les points du système où se trouvent les nœuds voisins de l'autre triangulation** (à la seule exception de la maille 0 . . 1 dont une moitié concerne le nœud N° 1 tandis que l'autre concerne l'appui *A*).

Dans les trois fig. 6, 7 et 8 on a tracé en traits pleins tout ce qui concerne la triangulation aux nœuds impairs et en traits ponctués tout ce qui concerne la triangulation aux nœuds pairs. Contrairement à l'usage établi de traiter séparément les deux poutres théoriques à triangulation simple, nous représentons dans un même ensemble les deux figures, car on peut ainsi non seulement simplifier le travail mais aussi obtenir des épures parlant mieux aux yeux (fig. 7 et 8) puisque toutes les lignes représentatives des efforts cherchés y sont orientées comme les pièces du croquis (fig. 6) auxquelles elles correspondent et forment des suites régulièrement espacées, donnant une image claire de l'ensemble.

L'épure (fig. 7) concerne la surcharge sur le total de la portée augmentée de la charge permanente, de façon à pouvoir servir pour la vérification des bandes. On y suppose toutes les charges concentrées dans les nœuds supérieurs (bande courbe); il en résulte une évaluation des efforts qui est exacte pour toutes les pièces hormis les montants verticaux comprimés; pour ceux-ci les efforts trouvés devront être diminués des charges concentrées dans les nœuds inférieurs. La même épure sert avec une échelle plus grande, à évaluer les effets de la charge permanente seule, effets dont on a besoin pour le calcul des barres du treillis. La justification théorique de l'épure résulte de l'équilibre sur les nœuds ainsi que nous allons le démontrer pour la poutre aux nœuds impairs, par exemple.

Sur la verticale du point *A* (fig. 7) on a porté à partir de *A* vers le bas les efforts tranchants qui agissent dans les mailles (0 . . 1), (1 . . 3), (3 . . 5) . . . etc. (fig. 6) et dont les extrémités portent les numéros 0, 1, 3 . . . etc. (fig. 7). Cette construction s'effectue directement en prenant sur la verticale les longueurs 0 . . 1, 1 . . 3, 3 . . 5, . . . etc. égales aux charges concentrées dans les nœuds 1, 3, 5 . . . etc. de la bande courbe. L'équilibre sur le nœud N° 0 (fig. 6) fournit (fig. 7) le triangle des forces *A s o* de façon que les longueurs *A s* et *s o* représentent les efforts qui incombant à la diagonale et à la bande supérieure de la maille (0 . . 1). D'après l'équilibre des trois pièces agissant sur le nœud inférieur N° 1, on construit le triangle des forces

* Ces indications trop complètes ici, permettraient d'appliquer facilement les procédés numériques à titre de contrôle. Pour les procédés graphiques il suffit d'avoir construit exactement la figure à l'échelle.

** Plus souvent on concentre en un nœud d'une triangulation les charges comprises entre les milieu des mailles adjacentes de cette même triangulation, ce qui diffère peu ou ne diffère pas de l'hypothèse du texte.

$A s i$ qui est rectangle, de façon que $s i$ et $A i$ représentent les efforts supportés par le montant N° 1 et la bande inférieure (1 . . 3). L'équilibre sur le nœud supérieur N° 1 entre les 4 pièces de construction qui y concourent et la charge qui y est appliquée, donne le polygone des forces $1\ o\ s\ i\ s'$ dans lequel on connaît les 4 premiers sommets et la direction des deux côtés qui concourent au dernier s'; on peut donc tracer celui-ci, de façon que les longueurs $i \, .. \, s'$ et $1 \, .. \, s'$ représentent les efforts supportés par la diagonale et la bande supérieure de la maille (1 . . 3). L'équilibre des quatre pièces agissant sur le nœud inférieur N° 3 donne ensuite le polygone des forces $A i s' i'$ dont on connaît les trois premiers sommets et la direction des côtés qui concourent au dernier i', on aura donc $s' \, .. \, i'$ et $A \, .. \, i'$ qui représentent les efforts revenant au montant N° 3 et à la bande inférieure (3 . . 5)*. On obtiendra ensuite s'' en menant les droites $i' \, .. \, s''$ et $3 \, .. \, s''$ parallèles à la diagonale et à la bande supérieure de la maille (3 . . 5) . . . etc.

En prolongeant ainsi cette construction vers la droite on arrive au montant N° 9 occupant le milieu de la portée, pour lequel le point A se trouve sur l'axe vertical des efforts tranchants, au milieu de la longueur 7 . . 9 qui représente la charge du nœud supérieur N° 9. Il en résulte que la diagonale (9 . . 11) est comprimée et la ligne représentative du montant tendu N° 11 vient se placer exactement au-dessus de celle du montant N° 7, tous deux étant à distances égales du milieu de la portée du pont. On reconnaît de même que la ligne représentative de la diagonale comprimée (11 . . 13) forme le prolongement de la ligne représentative de la diagonale tendue (7 . . 9) et ainsi de suite . . . . . Les plus grands efforts sont provoqués dans la bande supérieure (7 . . 9) et la bande inférieure (9 . . 11)**; cette dernière n'a plus d'importance pratique à cause de la présence de la diagonale à effet contraire (9 . . 11).

Considérons maintenant (fig. 8) l'épure de la surcharge partielle seule. Cette épure n'est pas comme celle que nous venons d'étudier une suite de figures dépendant chacune des précédentes mais bien un ensemble de figures construites chacune séparément. Supposons par exemple qu'il s'agisse de trouver les efforts incombant aux deux barres de la poutre aux nœuds impairs, qui arrivent (fig. 6) au nœud supérieur N° 5; il faudra alors admettre que la charge mobile uniformément repartie s'étende du montant N° 6 à l'appui de droite ou ce que revient au même que les nœuds inférieurs N° 7, 9, 11 . . . etc. portent la charge mobile seule, tandis que toute la partie de gauche de la poutre se trouve libre de poids et charges. On sait que pour calculer le montant vertical N° 5 il faudra considérer une section faite à travers la poutre suivant $s s'$, tandis que pour calculer la diagonale (5 . . 7) il faudra considérer une section analogue faite suivant $s s''$; la conception de ces sections qui nous a servi dans les calculs numériques, va nous servir encore dans les procédés graphiques.

On commence par construire avant tout (fig. 8) la courbe des efforts tranchants correspondant à toutes les sections du pont; ce sont les quotients des moments tournants de notre Tab. V du tome II par la portée, puisque nous construisons d'après l'ordonnance autrichienne; ce seraient les ordonnées obtenues comme dans la fig. 5 si l'on construisait d'après un train de surcharge quelconque. On mène ensuite en un point I choisi convenablement vers le milieu du dessin et figurant comme o r i g i n e, un axe vertical que nous appellerons l'a x e d e s m o n t a n t s; cet axe sépare sur la gauche ce qui concerne les montants et sur le droite ce qui concerne les diagonales.

Considérons d'abord (fig. 6) la section suivant $s s'$; supposons la partie de droite de la poutre enlevée et remplacée par les efforts incombant aux trois pièces coupées qui sont la bande supérieure (3 . .5) le montant N° 5 et la bande inférieure (5 . . 7). Ces trois efforts et la réaction d'appui appliquée en A forment un système de 4 forces qui maintiennent en équilibre la partie de poutre restée à gauche de $s s'$ et considérée comme corps solide libre. On peut supposer les deux premières forces appliquées au nœud supérieur N° 5 et les deux dernières au point A. Il en résulte que les deux premières forces ont une résultante dirigée du nœud supérieur N° 5 vers le point A, et que les deux dernières forces ont une résultante égale et dirigée dans le

* La forme spéciale de la poutre fait coincider avec l'axe horizontal de A les directions des forces $A i$, $A i'$ . . . etc. obtenues ainsi successivement pour la bande inférieure; mais si celle-ci n'était pas rectiligne on aurait toujours un faisceau de droites qui concourent au point A. La construction donnée consistant à suivre les nœuds successifs d'une triangulation, est tout à fait générale comme le fait voir notre démonstration.

** Il sera généralement utile de contrôler ces valeurs par le calcul. L'épure de Cremona quelqu'ingénieuse qu'elle soit, a pour les efforts des bandes l'inconvénient d'exiger toute une série de constructions partant d'un appui et se terminant au milieu de la portée; tandis que les procédés numériques conduisent du premier coup au résultat le plus important que l'on cherche. Lorsqu'au contraire on utilise l'épure pour les barres du treillis, elle est excellente puisqu'elle donne tout d'abord les efforts les plus importants. Remarquons encore que pour la poutre aux nœuds pairs le point A tombe sur le point numéroté 8; il en résulte que l'épure se termine à la ligne représentative du montant N° 8, la diagonale (8 . . 10) et le montant N° 10 ayant à supporter des effets nuls, dans ce système.

sens inverse (A . . 5). Cette „résultante de poussée“ s'obtient immédiatement puisque l'on connaît la réaction d'appui en A, laquelle n'est autre que l'ordonnée de la courbe des efforts tranchants mesurée au droit du montant N° 6 qui se trouve placé au milieu de la maille simple (5 . . 7) et constitue la limite de gauche de la surcharge.

Menons donc (fig. 8) à partir de l'origine I la droite I . . 5 parallèle à la résultante de poussée, jusqu'à sa rencontre avec l'horizontale représentative de l'effort tranchant et nous aurons construit cette résultante (I . . 5). Construisons ensuite avec la longueur obtenue le triangle des forces I . 5 . 5 qui représente l'équilibre au nœud supérieur N° 5 et nous aurons construit sur l'axe des montants l'effort I . 5 du montant N° 5.

Si maintenant au lieu de la section ss' (fig. 6) on considérait la section ss'', on arriverait à l'aide du même raisonnement à faire voir que la résultante de poussée, trouvée comme ci-dessus, fait équilibre sur le nœud supérieur N° 5 à l'effort de la bande (5 . . 7) et à l'effort de la diagonale (5 . . 7)*. Construisons donc (fig. 8) avec la résultante de poussée I . 5 déjà trouvée, le triangle des forces I . 5 . 7 qui représente cet équilibre et nous aurons l'effort cherché I . 7 de la diagonale (5 . . 7).

En effectuant ainsi les constructions indiquées pour tous les nœuds des deux triangulations, on obtient notre épure, dans laquelle les efforts cherchés des barres du treillis partent tous de l'origine I, tandis que les longues lignes peu inclinées représentent les efforts correspondants dans les bandes; ces derniers n'ont pas d'emploi. Pour obtenir les efforts définitifs dans les barres, tels qu'ils sont inscrits sur le croquis schématique (fig. 6), il faut combiner les efforts dûs à la surcharge partielle, que nous venons de construire, avec ceux qui sont dûs à la charge permanente et qui résultent de l'épure (fig. 7) expliquée précédemment, où l'on aura à faire également les corrections déjà signalées pour les efforts des montants.

Nous recommandons en résumé les solutions que nous venons d'exposer, comme étant les plus pratiques, en fait de statique graphique, et pouvant s'appliquer à une poutre à triangles de forme quelconque. Dans le cas le plus usuel des poutres ayant leurs deux bandes rectilignes les épures se simplifient dans ce sens que toutes les lignes correspondantes deviennent parallèles à ces bandes. Mais alors (surtout avec nos tables du tome II) les procédés numériques, comme nous l'avons fait voir, sont d'une simplicité extrême et les efforts cherchés peuvent se lire en quelque sorte immédiatement sur la règle à calcul sans déplacer la languette**; il n'y a donc plus lieu en pareil cas, d'user de la statique graphique qui ne peut soutenir la concurrence.

d) Calcul des ponts à poutres continues.

Généralités.

Les ponts à poutres continues que les ingénieurs construisaient en grand nombre il y a une vingtaine d'années, paraissent moins en faveur actuellement; on ne saurait toutefois prétendre en aucune façon que les expériences faites, n'aient pas justifié pleinement les déductions théoriques et pratiques que l'on avait basées sur le principe de la continuité. Toutes les observations faites, ont au contraire contribué à simplifier et perfectionner en même temps la théorie de ces excellents ponts, et les poutres continues construites actuellement offrent bien plus de sécurité que celles des ponts plus anciens, surtout en tout ce qui concerne les barres des treillis ou triangulations.

Si donc en pratique on arrive aujourd'hui à appliquer le principe de la continuité moins fréquemment qu'autrefois, il faut en rechercher la cause non pas dans le système de construction dont il s'agit, mais bien plutôt dans les conditions et dans les données générales, qui pour chaque pont à construire en particulier, viennent s'imposer aux ingénieurs***.

* Ceci est du reste aussi une conséquence de ce qui précède et de l'équilibre des 4 pièces qui partent du nœud supérieur N° 5.

** Ayant évalué l'effort des bandes au milieu de la portée d'après notre Tab. V du Tome II, on le met en facteur sur la règle à calcul et tous les autres efforts de bandes sont alors ceux qui correspondent aux facteurs de notre Tab. VI; c'est là l'équivalent de l'épure fig. 7 de la planche. Pour avoir l'équivalent de la fig. 8 on met en facteur sur la règle à calcul le produit de $(1 : l)$ par un coefficient tenant compte du nombre des triangulations et de l'inclinaison des barres. Les efforts cherchés dans les barres; qui sont dûs à la surcharge partielle, se lisent alors immédiatement sur la règle d'après les moments tournants de notre Tab. V.

*** Souvent, comme en Hollande, on ne croit pas pouvoir disposer de fondations qui soient à l'abri de tassement possibles; en bien des cas également, on ne peut construire des échaffaudages simultanément dans plusieurs ouvertures ou procéder par voie de lançage longitudinal. Enfin on a aujourd'hui en Autriche par exemple, presque plus de ponts a reconstruire qu'on n'en a à construire, et la facilité de mise en place pendant le service, au moyen d'un lançage latéral semble de nature à exclure les poutres continues . . . etc.

La nouvelle ordonnance autrichienne du 15 Sept. 1887 prescrit d'utiliser d'une manière spéciale pour les poutres continues les mêmes échelles 𝔞 et 𝔟 de charges mobiles (§ 3 lit. *c*) que pour les ponts à travée indépendante.

L'exactitude de cette manière de procéder repose sur une série de comparaisons faites par le calcul pour les parties des deux systèmes de ponts où les effets produits sont des maxima; on a dû considérer en outre que dans une poutre continue les moments de flexion se transmettent presque complètement d'un côté à l'autre d'un appui, tandis que les efforts tranchants se trouvent annullés en majeure partie au passage d'un appui. Il était logique par suite d'utiliser l'échelle 𝔞 pour le calcul de tous les moments en général, et d'utiliser l'échelle 𝔟 pour les efforts tranchants sur la travée, en s'aidant de l'échelle 𝔞 pour toutes les autres travées à charger simultanément, qui n'agissant sur la première que par l'intermédiaire des appuis.

Ce système ainsi conçu avec des règles fort simples, permet de ramener le cas des travées continues au cas particulier de la travée indépendante, tout en représentant le mieux possible les effets réels. L'auteur n'est cependant parvenu à le faire accepter définitivement qu'après avoir réfuté bien des objections et entre autre celle de la complication probable des calculs de résistance. C'est pour ces raisons qu'il a cru devoir refaire en entier la théorie des poutres continues adaptée aux nouveaux principes, en ramenant toutes les fonctions et formules nécessaires à celles qui concernent le cas particulier de la poutre reposant librement sur deux appuis, qui est le mieux connu de tous les ingénieurs. Il en est résulté un ensemble de formules et de données numériques qui sont d'une application plus facile que celles qu'on employait antérieurement, et qui peuvent s'accomoder de toutes les hypothèses possibles de charges permanentes et mobiles*.

La théorie que nous exposons plus loin est la théorie de Clapeyron généralisée; nous n'y admettons que ce qui est indispensable pour la pratique des constructions métalliques, mais nous y utilisons tous les perfectionnements récents.

Pour nos notations, nous avons cherché, à conserver le plus possible ce qui est déjà consacré par l'usage établi en France et en Autriche, tout en mettant de l'ordre dans les lettres et signes et cherchant à répondre à cet égard aux exigences des deux langues. Toutes les fonctions qui ne dépendent que des longueurs de travées sont généralement représentées par des lettres grecques; celles qui dépendent des charges sont désignées par des lettres latines.

C'est par la façon de procéder dans les calculs seulement, que notre manière de traiter les poutres continues diffère essentiellement de ce qui a été publié antérieurement, à savoir:

1. Nous renonçons en général à utiliser les formules ou barêmes nécessairement toujours compliqués représentant les effets dûs à toute une combinaison de charges, où même les épures toutes faites de contours enveloppes équivalents pour les moments de flexion ou pour les efforts tranchants (Bresse, Winkler, de Montdésir . . . etc.) parce que ces formules ou barêmes sont basés sur des hypothèses particulières qui ne sont plus admissibles.

2. Nous calculons d'abord les moments sur tous les appuis de la poutre, pour tous les cas où une travée seule se trouve chargée sur sa portée entière (échelle 𝔞) le reste de la poutre se trouvant alors libre de poids et charges. En réunissant tous ces moments dans un premier tableau, en les additionnant ensuite algébriquement conformément à toutes les combinaisons de surcharges

---

* C'est à Clapeyron, dont l'auteur s'estime heureux d'avoir été un élève, que l'on est redevable principalement de la théorie des poutres continues. Cette théorie n'arriva à une simplicité relative que lorsque Clapeyron eut diminué successivement le nombre des inconnues et présenta finalement en 1857 un mémoire à l'académie, où il ne prenait plus que les moments sur les appuis comme inconnues; ce fut l'origine de tous les progrès accomplis depuis. (Ann. des Ponts et Ch. 1860. 2. Sem. p. 405.) La nouvelle théorie donna lieu aussitôt à des publications et applications très-étendues: Louis Bresse, Prof. à l'Ecole des P. et Ch. Cours de mécanique appliquée 3me partie Paris, Gauthier Villars, 1865. — Heinrich Schmidt, „Beiträge zum Brückenbaue . . .", Vienne, 1866, 1867, 1868 réuni en 1869 (Waldheim); contient aussi les procédés plus anciens. — Dr. E. Winkler, „Theorie der äusseren Kräfte gerader Träger", Vienne, 1870; s'occupe spécialement des surcharges partielles. — Les hypothèses particulières admises dans ces ouvrages pour les charges mobiles (surtout pour les efforts tranchants) ne sont plus admissibles aujourd'hui. Après tous les perfectionnements admis depuis (même ceux de l'ordonnance du 15 Sept. 1887) on est du reste encore toujours forcé d'en passer par la supposition d'une section de poutre constante, pour effectuer l'intégration conduisant à l'équation des trois moments, dite de Clapeyron; de façon que les sections variables qu'on en déduit ensuite ne peuvent être considérées que comme une deuxième approximation, qui en toute rigueur réclamerait une vérification nouvelle. Les recherches pénibles que les ingénieurs ont entreprises pour aller au-delà ont fait voir que les erreurs pouvant résulter de ces calculs, sont comprises dans les limites très-acceptables. Dès 1866 (Ann. des P. et Ch.) M. Albaret calcule que l'on peut gagner 28% en fer en étageant les tôles des bandes tandis que l'incertitude ne dépasse pas 17%. En 1873 M. J. Weyrauch de Stuttgart („Allgem. Theorie und Berechnung der continuirl. u. einf. Träger", p. 140) prouve par un calcul appliqué directement à une poutre à bandes en gradins usuelle, que l'incertitude se réduit à $6\frac{1}{2}$% pour les bandes et 2% pour les croisillons.



que l'on doit considérer, on aura le **tableau des moments sur les appuis pour la charge mobile**, et en ajoutant à tous ces moments, ceux que l'on obtient d'une façon analogue pour la charge permanente on aura le **tableau général des moments sur les appuis***.

3. Ce tableau ou barême des moments sur les appuis qui dans les cas usuels pourra s'établir très-facilement au moyen de nos tables de coefficients de réduction, permettra de tracer immédiatement l'épure connue des moments de flexion maxima, en se servant à cet effet des patrons paraboliques qui s'y rapportent. On pourra se dispenser de calculer les moments relatifs à des surcharges partielles.

Le barême considéré pourra être utilisé encore pour obtenir commodément l'épure des efforts tranchants maxima; il suffira pour cela d'ajouter aux effets de charges qu'il donne, ceux qui proviennent de la surcharge partielle de la travée que l'on considère et dont on veut étudier les efforts tranchants (échelle **b**).

Les procédés que nous venons de résumer succintement, donnent lieu à des opérations très-simples pour les ponts usuels à travées intermédiaires égales à l et à travées de rive un peu moindres, égales à θl. On y pourra appliquer directement nos tables numériques de coefficients de réduction, dressées pour des valeurs d'entrée variant de cinq en cinq millièmes depuis $\theta = 0{\cdot}500$, $0{\cdot}505$ . . . à $0{\cdot}995$, $1{\cdot}000$ et comprenant tous les cas qui se présentent en pratique.

On remarquera qu'en traçant les épures des moments de flexion et des efforts tranchants, comme il vient d'être dit, on obtiendra des courbes enveloppes tenant compte à la fois de la charge mobile et de la charge permanente, tandis que les procédés, barêmes, tableaux, épures ... etc., établis précédemment, traitaient toujours ces deux effets séparément, ce qui obligeait ensuite à cumuler encore graphiquement les ordonnées des deux épures composantes.

Pour rendre enfin plus clair l'exposé qui va suivre et qui, comme nous l'avons expliqué, est basé sur la considération d'une travée chargée seule les autres travées ne supportant ni poids ni charges**, nous avons réuni dans un croquis schématique toutes les désignations et lettres que nous employons et que nous définirons encore d'une manière plus précise en lieu utile. C'est à ce croquis qu'on devra toujours se reporter, lorsqu'il sera question de cette charge, ou même seulement de la suite des appuis et des travées.

(1)

Travées:	1 2 . . . $k-1$ k $k+1$ . . . $n-1$ n
Portées:	$\times \cdot l_1 \cdot \times \cdot l_2 \cdot \times \cdots\cdots \times \cdot l_{k-1} \cdot \times \cdot\cdot\; l_k = l \;\cdot\cdot \times \cdot l_{k+1} \cdot \times \cdots\cdots \times \cdot l_{n-1} \cdot \times \cdot l_n \cdot \times$
Poutre:	P
Appuis:	0 1 2 . . . . . . $k-2$ $k-1$ k $k+1$ . . . . . $n-2$ $n-1$ n
Coeffic. α:	$\alpha_0 = 0$ $\alpha_1 = 1$ α_2 . . . . . α_{k-2} $\alpha_{k-1} = \alpha$ $\alpha' = \alpha_k$ α_{k+1} . . . . . α_{n-2} α_{n-1} { idéal α_n
Rapports:	$= \infty$ . . . ailleurs $> +2$ . . . . . $-\frac{\alpha'}{\alpha} = \mu$ . . . . . . toujours $> +2$ . . . .
Coeffic. β:	{ idéal β_n β_{n-1} β_{n-2} . . . . β_{n-k+2} $\beta_{n-k+1} = \beta$ $\beta' = \beta_{n-k}$ β_k . . . . . . β_2 $\beta_1 = 1$ $\beta_0 = 0$
Rapports:	. . . . toujours $> +2$ . . . . . $-\frac{\beta}{\beta'} = \nu$ . . . . . . ailleurs $> +2$ . . $= \infty$
Fonctions de charge	. . . . $T_k = T$ $T' = T'_k$ . . . .
Moments d'appuis	$M_0 = 0$ M_1 M_2 . . . . . M_{k-2} $M_{k-1} = M$ M' M_k M_{k+1} . . . . M_{n-2} M_{n-1} M_n
Tassement d'appuis	y_0 y_1 y_2 . . . . . . y_{k-2} $y_{k-1} = y_\lambda$ $y'_\lambda = y_k$ y_{k+1} . . . . . y_{n-2} y_{n-1} y_n
Réactions d'appuis	R_0 R_1 R_2 . . . . . R_{k-2} $R_{k-1} = R$ $R' = R_k$ R_{k+1} . . . . . R_{n-2} R_{n-1} R_n

* L'hypothèse antérieurement admise, d'une charge permanente par *m* qui serait constante pour toutes les travées est moins inexacte que celle faite de même pour la charge mobile, mais toujours plus erronnée que bien d'autres simplifications que l'on a voulu supprimer depuis. Nous prouvons plus loin que le nombre total des combinaisons de charge dont on a besoin en tout, est toujours le double de celui de travées.

** Les appuis dans cette conception théorique, ne sont plus à considérer comme tels, mais bien plutôt comme de véritables points fixes du bas en haut aussi bien que du haut en bas.

XLIX. Formules générales concernant l'action des forces extérieures sur une section quelconque et sur les appuis d'une poutre supportant des charges quelconques.

1. Moments de flexion et efforts tranchants.

Considérons comme moments de flexion positifs ceux qui courbent dans le sens ⌒ et comme efforts tranchants positifs ceux qui cisaillent dans le sens =ı= et désignons par (fig. 3).

(2)
- J . . . . . le moment d'inertie de la section rapporté à l'axe neutre et supposé constant;
- E . . . . le coefficient d'élasticité du métal de la poutre;
- l . . . . . la longueur c. a. d. la portée de la travée considérée;
- P . . . . une force quelconque (infiniment petite s'il y a lieu) agissant sur la travée;
- a b . . . . les distances de cette force aux deux appuis, adjacents à la travée;
- $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ . . les moments de flexion sur les appuis à gauche et à droite de la travée;
- $\mathcal{M}_x$ . . . le moment de flexion dans la section dont l'abscisse est x;
- $\mathcal{V}$ $\mathcal{V}'$ . . les efforts tranchants sur les sections de la travée, voisines des appuis;
- $\mathcal{V}_x$ . . . . l'effort tranchant dans la section dont l'abscisse est x;
- x, y . . . les coordonnées du point de la fibre neutre (ou moyenne) appartenant à la section considérée, prises dans le système des axes OX et OY de la fig. (3) où l'on compte les ordonnées positives du haut en bas.

(3)

La travée supposée chargée d'une manière quelconque et solidaire avec les travées voisines soumises également à des charges quelconques, peut être considérée comme maintenue à ses extrémités uniquement par les moments de flexion $\mathcal{M}\,\mathcal{M}'$ et les efforts tranchants $\mathcal{V}\mathcal{V}'$; les appuis et les autres travées peuvent alors être supprimés et nous n'aurons par suite plus à nous occuper que des quatre fonctions citées et des charges appliquées sur la travée elle-même.

Si l'on désigne alors par le signe Σ la sommation des poids et charges agissant sur la travée on aura sur la figure:

(4) . . . . $\begin{cases} \mathcal{M}_x = \mathcal{M} - \mathcal{V}\,.\,x + \Sigma_0^x P(x-a), \\ \mathcal{M}' = \mathcal{M} - \mathcal{V}\,.\,l + \Sigma_0^l P(l-a), \end{cases}$ . . . donc pour x = l à l'appui de droite . . . d'où pour la valeur de $\mathcal{V}$:

(5) . . . . $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{M} - \mathcal{M}'}{l} + \frac{1}{l}\Sigma_0^l P(l-a)$ . . . et en substituant dans (4):

(6) . . $\begin{cases} \mathcal{M}_x = \mathcal{M} + \frac{\mathcal{M}' - \mathcal{M}}{l}\,\Sigma x + {}_0^x P(x-a) - \frac{x}{l}\Sigma_0^l P(l-a) \qquad \text{ou bien} \\ \mathcal{M}_x = \frac{(l-x)\mathcal{M} + x\mathcal{M}'}{l} + \left[\Sigma_0^x P(x-a) - \frac{x}{l}\Sigma_0^l P(l-a)\right] \end{cases}$

Cette formule très-générale signifie que $\mathcal{M}_x$ se compose de deux parties, dont la première résulte de l'interpolation rectiligne entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ pour l'abscisse x, tandis que la seconde représente le moment:

$$\Sigma_0^x P(x-a) - \frac{x}{l}\Sigma_0^l P(l-a) = \mathbb{M}_x$$

que l'on obtiendrait sur la même section de la travée, si on la supposait indépendante ou coupée sur les appuis*.

La nouvelle ordonnance autrichienne prescrit implicitement la surcharge de travées entières pour le calcul des bandes; il en résulte que dans son application, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ ne variant pas avec x, on pourra représenter le premier terme de $\mathcal{M}_x$ par l'ordonnée d'une ligne droite et le second terme par celle d'une parabole à axe vertical. L'ordonnée de $\mathcal{M}_x$ sera donc en résumé celle d'une parabole à axe vertical, de même paramètre.

* Ce groupement des efforts et fonctions d'efforts dont nous faisons un usage fréquent dans la suite, a été signalé pour la première fois en 1861 par L. Bresse dans son cours de l'Ecole des P. et Ch.

Pour montrer que cette manière de procéder est justifiée en pratique, nous examinerons plus loin l'effet des surcharges partielles variant avec x; mais cette étude purement théorique ne servira qu'à prouver qu'on peut se dispenser de considérer des surcharges partielles pour les bandes, et il n'y a pas lieu d'insister ici sur les variations de $\mathcal{M}_x$ qui en dérivent.

Nous arrivons maintenant aux efforts tranchants qui agissent sur la même travée. On a en général:

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V} - \Sigma_0^x P$$

En substituant dans cette formule la valeur (5) de $\mathcal{V}$ on a:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \mathcal{V}_x = \frac{\mathcal{M} - \mathcal{M}'}{l} + \left[\frac{1}{l} \Sigma_0^l P (l - a) - \Sigma_0^x P\right]$$

D'après cela, si les surcharges considérées devaient, comme celles qui sont relatives aux moments de flexion, être indépendantes de x (ainsi qu'on l'admettait dans les premiers temps) il résulterait de la comparaisons des valeurs (6) et (7) la relation souvent citée*:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \mathcal{V}_x = -\frac{d\,\mathcal{M}_x}{dx}$$

Celle-ci ne peut toutefois être utilisée pour le calcul des croisillons, parce que, comme on le sait, ce calcul exige l'hypothèse de surcharges partielles variant avec x en étendue et intensité, ainsi que le prévoit aussi l'ordonnance autrichienne.

Le premier terme de la formule (7) sera donc en général variable avec x en même temps que les moments $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ eux-mêmes. On en peut dire autant du second terme:

$$\frac{1}{l} \Sigma_0^l P (l - a) - \Sigma_0^x P = \mathfrak{V}_x$$

qui représente l'effort tranchant bien connu que l'on aurait en supposant la travée indépendante ou coupée au droit des appuis. Mais on peut mettre la formule générale (7) de l'effort tranchant, sous une forme qui répond mieux aux nouveaux principes de surcharge en divisant chacun des moments $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ en deux parties de manière que les moments composants $\mathcal{M}_0$ $\mathcal{M}'_0$ correspondent aux charges invariables c. a. d. à toutes les charges permanentes sans exception, et à toutes les charges mobiles de la combinaisons considérée à l'exception de celles qui agissent sur la travée elle-même, ces dernières produisant les moments composants variables M et M'. On aura donc ainsi:

$$(9) \quad \ldots \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + M \quad \ldots\ldots \quad \mathcal{M}' = \mathcal{M}'_0 + M'$$

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \mathcal{V}_x = \frac{\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}'_0}{l} + \frac{M - M'}{l} + \mathfrak{V}_x$$

Dans cette formule le premier terme est maintenant une véritable constante pour toutes les abscisses x, le second terme ne dépend que de la surcharge variable de la travée elle-même (échelle $\mathfrak{b}$); enfin le troisième terme est l'effort tranchant connu qu'on aurait dans la travée indépendante, pour toutes les charges (mobiles et permanentes) qui agissent sur elle.

2. Réactions des appuis.

On utilise aujourd'hui exclusivement les moments de flexion et les efforts tranchants pour les calculs de résistance; les réactions des appuis que nous désignerons généralement par $\mathcal{R}_0\ \mathcal{R}_1 \ldots \mathcal{R}_n$ (pour une surcharge quelconque) figuraient comme inconnues dans les premières études qu'on a faites des poutres continues, tandis qu'aujourd'hui on ne les recherche que pour vérifier les appuis et on les déduit alors des efforts tranchants déjà calculés. Il suffit de remarquer à cet effet que chaque appui intermédiaire neutralise l'ensemble des efforts tranchants provenant des travées adjacentes, et que chaque appui extrême neutralise l'effort tranchant qu'y transmet la travée de rive. En tenant compte des signes on aura donc (1) (2)

(11) . . . 1. sur la pile N° k . . . . $\mathcal{R}_k = \mathcal{V}_{k+1} - \mathcal{V}'_k$
2. sur une culée . . . . . $\mathcal{R}_0 = \mathcal{V}_0$ . . . ou bien . . . $\mathcal{R}_n = -\mathcal{V}'_n$

On considère les réactions des appuis $\mathcal{R}$ comme égales et opposées aux charges sur les appuis, de façon que toute la poutre se trouve en équilibre sous l'action de toutes les charges verticales d'une part, et des réactions des appuis d'autre part.

* Nous invoquerons plus tard cette relation pour le cas spécial d'une force unique appliquée à la poutre.

En pratique il résulte de la présence des charges permanentes que les réactions $\mathcal{R}_0 \ldots$ $\ldots \mathcal{R}_k \ldots \mathcal{R}_n$ sont presque toujours positives c. a. d. dirigées du bas en haut. Dans la théorie de la surcharge appliquée à une travée seulement, où l'on suppose que la poutre ne supporte ni poids ni charges dans tout le reste de sa longueur, on doit aussi considérer des réactions négatives c. a. d. dirigées du haut en bas; les appuis correspondants fonctionnent alors comme ancrages et non comme supports*.

Mais comme nous l'avons déjà remarqué, tout ce qui concerne ces diverses réactions, joue actuellement un rôle tout à fait secondaire, dans les procédés de calcul concernant les poutres continues. Ce qui importe, d'après ce qui précède, tant pour $\mathcal{M}_x$ que pour $\mathcal{V}_x$ c'est que l'on puisse calculer facilement les moments d'appuis soit pour une combinaison quelconque de travées chargées sur le total de leur longueur, soit pour une travée chargée seule d'une façon tout à fait quelconque.

L. Formules fondamentales des poutres continues.

1. Tangentes sur les appuis pour des charges quelconques sur des travées quelconques.

Désignons fig. (3) par y_A et y'_A les abaissements des appuis au-dessous de O X par t et t' les tangentes des angles que font les éléments de la fibre neutre déformée avec O X au droit des appuis; on aura alors d'après la théorie de la flexion**:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \mathcal{M}_x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EJ}\int_0^x \mathcal{M}_x\, dx + \text{const.} \qquad t = 0 + \text{const.}$$

d'où pour l'appui de gauche comme point de départ, la formule générale:

$$(12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = t + \frac{1}{EJ}\int_0^x \mathcal{M}_x\, dx$$

On aura ensuite d'après (4)

$$\int_0^x \mathcal{M}_x\, dx = \mathcal{M}\,.\,x + \frac{1}{2}\Sigma_0^x\, P\,(x-a)^2 - \frac{x^2}{2}\mathcal{V}$$

et en substituant dans (12):

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = t + \frac{1}{2EJ}\left[2\,\mathcal{M}\,.\,x + \Sigma_0^x\, P\,(x-a)^2 - \mathcal{V}x^2\right]$$

Par une nouvelle intégration et en partant toujours de l'appui de gauche on aura:

$$(14) \quad \ldots \quad y = tx + \frac{1}{2EJ}\left[\mathcal{M}\,.\,x^2 + \frac{1}{3}\Sigma_0^x\, P\,(x-a)^3 - \frac{1}{3}\mathcal{V}x^3\right] + y_A$$

ce qui donne pour $x = l$ c'est-à-dire pour l'abaissement de l'appui de droite:

$$y'_A = t\,l + \frac{1}{6EJ}\left[3\,\mathcal{M}\,.\,l^2 + \Sigma_0^l\, P\,(l-a)^3 - \mathcal{V}l^3\right] + y_A$$

On en déduit immédiatement pour la tangente t sur l'appui de gauche la formule générale:

$$(15) \quad \ldots\ldots \quad t = \frac{y'_A - y_A}{l} - \frac{1}{6EJ}\left[3\,\mathcal{M}\,.\,l + \frac{1}{l}\Sigma_0^l\, P\,(l-a)^3 - \mathcal{V}l^2\right]$$

En substituant la valeur (5) de $\mathcal{V}$ et réduisant, puis en établissant la formule analogue pour t' soit directement soit en profitant de la symétrie des équations, on obtient les deux formules importantes:

$$(16) \quad \ldots \quad t = \frac{y'_A - y_A}{l} - \frac{1}{6EJ}\left[2\,\mathcal{M}\,.\,l + \mathcal{M}'\,.\,l - \frac{1}{l}\Sigma_0^l\, P\,a\,(l-a)\,(2l-a)\right]$$

$$(17) \quad \ldots \quad t' = \frac{y'_A - y_A}{l} + \frac{1}{6EJ}\left[2\,\mathcal{M}'\,.\,l + \mathcal{M}\,.\,l - \frac{1}{l}\Sigma_0^l\, P\,a\,(l-a)\,.\,(l+a)\right]$$

Ces deux formules fondamentales servent à établir presqu'immédiatement toutes les autres formules concernant les poutres à travées continues

* Ces réactions d'appui avec leurs signes sont supposées désignées par $R_0\ R_1\ R_2 \ldots R_n$ dans notre barême (1). — En pratique les valeurs $(-\mathcal{V}_k)$ ou $(-\mathcal{V}'_n)$ seront presque toujours positives et la valeur (11) de $\mathcal{R}_k$ sera une somme et non une différence.

** Dans cette équation qui sert de point de départ à tout ce qui suit, on suppose la fibre moyenne primitivement droite. Si elle était primitivement courbe, on supposerait les ordonnées comptées à partir de cette courbe ou à partir d'une courbe verticalement parallèle, et tout ce qui suit resterait exact.

ou indépendantes, avec ou sans encastrements, avec ou sans prolongements en porte-à-faux . . . etc. On les écrit plus symétriquement en y introduisant (3) les distances b à l'appui de droite ainsi que les fonctions de charges toujours positives:

(18) . . . . . $$T = \frac{1}{l} \Sigma_0^l \, P a (l - a)(2l - a) = \frac{1}{l} \Sigma_0^l \, P . a . b . (l + b)$$

(19) . . . . . $$T' = \frac{1}{l} \Sigma_0^l \, P a (l - a)(l + a) = \frac{1}{l} \Sigma_0^l \, P . a . b . (l + a)$$

qui ne dépendent que des charges appliquées à la travée que l'on considère, et correspondraient aux produits $+ 6 E J \times \mathfrak{t}$ et $- 6 E J \times \mathfrak{t}'$ calculés pour la travée supposée indépendante (si l'on désigne par $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}'$ les valeurs qu'y auraient les tangentes t et t' avec leurs signes). On aura ainsi:

(20) . . . . $$t = \frac{y'_A - y_A}{l} - \frac{1}{6 E J}\left[2 \mathcal{M} . l + \mathcal{M}' . l - T\right]$$

(21) . . . . $$t' = \frac{y'_A - y_A}{l} + \frac{1}{6 E J}\left[2 \mathcal{M}' . l + \mathcal{M} . l - T'\right]$$

2. Equation des trois moments dite de Clapeyron, généralisée pour des charges quelconques.

Cette équation s'obtient en identifiant pour l'appui k et les travées adjacentes l_k et l_{k+1}, le t' de l_k avec le t de l_{k+1}. On a ainsi (20) (21):

(22) . . . . $$+ t'_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} + \frac{l_k}{6EJ}\left[2 \mathcal{M}_k + \mathcal{M}_{k-1} - T'_k \cdot \frac{1}{l_k}\right]$$

(23) . . . . $$- t_{k+1} = \frac{y_k - y_{k+1}}{l_{k+1}} + \frac{l_{k+1}}{6EJ}\left[2 \mathcal{M}_k + \mathcal{M}_{k+1} - T_{k+1} \frac{1}{l_{k+1}}\right]$$

En ajoutant et réduisant on obtient l'équation de Clapeyron généralisée:

(24) . . $$6EJ\left[\frac{y_{k+1}}{l_{k+1}} - \left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}}\right) y_k + \frac{y_{k-1}}{l_k}\right] = l_k \mathcal{M}_{k-1} + 2 (l_k + l_{k+1}) \mathcal{M}_k + l_{k+1} \mathcal{M}_{k+1} - T'_k - T_{k+1}$$

C'est l'équation dite des trois moments pour un couple de travées adjacentes. Comme l'on admet généralement que les abaissements sur les appuis sont nuls, l'équation s'écrit plus simplement:

(25) . . . . . . $$l_k \mathcal{M}_{k-1} + 2 (l_k + l_{k+1}) \mathcal{M}_k + l_{k+1} \mathcal{M}_{k+1} = T'_k + T_{k+1}$$

LI. Moments sur les appuis $M_1 \, M_2 \ldots M_k \ldots M_{n-1}$ qui résultent de charges appliquées à une seule travée k, le reste de la poutre étant supposé ne supporter ni poids ni charges.

Ecrivant l'équation (25) pour tous les couples de travées, on a:

(26) . . . . $$\left\{\begin{array}{l} M_0{}^* \, l_1 + 2 M_1 . (l_1 + l_2) + M_2 . l_2 = 0 \\ M_1 . l_2 + 2 M_2 . (l_2 + l_3) + M_3 . l_3 = 0 \\ M_2 . l_3 + 2 M_3 . (l_3 + l_4) + M_4 . l_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{k-3} l_{k-2} + 2 M_{k-2} (l_{k-2} + l_{k-1}) + M_{k-1} l_{k-1} = 0 \end{array}\right\}$$ Ce sont (k — 2) équations linéaires pour les (k — 1) inconnues: $M_1 \, M_2 \ldots M_{k-1}$

(27) . . . . $$\left\{\begin{array}{l} M_{k-2} l_{k-1} + 2 M_{k-1} (l_{k-1} + l_k) + M_k . l_k = T_k \\ M_{k-1} l_k + 2 M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = T'_k \end{array}\right\}$$ Ce sont les deux équations pour la travée chargée

(28) . . . . $$\left\{\begin{array}{l} M_k \, l_{k+1} + 2 M_{k+1} (l_{k+1} + l_{k+2}) + M_{k+2} l_{k+2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{n-3} l_{n-2} + 2 M_{n-2} (l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1} l_{n-1} = 0 \\ M_{n-2} l_{n-1} + 2 M_{n-1} (l_{n-1} + l_n) + M_n{}^* \, l_n = 0 \end{array}\right\}$$ Ce sont (n — 1 — k) équations linéaires pour les (n — k) inconnues: $M_k M_{k+1} \ldots M_{n-1}$

---

* Les moments M_0 et M_n qui figurent ici, étant d'ordinaire nuls disparaissent des équations. Dans les cas d'extrémités encastrées ou prolongées en porte-à-faux et portant des charges, ou généralement lorsque M_0 et M_n ne sont pas nuls, il faudra encore deux équations en plus, qui renferment ces inconnues.

Ce système de (n—1) équations linéaires avec les (n—1) inconnues $M_1\ M_2 \ldots M_{n-1}$ permet généralement de calculer ces dernières; la forme particulière propre aux équations, conduit en outre à user à cet effet d'un procédé spécial, qui simplifie les opérations:

1. Avec les équations (26) on calcule les rapports*:

$$(29) \quad \ldots \alpha_0 = \frac{M_0}{M_1} = 0 \qquad \alpha_1 = \frac{M_1}{M_1} = 1 \qquad \alpha_2 = \frac{M_2}{M_1} \qquad \alpha_3 = \frac{M_3}{M_1} \ldots\ldots \alpha_{k-1} = \frac{M_{k-1}}{M_1}$$

des (k — 2) inconnues $M_2\ M_3 \ldots M_{k-1}$ à l'inconnue M_1; les équations deviennent:

$$(30) \quad \ldots \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 . l_1 + 2\alpha_1 . (l_1 + l_2) + \alpha_2 . l_2 = 0 \\ \alpha_1 . l_2 + 2\alpha_2 . (l_2 + l_3) + \alpha_3 . l_3 = 0 \\ \alpha_2 . l_3 + 2\alpha_3 . (l_3 + l_4) + \alpha_4 . l_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k-3} l_{k-2} + 2\alpha_{k-2} (l_{k-2} + l_{k-1}) + \alpha_{k-1} l_{k-1} = 0 \end{array}\right.$$

Ce sont (k — 2) équations contenant les (k — 2) inconnues $\alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_{k-1}$, qui ne dépendent que des longueurs de travées

2. De même avec les équations (28) on calcule les rapports*

$$(31) \quad . \quad \beta_0 = \frac{M_n}{M_{n-1}} = 0 \qquad \beta_1 = \frac{M_{n-1}}{M_{n-1}} = 1 \qquad \beta_2 = \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} \qquad \beta_3 = \frac{M_{n-3}}{M_{n-1}} \ldots\ldots \beta_{n-k} = \frac{M_k}{M_{n-1}}$$

des (n — 1 — k) in connues $M_k\ M_{k+1} \ldots M_{n-2}$ à l'inconnue M_{n-1}; les équations deviennent:

$$(32) \quad \ldots \left\{\begin{array}{l} \beta_0 . l_n + 2\beta_1 . (l_n + l_{n-1}) + \beta_2 . l_{n-1} = 0 \\ \beta_1 . l_{n-1} + 2\beta_2 . (l_{n-1} + l_{n-2}) + \beta_3 . l_{n-2} = 0 \\ \beta_2 . l_{n-2} + 2\beta_3 . (l_{n-2} + l_{n-3}) + \beta_4 . l_{n-3} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n-2-k} l_{k+2} + 2\beta_{n-1-k} (l_{k+2} + l_{k+1}) + \beta_{n-k} l_{k+1} = 0 \end{array}\right.$$

Ce sont (n — 1 — k) équations contenant les (n — 1 — k) inconnues $\beta_2\, \beta_3 \ldots \beta_{n-k}$ qui ne dépendent que des longueurs de travées

Lorsqu'on aura ainsi calculé les coefficients $\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}$ et $\beta_2 \ldots \beta_{n-k}$ il suffira de substituer les valeurs:

$$(33) \quad . \quad . \quad M_{k-2} = \alpha_{k-2} M_1 \qquad M_{k-1} = \alpha_{k-1} M_1 \qquad M_k = \beta_{n-k} M_{n-1} \qquad M_{k+1} = \beta_{n-k-1} M_{n-1}$$

dans les deux équations (27) pour avoir deux équations linéaires donnant les inconnues M_1 et M_{n-1} à savoir:

$$(34) \quad \ldots\ldots \left[\alpha_{k-2} l_{k-1} + 2\alpha_{k-1}(l_{k-1} + l_k)\right] M_1 + \beta_{n-k} l_k M_{n-1} = T_k$$

$$(35) \quad \ldots\ldots \alpha_{k-1} l_k M_1 + \left[2\beta_{n-k}(l_k + l_{k+1}) + \beta_{n-k-1} l_{k+1}\right] M_{n-1} = T'_k$$

Ces équations en même temps que tout le procédé que nous venons d'expliquer, se simplifient notablement, si l'on remarque que les systèmes d'équations (30) et (32) qui servent à calculer les coefficients α et β ne dépendent que des longueurs des travées, et que ces coefficients peuvent être déterminés une fois pour toutes d'avance pour tous les appuis de la poutre; en complétant convenablement les deux systèmes d'équation (30) et (32) d'où ils proviennent, à savoir:

1. pour le systême des α

$$(36) \quad \ldots \left\{\begin{array}{l} \alpha_0{}^{**} l_1 + 2\alpha_1 . (l_1 + l_2) + \alpha_2 . l_2 = 0 \\ \alpha_1 . l_2 + 2\alpha_2 . (l_2 + l_3) + \alpha_3 . l_3 = 0 \\ \alpha_2 . l_3 + 2\alpha_3 . (l_3 + l_4) + \alpha_4 . l_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-3} l_{n-2} + 2\alpha_{n-2}(l_{n-2} + l_{n-1}) + \alpha_{n-1} l_{n-1} = 0 \\ \alpha_{n-2} l_{n-1} + 2\alpha_{n-1}(l_{n-1} + l_n) + \alpha_n{}^{**} . l_n = 0 \end{array}\right.$$

Ce sont (n — 1) équations avec les (n — 1) in connues $\alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_n$

* Les inconnues auxiliaires α et β sont, comme on le voit, des valeurs proportionnelles aux moments sur les appuis dans les parties non chargées de la poutre.

** Pour α_0 et β_0, comme nous l'avons déjà remarqué à propos des moments M_0 et M_n, il faudrait s'ils ne sont pas nuls, deux équations complémentaires. Quant aux coefficients $\alpha_n\ \beta_n$ introduits dans les systèmes (36) (37) au moyen de deux nouvelles équations, ils n'ont pas le même sens (29) (31) que les autres α et β et leur valeur idéale ne sert qu'à simplifier les calculs pour le cas des travées de rive chargées.

2. pour le système des β

$$(37) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \beta_0 \cdot l_n + 2\beta_1 \cdot (l_n + l_{n-1}) + \beta_2 \cdot l_{n-1} = 0 \\ \beta_1 \cdot l_{n-1} + 2\beta_2 \cdot (l_{n-1} + l_{n-2}) + \beta_3 \cdot l_{n-2} = 0 \\ \beta_2 \cdot l_{n-2} + 2\beta_3 \cdot (l_{n-2} + l_{n-3}) + \beta_4 \cdot l_{n-3} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n-3}\, l_3 + 2\beta_{n-2}(l_3 + l_2) + \beta_{n-1}\, l_2 = 0 \\ \beta_{n-2}\, l_2 + 2\beta_{n-1}(l_2 + l_1) + \beta_n \cdot l_1 = 0 \end{array}\right\}$$

Ce sont $(n-1)$ équations avec les $(n-1)$ inconnues $\beta_2\, \beta_3 \ldots \beta_n$

Après avoir calculé ainsi les α de gauche à droite et les β de droite à gauche pour toute la poutre* on choisira pour chaque travée k considérée comme chargée, ceux des coefficients calculés $\alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}$ et $\beta_2 \ldots \beta_{n-k}$ qui conviennent pour les équations (33) (34) et (35) ci-dessus. Ces équations peuvent alors se simplifier car d'après (36) (37) on a les relations:

$$(38) \quad \ldots\ldots \quad \alpha_{k-2} \cdot l_{k-1} + 2\,\alpha_{k-1} \cdot (l_{k-1} + l_k) = -\,\alpha_k \cdot l_k$$

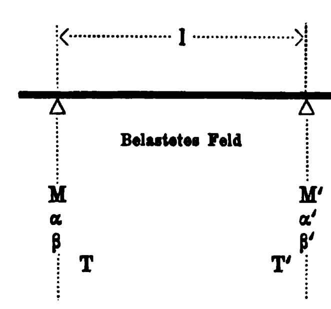
$$(39) \quad \ldots\ldots \quad 2\,\beta_{n-k}\,(l_k + l_{k+1}) + \beta_{n-k-1}\, l_{k+1} = -\,\beta_{n-k+1}\, l_k$$

En substituant dans (34) (35), ces équations se remplacent par:

$$(40) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} -\,\alpha_k \cdot M_1 + \beta_{n-k} \cdot M_{n-1} = \dfrac{T_k}{l_k} \\ +\,\alpha_{k-1}\, M_1 - \beta_{n-k+1}\, M_{n-1} = \dfrac{T'_k}{l_k} \end{array}\right.$$

Les valeurs de M_1 et M_{n-1} qu'on en tire sont:

$$(41) \quad . \; M_1 = \frac{1}{l_k}\,\frac{\beta_{n-k+1} \cdot T_k + \beta_{n-k} \cdot T'_k}{\alpha_{k-1}\,\beta_{n-k} - \alpha_k\,\beta_{n-k+1}} \qquad M_{n-1} = \frac{1}{l_k}\,\frac{\alpha_{k-1} \cdot T_k + \alpha_k \cdot T'_k}{\alpha_{k-1}\,\beta_{n-k} - \alpha_k\,\beta_{n-k+1}}$$



et permettent (29) (31) d'obtenir de suite au moyen des α et β tous les autres moments. Pour simplifier encore les écritures nous désignons par l la longueur de portée de la travée chargée, par $M\ \alpha\ \beta\ T$ et $M'\ \alpha'\ \beta'\ T'$ les fonctions concernant l'appui de gauche et l'appui de droite. On aura alors au lieu des formules (41)

$$(42) \quad . . \quad M_1 = \frac{1}{l}\,\frac{\beta\, T + \beta'\, T'}{\alpha\,\beta' - \beta\,\alpha'} \qquad M_{n-1} = \frac{1}{l}\,\frac{\alpha\, T + \alpha'\, T'}{\alpha\,\beta' - \beta\,\alpha'}$$

d'où pour les appuis de la travée chargée elle-même (29) (31):

$$(43) \quad \ldots\ldots \; M = \frac{\alpha}{l}\,\frac{\beta\, T + \beta'\, T'}{\alpha\,\beta' - \beta\,\alpha'} \qquad M' = \frac{\beta'}{l}\,\frac{\alpha\, T + \alpha'\, T'}{\alpha\,\beta' - \beta\,\alpha'}$$

Les formules (42) (43) suffiront pour tous les cas où c'est une travée intermédiaire qui est chargée. Pour le cas spécial où une travée de rive se trouve chargée, l'une des deux équations (27) disparaît; il en est de même de l'un des deux systèmes d'équations (26) ou (28) et de l'une des deux équations (40). En se servant alors de l'un des deux systèmes (36) ou (37) on aura avec les notations précédentes:

1. dans le cas où la première travée (à gauche) est chargée:

$$(44) \quad \ldots \quad M_1 = -\,\frac{\beta_{n-1}}{l_1}\,\frac{T'_1}{\beta_n} \qquad M_2 = -\,\frac{\beta_{n-2}}{l_1}\,\frac{T'_1}{\beta_n} \quad \ldots\ldots \quad M_{n-1} = -\,\frac{1}{l_1}\,\frac{T'_1}{\beta_n}$$

2. dans le cas où la dernière travée (à droite) est chargée:

$$(45) \quad \ldots \quad M_1 = -\,\frac{1}{l_n}\,\frac{T_n}{\alpha_n} \qquad M_2 = -\,\frac{\alpha_2}{l_n}\,\frac{T_n}{\alpha_n} \quad \ldots\ldots \quad M_{n-1} = -\,\frac{\alpha_{n-1}}{l_n}\,\frac{T_n}{\alpha_n}$$

---

* Pour le cas d'une répartition symétrique des longueurs de travées, les deux systèmes n'en font qu'un évidemment; c'est ce qui arrivera en pratique.

Ces résultats peuvent encore être donnés exactement par les formules (43) établies pour les travées intermédiaires, si l'on y suppose $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ ainsi que M_0, α_0 et M_n, β_0 tous nuls. Il importe de remarquer toutefois que les coefficients α_n et β_n n'ont qu'un sens idéal et ne représentent jamais un rapport de moments comme tous les autres α et β *.

LII. Remarques sur les α et β.

Ces coefficients auxiliaires se calculent d'après (36) (37) par les formules:

$$(46)\left\{\begin{array}{lll} \alpha_1 = +1 & \ldots & \beta_1 = +1 \\ \alpha_2 = -\frac{l_1}{l_2}\alpha_0 - 2\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right)\alpha_1 & \ldots & \beta_2 = -\frac{l_n}{l_{n-1}}\beta_0 - 2\left(1+\frac{l_n}{l_{n-1}}\right)\beta_1 \\ \alpha_3 = -\frac{l_2}{l_3}\alpha_1 - 2\left(1+\frac{l_2}{l_3}\right)\alpha_2 & \ldots & \beta_3 = -\frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}\beta_1 - 2\left(1+\frac{l_{n-1}}{l_{n-2}}\right)\beta_2 \\ \alpha_4 = -\frac{l_3}{l_4}\alpha_2 - 2\left(1+\frac{l_3}{l_4}\right)\alpha_3 & \ldots & \beta_4 = -\frac{l_{n-2}}{l_{n-3}}\beta_2 - 2\left(1+\frac{l_{n-2}}{l_{n-3}}\right)\beta_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n-1} = -\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\alpha_{n-3} - 2\left(1+\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\right)\alpha_{n-2} & \ldots & \beta_{n-1} = -\frac{l_3}{l_2}\beta_{n-3} - 2\left(1+\frac{l_3}{l_2}\right)\beta_{n-2} \\ \alpha_n = -\frac{l_{n-1}}{l_n}\alpha_{n-2} - 2\left(1+\frac{l_{n-1}}{l_n}\right)\alpha_{n-1} & \ldots & \beta_n = -\frac{l_2}{l_1}\beta_{n-2} - 2\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)\beta_{n-1} \end{array}\right.$$

Nous y avons comme précédemment laissé pour plus de généralité les valeurs α_0 β_0 α_1 β_1 dont les deux premières sont nulles et dont les deux dernières sont égales à l'unité. Les valeurs des α et β ainsi calculées sont des valeurs numériques qui ne dépendent que des longueurs de travées et qui peuvent être déterminées à l'avance abstraction faite de toute hypothèse relative aux surcharges **.

En examinant les formules (46) on reconnaît immédiatement que les coefficients α calculés successivement ont des signes alternativement positifs et négatifs, qu'en outre leurs valeurs numériques croissent plus rapidement que les termes de la progression géométrique 1, 2, 4, $8 \ldots 2^n$. On en dirait autant des β qui sont comptés d'une manière analogue en sens inverse.

* C'est précisément dans le but de bien élucider le sens à attribuer à toutes les fonctions que nous avons défini les α et β de la manière (30) (32) la plus ancienne et la plus naturelle. On aurait pu pour simplifier définir ces coefficients immédiatement par les systèmes (36) (37) mais cet exposé serait moins clair.

** Dans le cas où M_0 et M_n et par suite aussi α_0 et β_0 sont différents de zéro, on a (46) deux systèmes d'équations linéaires permettant de calculer les α en fonctions de α_0 et les β en fonction de β_0, de façon que l'on ait généralement:

$$(47) \quad \ldots \ldots \quad \alpha_k = A_k + \mathfrak{A}_k \alpha_0 \qquad \beta_k = B_k + \mathfrak{B}_k \beta_0$$

où les A et B ne sont autre chose que les valeurs que l'on obtient pour les α et β lorsque α_0 et β_0 sont nuls, et où les $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ représentent des coefficients numériques qui ne dépendent aussi que de la longueur de travées. Les deux équations (40) s'écrivent alors en y introduisant de nouveau (29) (31) les moments:

$$(48) \quad \ldots \ldots \quad - A_k \cdot M_1 + B_{n-k} \cdot M_{n-1} - \mathfrak{A}_k \cdot M_0 + \mathfrak{B}_{n-k} \cdot M_n = \frac{T_k}{l_k}$$

$$(49) \quad \ldots \ldots \quad + A_{k-1} M_1 - B_{n-k+1} M_{n-1} + \mathfrak{A}_{k-1} M_0 - \mathfrak{B}_{n-k+1} M_n = \frac{T'_k}{l_k}$$

Entre ces quatre moments on devra avoir encore deux équations spéciales, comme nous l'avons expliqué; on aura donc 4 équations pour les calculer.

1. Exemple. La poutre se prolonge en porte-à-faux au-delà des appuis 0 et n (ponts à poutres balancées). Les moments M_0 et M_n sont alors connus directement et les équations (48) (49) donnent M_1 et M_{n-1}.

2. Exemple. La poutre est encastrée à ses extrémités sur les appuis 0 et n. Les deux équations complémentaires s'obtiennent alors à l'aide des formules (20) et (21) en y supposant que t t' y_A y'_A sont nuls, ce qui donne:

$$(50) \quad \ldots \quad 2M_0 + M_1 - \frac{T_1}{l_1} = 0 \qquad M_{n-1} + 2M_n - \frac{T'_n}{l_n} = 0$$

où les fonctions de charge T_1 et T'_n auront une des valeurs (18) (19) si c'est une travée de rive qui est surchargée et seront toujours nulles dans tout autre cas.

Toutes ces formules s'appliquent en particulier aux ponts à une seule travée; il suffit pour cela de supposer $n = 1$. On en déduira donc les formules connues pour le cas de la travée indépendante.

On a par exemple pour des portées égales $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots$

(51) $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -4, \quad \alpha_3 = +15, \quad \alpha_4 = -56, \quad \alpha_5 = +209, \quad \alpha_6 = -780 \ldots$

On a d'autre part pour les portées très-inégales $2\,l_1 = l_2 = l_3 \ldots$

(52) $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -3, \quad \alpha_3 = +11, \quad \alpha_4 = -41, \quad \alpha_5 = +153, \quad \alpha_6 = -571 \ldots$

Les ponts à poutres continues que l'on construit en pratique se rangent presque toujours entre les hypothèses extrêmes*.

Ces considérations font voir qu'inversement d'après les relations (29) (31) entre les coefficients et les moments, ces derniers affectent des signes alternés et diminuent très-rapidement à mesure qu'on s'éloigne d'appui en appui, d'un côté ou de l'autre, de la travée chargée**. Les explications que nous donnons plus loin au N° *LV* sur les surcharges les plus défavorables, donnent aux fig. (72) (116), une image encore plus claire de cette influence de la continuïté, qui n'atteint pratiquement que les travées les plus proches.

LIII. Méthode de calcul pour les poutres continues.

1. Formules générales.

Nous avons fait voir aux N^{os} *XLIX* et *L* que pour obtenir les moments de flexion et les efforts tranchants dans une poutre continue chargée d'une manière quelconque, il suffit de calculer les moments sur les appuis, la question étant alors ramenée au cas bien connu des travées indépendantes.

La théorie qui précède fait voir que le calcul des moments sur les appuis est fort simple dans le cas où une travée seule se trouve en charge, les autres travées étant supposées ne supporter ni poids ni charges, et nous nous servirons de cette théorie spéciale dans la suite pour tous nos calculs. Il convient toutefois de remarquer avant tout que dans ces formules particulières ainsi que dans les formules fondamentales plus générales (20) (21) et (24), les charges peuvent être des forces concentrées ou des poids uniformément répartis; les fonctions Σ deviennent dans ce dernier cas des intégrales, à calculer comme les exemples cités plus loin le feront voir.

Nous désignons comme précédemment par $\mathfrak{M}_x$ et $\mathfrak{V}_x$ le moment de flexion et l'effort tranchant dans la section de la travée (fig. 3) dont l'abscisse est x, evalués comme si cette travée était indépendante (coupée sur les appuis), par $(\mathfrak{M}_x)_p$ et $(\mathfrak{M}_x)_q$ et par $(\mathfrak{V}_x)_p$ et $(\mathfrak{V}_x)_q$ les parties de ces fonctions provoquées spécialement par la charge mobile p et la charge permanente q par mètre de voie; on aura donc:

(53) . . . . $\mathfrak{M}_x = (\mathfrak{M}_x)_p + (\mathfrak{M}_x)_q \qquad \mathfrak{V}_x = (\mathfrak{V}_x)_p + (\mathfrak{V}_x)_q$

Les équations fondamentales (6) et (10) établies pour les poutres continues s'écrivent alors:

(54) . . $\mathcal{M}_x = \dfrac{(l-x)\,\mathcal{M}_0 - x\,\mathcal{M}'_0}{l} + (\mathfrak{M}_x)_q + \left[\dfrac{(l-x)\,M + x\,M'}{l} + (\mathfrak{M}_x)_p\right]$***

(55) . . . . $\mathcal{V}_x = \dfrac{\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}'_0}{l} + (\mathfrak{V}_x)_q + \left[\dfrac{M - M'}{l} + (\mathfrak{V}_x)_p\right]$***

2. Formules simplifiées.

On pourrait à la rigueur se servir immédiatement de ces formules en calculant les moments sur les appuis à l'aide des équations générales (20) (21) (25) pour chaque combinaison des charges à considérer.

Mais il est beaucoup plus simple et plus facile de se servir de la théorie spéciale exposée au N^{os} (*LI*) (*LII*) en utilisant à cet effet le tableau ci-dessous (56) des valeurs les plus usuelles des fonctions $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{V}_x$, T et T', tirées de la théorie des ponts à travée indépendante.

Pour introduire ces valeurs dans les formules (54) (55) appliquées à la théorie spéciale des N^{os} (*LI*) et (*LII*) rappelons nous que d'après les nouveaux principes admis (qui sont aussi ceux que prescrit l'ordonnance autrichienne) les trois derniers cas de surcharge prévus au tableau (56) seront les seuls à considérer. Les formules (43) (44) et (45) peuvent alors s'écrire très-simplement.

* Les α ou β devront donc plus que tripler dans tous ces cas pratiques.

** Les α et β sont d'après (29) (31) des grandeurs proportionnelles aux moments d'appuis dans les parties non chargées de la poutre. La relation (8) appliquée à cette surcharge particulière que nous considérons, prouve que les efforts tranchants et les réactions d'appui qui en résultent, diminuent très-rapidement comme les moments.

*** Le dernier terme entre [ ] représente les effets de la charge mobile appliquée à la travée elle-même. Le terme qui précède représente l'effort tranchant de la charge permanente appliquée directement à cette même travée supposée indépendante. Enfin le premier terme concerne les moments sur les appuis provenant de toutes les charges à l'exclusion de la charge p.

(56) . . . **Valeurs les plus usuelles des fonctions $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{V}_x$, T, T', empruntées à la théorie des ponts à travée indépendante.**

Charge	$\mathfrak{M}_x = \Sigma_o^x P(x-a) - \frac{x\,\Sigma_o^l P(l-a)}{l}$	$\mathfrak{V}_x = \frac{\Sigma_o^l P(l-a)}{l} - \Sigma_o^x P$	$T = +6\,E.J.\mathfrak{t}$	$T' = -6\,E.J.\mathfrak{t}$
a, b, l, P	$x > a \ldots \mathfrak{M}_x = -\frac{P}{l}a(l-x) = -\frac{P}{l}(l-b)(l-x)$ $x = a \ldots\ldots \mathfrak{M}_x = -\frac{P}{l}a.b$ $x < a \ldots \mathfrak{M}_x = -\frac{P}{l}(l-a).x = -\frac{P}{l}b.x$	$x > a \ldots \mathfrak{V}_x = -P\frac{a}{l} = -P\frac{(l-b)}{l}$ $x < a \ldots \mathfrak{V}_x = +P\frac{b}{l} = +P\frac{(l-a)}{l}$	$\frac{P}{l}a(l-a)(2l-a) =$ $= \frac{P}{l}b(l-b)(l+b) = \frac{P}{l}b(l^2-b^2) =$ $= \frac{P}{l}a.b.(l+b)$	$\frac{P}{l}a(l-a)(l+a) = \frac{P}{l}a(l^2-a^2) =$ $= \frac{P}{l}b(l-b)(2l-b) =$ $= \frac{P}{l}a.b.(l+a)$
l, a_1, b_1, b_2, b_3, P_1, P_2, P_3	$\Sigma_o^x P(x-a) - \frac{x}{l}\Sigma_o^l P(l-a) =$ $= \Sigma_{l-x}^l P(b+x-l) - \frac{x}{l}\Sigma_o^l P.b$	$\frac{1}{l}\Sigma_o^l P(l-a) - \Sigma_o^x P =$ $= \frac{1}{l}\Sigma_o^l P.b - \Sigma_{l-x}^l.P$	$\frac{\Sigma_o^l P a(l-a)(2l-a)}{l}$	$\frac{\Sigma_o^l P a(l-a)(l+a)}{l}$
a_2, (b_2), a_1, b_1, p par m, l	pour $a_1 < x < a_2$ $-p\left[x(a_2-a_1)\left(1-\frac{a_2+a_1}{2l}\right) - \frac{1}{2}(x-a_1)^2\right]$ $= -\frac{1}{2}p\left[x(b_1^2-b_2^2) - (b_1+x-l)^2\right]$ pour $x \gtreqless a_1 \ldots \mathfrak{M}_x = -\frac{px}{2l}(b_1^2-b_2^2)$ pour $x \gtreqless a_2 \ldots \mathfrak{M}_x = -\frac{p(l-x)}{2l}(a_2^2-a_1^2)$	pour $a_1 < x < a_2$ $p\left[a_2 - x - \frac{a_2+a_1}{2l}(a_2-a_1)\right]$ pour $x \gtreqless a_1 \ldots \mathfrak{V}_x = p(a_2-a_1)\left[1-\frac{a_2+a_1}{2l}\right]$ pour $x \lesseqgtr a_2 \ldots \mathfrak{V}_x = -p(a_2-a_1)\frac{a_2+a_1}{2l}$	$\frac{p}{l}\left[a_2^2\left(l-\frac{a_2}{2}\right)^2 - a_1^2\left(l-\frac{a_1}{2}\right)^2\right] =$ $= \frac{p}{l}(a_2-a_1)\left(l-\frac{a_2+a_1}{2}\right)\left[l(a_2+a_1) - \frac{a_2^2+a_1^2}{2}\right]$	$\frac{p}{4l}\left[\left(l^2-a_1^2\right)^2 - \left(l^2-a_2^2\right)^2\right] =$ $= \frac{p}{l}(a_2-a_1)\frac{a_2+a_1}{2}\left[l^2 - \frac{a_2^2+a_1^2}{2}\right]$
a, b, p par m, l	pour $x > a$ $-\frac{p}{2l}\left[x(l-a)^2 - l(x-a)^2\right] =$ $= -\frac{p}{2l}\left[x b^2 - l(b+x-l)^2\right]$ pour $x \gtreqless a \ldots \mathfrak{M}_x = -\frac{px}{2l}b^2$	pour $x > a$ $\frac{p}{2l}(l-a)^2 - p(x-a) = p\frac{l^2-2lx+a^2}{2l}$ pour $x \gtreqless a \ldots \mathfrak{V}_x = \frac{p}{2l}(l-a)^2 = \frac{pb^2}{2l}$	$\frac{p(l-a)^2}{4l}\left[(l+a)^2 - 2a^2\right] =$ $= \frac{pb^2}{4l}(2l^2-b^2)$	$\frac{p(l-a)^2(l+a)^2}{4l} =$ $= \frac{pb^2}{4l}(2l-b)^2$
a, b, p par m, l	pour $x < a$ $-\frac{p}{2l}\left[(l-x)a^2 - l(a-x)^2\right] =$ $= -\frac{p}{2l}\left[(l-x)(l-b)^2 - l(l-x-b)^2\right]$ pour $x \lesseqgtr a \ldots \mathfrak{M}_x = -\frac{px}{2l}a^2$	pour $x < a$ $-\left[\frac{pa^2}{2l} - p(a-x)\right] = -p\frac{b^2+2lx-l^2}{2l}$ pour $x \lesseqgtr a \ldots \mathfrak{V}_x = -\frac{pa^2}{2l} = -\frac{p(l-b)^2}{2l}$	$\frac{pa^2}{4l}(2l-a)^2 =$ $= \frac{p(l-b)^2(l+b)^2}{4l}$	$\frac{pa^2}{4l}(2l^2-a^2) =$ $= \frac{p(l-b)^2}{4l}\left[(l+b)^2 - 2b^2\right]$
$\mathfrak{M}_x$, x, z, $^1/_2$ l, p par m, l	$-\frac{p}{2}x(l-x)$ pour $x = \frac{1}{2} \ldots \mathfrak{M}_{l/2} = -\frac{p}{8}l^2 = -\mathcal{M}$ par suite $\ldots \mathfrak{M}_x = -\mathcal{M}.\left[1-\left(\frac{2z}{l}\right)^2\right]$	$p\left(\frac{1}{2}-x\right)$	$\frac{1}{4}pl^3$	$\frac{1}{4}pl^3$

Nous savons (51) (52) que les coefficients α_1 α_2 α_3 ... et β_1 β_2 β_3 ... qui ne dépendent que des longueurs de travées ont des signes alternés et croissent très-rapidement en valeur numérique. Afin de mettre ces particularités des coefficients en évidence, nous posons pour la travée qui est chargée :

(57) . . . . $\left(-\frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \mu \qquad \left(-\frac{\beta}{\beta'}\right) = \nu$

où lorsqu'il s'agit d'une travée de rive, l'une de ces deux valeurs devient infinie ainsi que nous l'avons déjà mentionné (36) (37) puisque α_0 et β_0 sont nuls. Avec les nouveaux coefficients on aura :

1. pour une travée intermédiaire (43) chargée seule :

(58) . . . . $M = \frac{\nu T - T'}{l(\mu\nu - 1)} \qquad M' = \frac{\mu T' - T}{l(\mu\nu - 1)}$

2. pour une travée de rive (44) (45) chargée seule

(59) . . . . . première travée: $M = 0 \quad M' = \frac{T'}{\nu l}$; dernière travée: $M = \frac{T}{\mu l} \quad M' = 0$

nous savons que les coefficients toujours positifs μ et ν ont des valeurs supérieures à 2 et généralement comprises entre 3 et 4*.

En substituant maintenant les valeurs tirées du tableau (56) dans les formules qui précèdent on arrive aux formules suivantes concernant les charges uniformément réparties :

1. Valeurs des moments sur les appuis provoqués par la surcharge seule de la travée considérée,

(60) . . . . M et M' . . . . pour la charge p par *m*.

Travée	On a en surchargeant (p par m) la portée entière — Moment M	Moment M'
première	$M = 0$	$M' = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{pl^2}{4}$
intermédiaire	$M = \frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1} \cdot \frac{pl^2}{4}$	$M' = \frac{\mu - 1}{\mu\nu - 1} \cdot \frac{pl^2}{4}$
dernière	$M = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{pl^2}{4}$	$M' = 0$

NB. Pour la charge p par *m* qui figure dans ces formules, on pourra considérer soit la charge permanente, soit la charge mobile (échelle a de l'ordonnance ** soit enfin la somme des deux charges par *m*.

* Dans le cas déjà mentionné où toutes les travées sont égales, on trouve :

Travées . . . . Nr.	2	3	4	5	6 . . . .
Valeur μ = ...	$\frac{4}{1}$ =	$\frac{15}{4}$ =	$\frac{56}{15}$ =	$\frac{209}{56}$ =	$\frac{780}{209}$ = ...
	4·00000	3·75000	3·73333	3·73214	3·73206 . . . .

Ce sont les réduites successives de la fraction continue $\mu = 4 - {}^1/_4 - {}^1/_4 - {}^1/_4 -$ . . . .

Dans le cas au contraire où $2\,l_1 = l_2 = l_3 = \ldots$ on trouve :

Travées . . . . Nr.	2	3	4	5	6 . . . .
Valeur μ = ...	$\frac{3}{1}$ =	$\frac{11}{3}$ =	$\frac{41}{11}$ =	$\frac{153}{41}$ =	$\frac{571}{153}$ = ...
	3·00000	3·66667	3·72727	3·73171	3·73203 . . . .

Ces deux cas examinés comprenant entre eux presque toutes les répartitions de travées admises en pratique on voit que μ sera toujours voisin de 3·7.

** Notre Tab. V du Tome II donne les moments ${}^1/_2$ (${}^1/_4$ pl^2) tout calculés pour toutes les portées.

2. Valeurs de l'effort tranchant provoquées par la surcharge seule de la travée considérée, sur une section quelconque:

(61) . . . . $(V_a)_p = \frac{M - M'}{l} + (\mathfrak{V}_a)_p$ . . pour la charge p par *m*.

Travée	$\langle$ a $\rangle\langle$ b $\rangle$, charge sur b, p par m, $\langle$ l $\rangle$	$\langle$ a $\rangle\langle$ b $\rangle$, charge sur a, p par m, $\langle$ l $\rangle$	$\langle$ a $\rangle\langle$ b $\rangle$, charge sur l, p par m, $\langle$ l $\rangle$
première	$+\frac{pb^2}{2l}\left[1-\frac{1}{2\nu}\left(1+\frac{a}{l}\right)^2\right]$	$-\frac{pa^2}{2l}\left[1+\frac{1}{2\nu}\left(2-\frac{a^2}{l^2}\right)\right]$	$+\frac{pl}{2}\left[\frac{b-a}{l}-\frac{1}{2\nu}\right]$
intermédiaire	$+\frac{pb^2}{2l}\left[1-\frac{(\nu+1)\frac{a^2}{l^2}+\frac{\mu-\nu}{2}\left(1+\frac{a}{l}\right)^2}{\mu\nu-1}\right]$	$-\frac{pa^2}{2l}\left[1-\frac{(\mu+1)\frac{b^2}{l^2}+\frac{\nu-\mu}{2}\left(1+\frac{b}{l}\right)^2}{\mu\nu-1}\right]$	$+\frac{pl}{2}\left[\frac{b-a}{l}+\frac{\nu-\mu}{2(\mu\nu-1)}\right]$
dernière	$+\frac{pb^2}{2l}\left[1+\frac{1}{2\mu}\left(2-\frac{b^2}{l^2}\right)\right]$	$-\frac{pa^2}{2l}\left[1-\frac{1}{2\mu}\left(1+\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$+\frac{pl}{2}\left[\frac{b-a}{l}+\frac{1}{2\mu}\right]$

NB. Pour la charge p par *m* qui figure dans ces formules on aura à considérer des valeurs variant suivant la longueur surchargée (échelle **b** de l'ordonnance * autrichienne).

Les rapports a : l et b : l sont généralement des fractions ordinaires simples choisies d'après la division des mailles ou prises comme parties aliquotes (décimales) de la portée. Dans chaque cas particulier où l, μ, ν, p sont connus, on pourra donc à l'aide des formulaires obtenir facilement les valeurs M, M' et V_a dûs à la charge p; nous allons faire voir comment on devra les utiliser, pour les formules générales (54) (55) dont on aura à se servir.

LIV. Procédés de calcul expliqués sur un exemple.

1. **Pour obtenir les moments sur les appuis** $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ **ou** $\mathcal{M}_0$ $\mathcal{M}'_0$, **résultant d'une combinaison quelconque de travées chargées** (charges permanentes avec ou sans la charge mobile d'après l'échelle **a**) il est commode de se servir de la théorie des N^{os} (*LI*) et (*LII*) en calculant successivement au moyen des formules (43) 44) (45) (60) ainsi que (29) (31) tous les moments d'appui M_1 M_2 M_3 . . . . M_{n-1} provoqués par la charge appliqué à chacune des travées isolément, et en réunissant en suite tous les résultats dans un tableau.

Pour avoir les moments sur les appuis $\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$ . . . $\mathcal{M}_{n-1}$ résultant d'une combinaison quelconque de travées chargées, il suffira d'ajouter algébriquement les valeurs, du tableau qui lui correspondent.

Pour calculer les moments M et M' d'autre part qui sont provoqués par la surcharge partielle d'une seule travée (échelle **b**) il suffit d'appliquer les formules (58) et (59) en choisissant les valeurs convenables de T et T' considérées comme variables avec l'abscisse x = a limitant la charge. Ces fonctions des charges (18) (19) résultent ici de l'intégration qui remplace la sommation Σ des premières formules et qui fournit les valeurs du tableau (56). Il ne sera toutefois pas nécessaire de calculer les moments M et M' eux-mêmes, car en se servant de la formule (55) pour calculer $\mathcal{V}_x$ on évaluera le dernier terme entre parenthèses, à l'aide du formulaire (61) et on l'ajoutera à $(\mathfrak{V}_x)_q = q\left(\frac{1}{2}l - x\right)$ et à la constante $(\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}') : l$ que nous savons déterminer.

2. **On a par exemple pour un pont à trois travées avec** $l_1 = \frac{8}{10}l$, $l_2 = l$, $l_3 = l_1$ et avec les charges p_1 p_2 et p_3 qui leur incombent par *m* de voie, d'après (46) et (60)

(62) . . . $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ $\qquad \alpha_2 = \beta_2 = -3{\cdot}6$ $\qquad \alpha_3 = \beta_3 = +14{\cdot}95$

* Notre Tab. V du Tome II donne les moments $^1/_2\,pa^2$ ou $^1/_2\,pb^2$ tout calculés pour toutes longueurs l à prendre pour a ou b.

(63) . Barême des moments sur les appuis pour la surcharge d'une travée seule.

Charge	M_1	M_2
p_1 par m (1ʳᵉ travée)	* $M_1 = \begin{cases} +0{\cdot}481605\left(p_1 \frac{l_1^2}{8}\right) \\ +0{\cdot}308227\left(p_1 \frac{l^2}{8}\right) \end{cases}$	$M_2 = \begin{cases} -0{\cdot}133779\left(p_1 \frac{l_1^2}{8}\right) \\ -0{\cdot}085619\left(p_1 \frac{l^2}{8}\right) \end{cases}$
p_2 par m (2ᵉ travée)	$M_1 = +\ 0{\cdot}434783\left(p_2 \frac{l^2}{8}\right)$	$M_2 = +\ 0{\cdot}434783\left(p_2 \frac{l^2}{8}\right)$
p_3 par m (3ᵉ travée)	* $M_1 = \begin{cases} -0{\cdot}133779\left(p_3 \frac{l_3^2}{8}\right) \\ -0{\cdot}085619\left(p_3 \frac{l^2}{8}\right) \end{cases}$	$M_2 = \begin{cases} +0{\cdot}481605\left(p_3 \frac{l_3^2}{8}\right) \\ +0{\cdot}085619\left(p_3 \frac{l^2}{8}\right) \end{cases}$

Les coefficients numériques qui figurent dans ces formules ne dépendent que des α et β c'est-à-dire de la répartition des longueurs de travées. Nous en donnons les valeurs calculées d'avance dans les Tab. XX à XLV du Tome II, pour les ponts usuels en pratique (avec travées intermédiaires égales à l et travées de rive un peu moindres égales à θ l); les moments qu'ils multiplient sont les moments de flexion aux milieu des travées considérées comme indépendantes**.

Si l'on admet par exemple d'après l'échelle ● de l'ordonnance autrichienne

$$(64) \quad \ldots \quad \begin{cases} l = 100^m \qquad p_1 = p_3 = 4^t4 \qquad p_2 = 4^t1 \\ \text{d'où suit} \ldots p_1 \frac{l^2}{8} = 5500^{mt} \ldots \text{et} \ldots p_2 \frac{l^2}{8} = 5125^{mt} \end{cases}$$

le barême (63) pour la surcharge d'une travée seule, devient:

(65) . . . . Moments sur les appuis pour la charge mobile.

(1ʳᵉ travée chargée)	$M_1 = +\ 1695{\cdot}25^{mt}$	$M_2 = -\ 470{\cdot}90^{mt}$
(2ᵉ travée chargée)	$M_1 = +\ 2228{\cdot}26^{mt}$	$M_2 = +\ 2228{\cdot}26^{mt}$
(3ᵉ travée chargée)	$M_1 = -\ 470{\cdot}90^{mt}$	$M_2 = +\ 1695{\cdot}25^{mt}$

On en déduit par voie de simple addition algébrique le nouveau barême:

(66) . . . . Moments sur les appuis pour la charge mobile.

(1ʳᵉ et 2ᵉ travées chargées)	$\mathcal{M}_1 = +\ 3923{\cdot}51^{mt}$	$\mathcal{M}_2 = +\ 1757{\cdot}36^{mt}$
(2ᵉ et 3ᵉ travées chargées)	$\mathcal{M}_1 = +\ 1757{\cdot}36^{mt}$	$\mathcal{M}_2 = +\ 3923{\cdot}51^{mt}$
(1ʳᵉ et 3ᵉ travées chargées)	$\mathcal{M}_1 = +\ 1224{\cdot}35^{mt}$	$\mathcal{M}_2 = +\ 1224{\cdot}35^{mt}$

* Les deux expressions citées ici présentent chacune des avantages spéciaux sur lesquels nous reviendrons. On n'en prendra naturellement qu'une seule suivant que l'on voudra se servir de l_1 ou de l.

** Comme p_1 et ($l_1 = 0{\cdot}8\,l$), p_2 et ($l_2 = l$), p_3 et ($l_3 = 0{\cdot}8\,l$) sont des groupes de deux valeurs qui se correspondent, quant à l'échelle ● de l'ordonnance autrichienne, on pourra prendre les moments $^1/_8\, p_1 l_1^2$, $^1/_8\, p_2 l_2^2$, $^1/_8\, p_3 l_3^2$ déjà tout calculés dans la Tab. V du Tome II; c'est pour cette raison que l'on a cité au barême (63) la première sorte de coefficients concernant l_1 et l_3. Ce procédé de calcul simplifié sera utilisé à l'exemple du N° *LIX*.

On a réalisé ainsi toutes les combinaisons de surcharge dont on a besoin pour des poutres de ce genre, à trois travées*. Les moments trouvés (65) (66) doivent être augmentés de ceux que provoque la charge permanente et qui pourront être calculés également à l'aide du barême (63). Si l'on suppose par exemple que l'on ait sur les trois travées:

charge permanente par *m* de voie . . $q_1 = q_3 = 3^t5$ $q_2 = 4^t3$

on aura pour les moments . . . . $\left(q_1 \frac{l^2}{8}\right) = 4375^{mt}$ $\left(q_2 \frac{l^2}{8}\right) = 5375^{mt}$

Les moments à ajouter pour la charge permanente seront donc en résumé:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = 0{\cdot}308227\left(q_1 \frac{l^2}{8}\right) + 0{\cdot}434783\left(q_2 \frac{l^2}{8}\right) - 0{\cdot}085619\left(q_1 \frac{l^2}{8}\right) = 3310{\cdot}87^{mt}$$

En ajoutant ce résultat aux moments déjà trouvés pour la charge mobile (65) (66) on obtient pour le calcul d'après les formules (54) (55) le barême général des:

(67) . Moments sur les appuis résultant de l'ensemble des charges permanentes et mobiles pour toutes les combinaisons de travées chargées sur le total de leur portée.

**		mt	mt
1		$\mathcal{M}_1$ = 5006·12	$\mathcal{M}_2$ = 2839·97
2		$\mathcal{M}_1$ = 5539·13	$\mathcal{M}_2$ = 5539·13
3		$\mathcal{M}_1$ = 2839·97	$\mathcal{M}_2$ = 5006·12
4		$\mathcal{M}_1$ = 7234·38	$\mathcal{M}_2$ = 5068·23
5		$\mathcal{M}_1$ = 5068·23	$\mathcal{M}_2$ = 7234·38
6		$\mathcal{M}_1$ = 4535·22	$\mathcal{M}_2$ = 4535·22

Ce barême établi pour un exemple de pont avec répartition symétrique de longueurs de travée, est naturellement disposé symétriquement lui-même; mais la méthode serait absolument la même pour une répartition non symétrique quelconque.

3. L'épure connue des moments de flexion qui sert à la distribution des fers dans les bandes s'obtiendra directement à l'aide du barême (67); on utilisera les six combinaisons (et la symétrie s'il y a lieu) pour porter les moments trouvés en ordonnées au-dessus des appuis et on réunira en suite les points obtenus par des arcs de parabole tracés avec des patrons construits comme pour des travées indépendantes***.

4. L'épure des efforts tranchants au contraire, se compose de courbes de degré supérieur; on ne pourra les construire qu'en calculant un nombre suffisant de leurs ordonnées pour des abscisses que l'on choisira d'après la répartition des mailles de la poutre, ou en divisant

* Nous supposons ici le lecteur initié à la pratique des ponts à poutres continues et des combinaisons de surcharge, dont nous donnons plus loin la théorie complète.

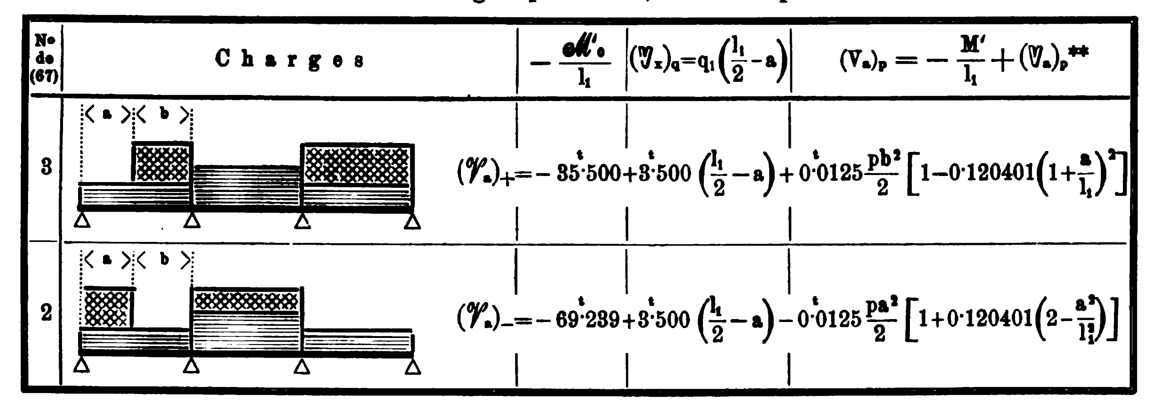
** Nous avons laissé ici les combinaisons dans l'ordre où elles ont été établies; on trouvera un système plus rationnel dans notre barême des charges au N° (*LVII*).

*** Il faudra pour chaque longueur de travée deux paraboles l'une pour la charge q, l'autre pour la charge (p + q); on aura donc ici (comme dans la plupart des cas pratiques) en tout quatre paraboles à construire répondant aux charges q_1 $(p_1 + q_1)$ q_2 $(p_2 + q_2)$ par mètre comme le montre la figure (68).

Chaque parabole découpée sur carton fin s'employe comme règle courbe; on la fait glisser sur l'épure de façon que son axe restant perpendiculaire à la ligne des appuis, ses côtés fig. (69) viennent à passer par les

la portée en un certain nombre de parties égales*. Ce calcul s'effectuera en se servant des formules (55) (61) pour lesquelles on utilisera les trois premières combinaisons de charges du tableau (67); on aura ainsi pour l'exemple considéré:

(70) . Valeurs des plus grands efforts tranchants positifs et négatifs résultant de l'ensemble des charges par voie, dans la première travée.



N° de (67)	Charges	$-\frac{\mathcal{M}'_0}{l_1}$	$(\mathfrak{V}_x)_q = q_1\left(\frac{l_1}{2}-a\right)$	$(V_a)_p = -\frac{M'}{l_1} + (\mathfrak{V}_a)_p$**
3	⟨ a ⟩⟨ b ⟩	$(\mathcal{V}_a)_+ = -35^t500 + 3^t500\left(\frac{l_1}{2}-a\right) + 0^t0125\frac{pb^2}{2}\left[1-0{\cdot}120401\left(1+\frac{a}{l_1}\right)^2\right]$		
2	⟨ a ⟩⟨ b ⟩	$(\mathcal{V}_a)_- = -69^t239 + 3^t500\left(\frac{l_1}{2}-a\right) - 0^t0125\frac{pa^2}{2}\left[1+0{\cdot}120401\left(2-\frac{a^2}{l_1^2}\right)\right]$		

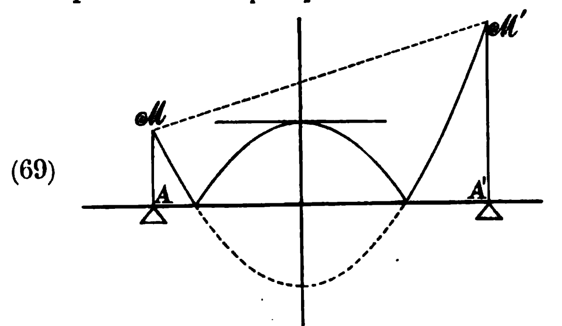
extrémités $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ des ordonnées A $\mathcal{M}$ et A' $\mathcal{M}'$ représentant les moments sur les appuis que l'on considère. Après avoir tracé ainsi l'arc de parabole $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ on en rabat vers le haut toute la partie située au-dessous de la ligne des appuis, concernant les moments négatifs (région médiane).

(68)

L'exactitude de cette construction de la courbe représentative des moments de flexion au moyen du patron parabolique, ressort de l'équation (54), d'après laquelle les ordonnées de $\mathfrak{M}_x$ doivent être portées à partir de la droite $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ vers le bas, ainsi que de cette propriété bien connue de la parabole: le paramètre et la direction de l'axe de la courbe restent invariables, lorsqu'on ajoute ses ordonnées à celle d'une droite quelconque.

On remarquera qu'un patron parabolique construit comme il a été dit (68) ne dépend que de la charge par mètre et non de la portée, ou en d'autres termes que la construction (68) appliquée à des portées diverses l_1 ou l_2 avec une seule et même charge p par mètre, ne donne qu'un seul et même patron parabolique. Il faudra du reste, pour que les patrons construits remplissent les intervalles $\mathcal{M}$ $\mathcal{M}'$ auxquels il sont destinés, que l'on prolonge convenablement leurs côtés au-delà des appuis. Nous renvoyons à cet égard à la construction rapide (137) que nous donnons plus loin.

(69)



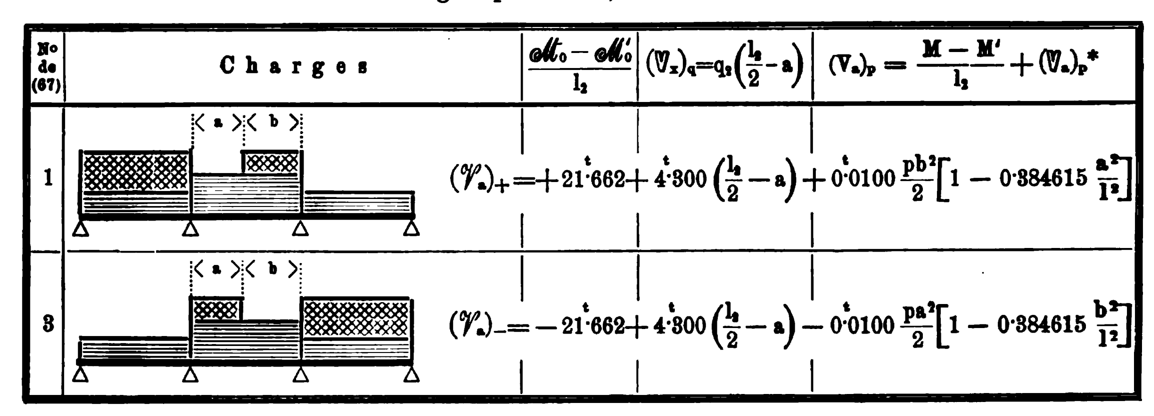
Pour les ponts-routes de grandes portées on a une seule surcharge par mètre (rassemblements) à considérer et la charge permanente par mètre est à peu-près constante pour tout le pont. On n'aura alors à construire en tout que deux patrons paraboliques.

Dans tous les cas, qu'il s'agisse d'un pont de chemin de fer ou d'un pont-route, les tracés se feront toujours de la même manière. En se servant de papier-millimètre on oriente facilement les patrons sur l'épure.

* Les contours cherchés ayant une forme régulière avec courbure très-douce, il suffit en pratique de diviser la portée en 5 parties égales. Ce sera alors (en outre des efforts aux appuis) deux ou trois points intermédiares au plus (et non 4) que l'on aura à déterminer. Dans notre exemple du N° *LIX* nous avons toutefois divisé toutes les travées en dix parties égales, précisément pour prouver qu'un aussi grand nombre de points n'est pas nécessaire.

** Où l'on prendra les charges variables p de l'échelle 𝔟 de l'ordonnance autrichienne (Tab. V. tome II).

(71) . **Valeurs des plus grands efforts tranchants positifs et négatifs résultant de l'ensemble des charges par voie, dans la travée intermédiaire.**



No de (67)	Charges	$\frac{\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}'_0}{l_2}$	$(V_x)_q = q_2\left(\frac{l_2}{2} - a\right)$	$(V_a)_p = \frac{M - M'}{l_2} + (V_a)_p$ *
1		$(\mathcal{V}_a)_+ = +21\overset{t}{\cdot}662$	$+ 4\overset{t}{\cdot}300\left(\frac{l_2}{2} - a\right)$	$+ 0\overset{t}{\cdot}0100\,\frac{pb^2}{2}\left[1 - 0{\cdot}384615\,\frac{a^2}{l^2}\right]$
3		$(\mathcal{V}_a)_- = -21\overset{t}{\cdot}662$	$+ 4\overset{t}{\cdot}300\left(\frac{l_2}{2} - a\right)$	$- 0\overset{t}{\cdot}0100\,\frac{pa^2}{2}\left[1 - 0{\cdot}384615\,\frac{b^2}{l^2}\right]$

Les calculs à effectuer avec ces formules (dont les deux dernières sont équivalentes à cause de la symétrie) sont tout-à-fait analogues à ceux qui concerneraient la travée indépendante, et le surcroît de complication résultant de la continuïté, ne se traduit que par la présence d'une constante comme premier terme, et par celle d'un facteur spécial entre [ ] au dernier terme, les moments $\frac{1}{2}\,p\,b^2$ et $\frac{1}{2}\,p\,a^2$ n'étant autres que les moments tournants de notre Tab. V au Tome II, qui sont calculés d'avance.

Les constantes $(\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}'_0) : l$ résultent immédiatement des moments déjà calculés au tableau (67); le dernier facteur entre [ ] exigera seul un supplément de travail résultant de la continuïté. Remarquons à ce sujet que d'après (61) ce facteur peut généralement contenir après l'unité deux termes au plus et que les coefficients qui y entrent sont des fonctions de μ et de ν, faciles à calculer même pour un pont à travées quelconques; dans le cas présent comme dans tous les cas où $\mu - \nu = o$, ainsi que dans le cas d'une travée de rive, ils se réduisent à un seul. Enfin pour tous les ponts usuels avec travées intermédiaires égales à l et travées de rive un peu moindres égales à $\theta\,l$, on trouvera dans nos Tab. XX à XLV du Tome II les coefficients cherchés, tout calculés en fonction de θ.

LV. Théorie des charges les plus défavorables pour les bandes.

1. Les deux points d'inflexion fixes dans une travée intermédiaire.

Nous nous sommes contentés en traitant l'exemple ci-dessous, d'admettre comme le fait l'ordonnance autrichienne, que les surcharges les plus défavorables à considérer pour les bandes devront consister en un certain nombre de combinaisons de travées chargées sur le total de leur portée, tandis que pour les efforts tranchants on devra tenir compte d'une surcharge partielle de la travée que l'on considère, et sur les autres travées, d'une des combinaisons des charges dont nous venons de parler.

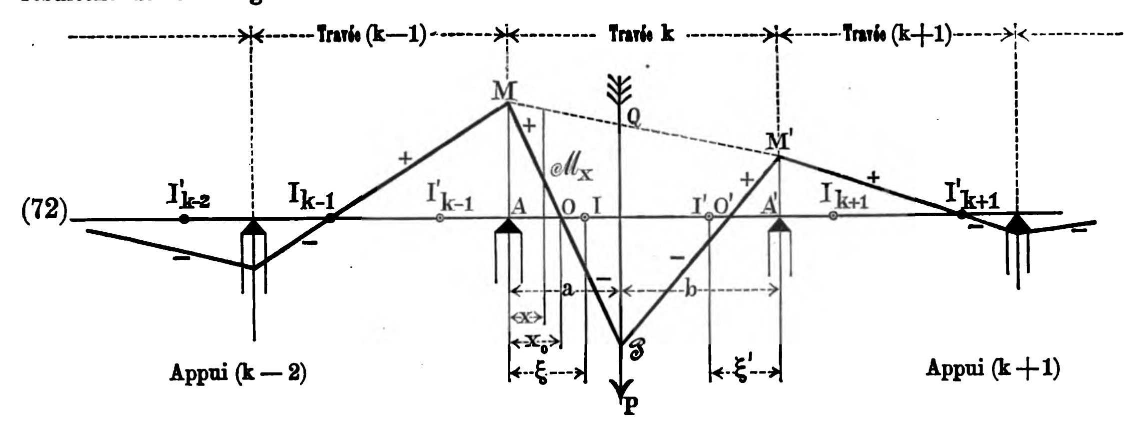
Cette façon de procéder admise par la plupart des constructeurs en France et en Autriche suffit entièrement en pratique. Il y a toutefois des calculateurs, qui d'après les exigences d'une théorie plus exacte, veulent admettre même pour les bandes des surcharges qui ne s'étendent qu'à une partie de la travée que l'on considère. Les barêmes, épures et tableaux de moments fléchissants ainsi déterminés et publiés par certains auteurs, ont même parfois été utilisés en pratique, l'auteur à par suite jugé nécessaire de reprendre ici à nouveau la théorie exacte des surcharges les plus défavorables, afin de faire voir que les principes admis en général par les ingénieurs et confirmés par l'ordonnance, répondent bien aux exigences de la construction**.

C'est encore la théorie exposée aux Nos (*LI*) et (*LII*), qui appliquée au cas d'une force unique P agissant sur la poutre supposée non chargée, va nous donner rapidement tous les

* Où l'on prendra les charges variables p de l'échelle b de l'ordonnance autrichienne (Tab. V, Tome II).

** Nous faisons voir du reste, en traitant notre exemple du No *LIX*, que la seule considération des combinaisons de travées chargées sur le total de la portée, suffit pour pouvoir, sans calculs nouveaux, tracer immédiatement à l'aide des seuls patrons paraboliques, tous les contours enveloppes des moments de flexion, y compris ceux qui résulteraient des surcharges partielles. Nous montrons que les mêmes paraboles qui donnent les courbes des maxima d'un côté d'une travée, donnent simultanément les courbes des minima de l'autre. Notre tracé donne donc à la fois tous les contours enveloppes des maxima et minima.

renseignements cherchés. La fig. (72) ci-dessous représente l'épure des moments de flexion qui résultent de la charge P considérée:



Les ordonnées représentatives des moments sur les appuis M et M' de la travée k considérée, étant AM et A'M', on sait d'après (6) (54) que pour avoir l'épure des moments dans la travée il faut porter en ordonnées à partir de la droite MM' vers le bas, les moments $\mathfrak{M}_x$ résultants de la charge P et calculés absolument comme si la travée était indépendante (56). On obtiendra ainsi le contour représentatif $M\mathfrak{F}M'$ pour la travée chargée*. Pour les travées non chargées (k—1) (k—2) (k—3) . . . situées vers la gauche, les moments seront représentés par les lignes droites qui joignent (54) les extrémités des ordonnées représentant les moments sur les appuis et ces derniers s'obtiendront (29) au moyen des coefficients α par les relations

$$(73) \quad \ldots \quad \frac{M}{\alpha} = \frac{M_{k-1}}{\alpha_{k-1}} = \frac{M_{k-2}}{\alpha_{k-2}} = \frac{M_{k-3}}{\alpha_{k-3}} = \ldots = \frac{M_2}{\alpha_2} = \frac{M_1}{1}$$

Les points d'intersection I_{k-1} I_{k-2} . . . . des droites en question avec la ligne des appuis, divisent les longueurs des travées correspondantes dans le rapport des coefficients α propres aux appuis. Ces points de divison ne dépendent donc que les longueurs de travées** et non de la charge P; on les appelle **les points fixes d'inflexion sur la gauche** des travées considérées.

Pour les travées non chargées (k + 1) (k + 2) (k + 3) . . . . situées sur la droite, on a de même (31) avec les coefficients β

$$(74) \quad \ldots \quad \frac{M'}{\beta'} = \frac{M_k}{\beta_k} = \frac{M_{k+1}}{\beta_{k+1}} = \frac{M_{k+2}}{\beta_{k+2}} = \ldots \ldots = \frac{M_{n-2}}{\beta_{n-2}} = \frac{M_{n-1}}{1}$$

et on en tire la spécification **des points fixes d'inflexion** I'_{k+1} I'_{k+2} . . . . etc. **sur la droite** de ces nouvelles travées.

Chaque travée considérée séparement possède ses deux points fixes d'inflexion de gauche et de droite, lesquels ne dépendent que de la répartition des longueurs de travées et jouent un rôle très-important dans toute cette théorie. En particulier la travée k fig. (72) a ses deux points fixes d'inflexion I et I' pour lesquels on aura avec les notations précédentes:

$$(75) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{AI}{A'I} = -\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{1}{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad AI = \xi = \dfrac{l}{\mu + 1} \\[2ex] \dfrac{A'I'}{AI'} = -\dfrac{\beta'}{\beta} = \dfrac{1}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad A'I' = \xi' = \dfrac{l}{\nu + 1} \end{cases}$$

Le point I est le point fixe où viennent s'annuler les ordonnées de toutes les droites représentatives de la travée k qui correspondent à des charges additionnelles agissant sur les travées situées à droite de l'appui A', tandis que le point I' jouit des qualités analogues pour toutes les charges additionnelles agissant à gauche de l'appui A.

* Le contour représentatif de $\mathfrak{M}_x$ serait, dans les cas de plusieurs forces P un polygone, dans le cas d'une charge uniforme couvrant le portée, une parabole . . . etc., suivant les indications du tableau (56).

** Ces points restent donc les mêmes dans les travées non chargées, si au lieu d'une force unique P on en a plusieurs, ou si même la travée chargée supporte des poids isolés.

Le travée A A' est donc divisée par les points I I' en trois régions pour lesquelles la question des surcharges les plus défavorables doit être examinée séparément: il faudra y distinguer en outre les moments produits par les charges appliquées à la travée elle-même, et ceux qui sont produits par les charges agissant sur les autres travées.

2. Charges appliquées à la travée elle-même, recherche des points de passage où le moment s'annule.

Considérons de nouveau l'épure fig. (72) représentant l'action de la charge P sur la poutre ne supportant ni poids ni charges. On a d'après les formules (58) après substitution des valeurs de T et T' titrées de (56):

$$(76) \quad . \quad . \quad M = \frac{P a b}{l} \, \frac{\nu (l + b) - (l + a)}{l (\mu \nu - 1)} \qquad M' = \frac{P a b}{l} \, \frac{\mu (l + a) - (l + b)}{l (\mu \nu - 1)}$$

Dans ces formules* le premier facteur ou $(-\mathfrak{M}_x)$, est égal en valeur absolue, au moment de flexion que l'on obtiendrait au point d'application de la force P, si la travée était indépendante; ce moment est représenté sur l'épure (72) par la longueur $Q\mathfrak{F}$ portée à partir de la droite M M' vers le bas. Les deuxièmes facteurs (76) ne dépendant pas de la charge P mais seulement de son point d'application, pour toutes les positions du quel ils restent toujours positifs puisque μ et ν sont supérieurs à 2. Pour la même raison leur valeur numérique est toujours inférieure à 1 car les inégalités:

$$\nu (l + b) - (l + a) < l (\mu \nu - 1) \qquad \mu (l + a) - (l + b) < l (\mu \nu - 1)$$

se réduisent aux inégalités à premier membre négatif évidentes:

$$(78) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \nu (l + b - \mu l) < a \qquad \mu (l + a - \nu l) < b$$

On en conclut pour toutes les poutres continues la règle générale suivante:

Une force isolée P produit toujours un moment négatif au point d'application, et deux moments positifs aux appuis adjacents à la travée chargée; les trois moments deviennent nuls lorsque la force P s'approche de l'un de ces appuis.

Considérons maintenant les deux points de passage O et O' où le moment s'annulle. Les droites $M\mathfrak{F}$ et $M'\mathfrak{F}$ qui fournissent ces points d'intersection ainsi que toute la fig. (72) étant disposées symétriquement vers la gauche et vers la droite, il suffira évidemment d'étudier le point O, car tout ce qu'on aura dit pour celui-ci pourra se répéter en sens inverse pour le point O'. Le moment M_x produit par la force P sur une section quelconque comprise entre M et $\mathfrak{F}$ et dont l'abscisse est x sera d'après (54) (56):

$$(79) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad M_x = \frac{(l - x) M + x M'}{l} - \frac{P}{l} b x$$

En substituant les valeurs (76) de M et M' on trouve après réduction:

$$(80) \quad M_x = -\frac{P . b}{l (\mu \nu - 1)} \left[[(l-x)(\nu+1) - x(\mu+1)] \frac{a^2}{l^2} - [(l-x)(2\nu-1) + x(\mu-2)] \frac{a}{l} + (\mu\nu-1) x \right]$$

Il en résulte qu'entre l'abscisse a du point d'application de P et l'abscisse x_0 du point O où $M_x = o$, on aura l'équation du second degré en a:

$$(81) \quad . \quad \left[l(\nu + 1) - x_0 (\mu + \nu + 2) \right] \frac{a^2}{l^2} - \left[l (2\nu - 1) - x_0 (2\nu - \mu + 1) \right] \frac{a}{l} + (\mu\nu - 1) x_0 = 0$$

Si c'est a qui est donné, l'équation est du premier degré en x_0 et on en tire immédiatement:

$$(82) \quad x_0 = a \frac{(2\nu - 1) - (\nu + 1) \frac{a}{l}}{(\mu\nu - 1) + (2\nu - \mu + 1) \frac{a}{l} - (\mu + \nu + 2) \frac{a^2}{l^2}} = l \cdot \frac{\mathfrak{N} \frac{a}{l} - \mathfrak{N}' \frac{a^2}{l^2}}{\mathfrak{D} + \mathfrak{D}' \frac{a}{l} - \mathfrak{D}'' \frac{a^2}{l^2}}$$

où pour simplifier nous désignons par $\mathfrak{N}\ \mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{D}\ \mathfrak{D}'\ \mathfrak{D}''$ les fonctions de ν et μ qui entrent dans les coefficients des puissances de (a : l) au numérateur et au dénominateur.

---

* En posant $\zeta = I I' = l - \xi - \xi' = \frac{\mu \nu - 1}{(\mu + 1)(\nu + 1)} l = (\mu \nu - 1) \frac{\xi \xi'}{l}$, puis introduisant ainsi ζ et avec (75) les valeurs ξ, ξ' à la place de μ et ν on trouve les formules souvent citées en Allemagne:

$$(77) \quad . \quad . \quad . \quad M = \frac{P a b \xi}{l^2 \zeta} [b + (l - 3 \xi')] \qquad M' = \frac{P a b \xi'}{l^2 \zeta} [a + (l - 3 \xi)]$$

Si la force P s'avance d'une manière continue d'un appui vers l'autre c'est-à-dire depuis $a = o$ jusqu'à $a = l$, le point de passage O se ment d'une manière continue de A en I son abscisse croissant:

(83) . . . . de $x_0 = o$ jusqu'à . . $x_0 = \xi = \frac{l}{\mu + 1}$

En effet ces valeurs extrêmes résultent immédiatement de la formule (82); on trouve en outre en différentiant cette même formule par rapport à a:

$$(84) \;.\; \frac{dx_0}{da} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{N} - 2\mathfrak{D}\mathfrak{N}'\frac{a}{l} + (\mathfrak{D}''\mathfrak{N} - \mathfrak{D}'\mathfrak{N}')\frac{a^2}{l^2}}{\left(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'\frac{a}{l} - \mathfrak{D}''\frac{a^2}{l^2}\right)^2} = (\mu\nu - 1)\frac{(2\nu - 1) - 2(\nu + 1)\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}}{\left(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}'\frac{a}{l} - \mathfrak{D}''\frac{a^2}{l^2}\right)^2}.$$

Cette expression peut encore être simplifiée notablement si l'on remarque que le numérateur de la dernière fraction est divisible par $\left(1 - \frac{a}{l}\right)$; on trouve ainsi finalement:

$$(85) \;...\; \frac{dx_0}{da} = 3 \cdot \frac{(\mu\nu - 1)\left(\frac{2\nu - 1}{3} - \frac{a}{l}\right)\left(1 - \frac{a}{l}\right)}{\left[(\mu\nu - 1) + (2\nu - \mu + 1)\frac{a}{l} - (\mu + \nu + 2)\frac{a^2}{l^2}\right]^2} > o \text{ donc}$$

(86) . . . $\frac{dx_0}{da}$ reste toujours positif depuis $a = o$ jusqu'à $a = l$, et

par suite x_0 croît d'une manière continue. On reconnaît en outre que l'abscisse x_0 et sa dérivée ne peuvent devenir infinies dans l'intervalle considéré. En effet le dénominateur de x_0 qui se retrouve dans (85) est une fonction algébrique du second degré par rapport à $(a:l)$, la parabole dont il représente l'ordonnée [vu le coefficient négatif de $(a:l)^2$ et le terme indépendant positif] a son sommet convexe tourné vers le haut et coupe la ligne des appuis en deux points qui doivent comprendre les ordonnées positives, car pour $a = o$ et $a = l$ on obtient les valeurs positives $(\mu\nu - 1)$ et $(\mu + 1)(\nu - 2)$. On en conclut que pour toutes les valeurs intermédiaires de a, ces ordonnées restent aussi positives et finies.

x_0 a donc entre $a = o$ et $a = l$ des valeurs toujours positives, limitées et croissantes, ce qu'il s'agissait de démontrer. On en conclut immédiatement sur la figure que le point O' aura les mêmes propriétés. Il en resulte donc que:

1. Une force P agissant en un point quelconque d'une travée intermédiaire A A' n'y produira dans toutes les sections comprises entre les points d'inflexions fixes I I' que des moments négatifs.

2. En surchargeant une travée intermédiaire AA' d'une façon quelconque, on y développera des moments dont la courbe représentative présentera toujours deux points de passage compris respectivement dans les régions AI et A'I' et où les moments seront nuls*. Dans la région médiane comprise

---

* Lorsque la portée totale supporte une charge uniformément répartie de p par mètre on a d'après (56) (58) et (60):

$$(87) \;...\; T = T' = \frac{pl^2}{4} \qquad M = \frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1}\frac{pl^2}{4} \qquad M' = \frac{\mu - 1}{\mu\nu - 1}\frac{pl^2}{4}$$

On trouve d'après cela pour le moment $(M_x)_p$ dans la section dont l'abscisse est x

$$(88) \;..\; (M_x)_p = \frac{(l - x)M + xM'}{l} + (\mathfrak{M}_x)_p = \frac{pl^2}{4}\left\{\frac{\nu - 1}{\mu\nu - 1} - \left[1 + \frac{(\mu + 1)(\nu - 1)}{\mu\nu - 1}\right]\frac{x}{l} + 2\frac{x^2}{l^2}\right\}$$

Pour une travée de rive, par exemple la dernière, pour laquelle $\nu = \infty$ on aurait:

$$(89) \;.\; (M_x)_p = \left(1 - \frac{x}{l}\right)M + (\mathfrak{M}_x)_p = \frac{pl^2}{2}\left[\frac{1}{2\mu} - \left(1 + \frac{1}{2\mu}\right)\frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right] = \frac{pl^2}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{x}{l}\right)$$

Les racines ou abscisses x_0 des points de passage sont généralement (88) après réduction:

$$(90) \;...\; \frac{x_0}{l} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\nu - \mu}{2(\mu\nu - 1)}\right] \pm \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{\nu - \mu}{\mu\nu - 1}\right)^2 + 4\frac{(\nu - 1)(\mu - 1)}{\mu\nu - 1}} \text{ par suite}$$

$$(91) \;...\; \text{si } \mu = \nu \;.....\; \frac{x_0}{l} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\mu - 1}{\mu + 1}}\right), \qquad \text{si } \nu = \infty \;...\; \frac{x_0}{l} = 1 \text{ et } \frac{x_0}{l} = \frac{1}{2\mu}$$

entre ces points, de passage les moments seront négatif, tandis qu'entre chaque appui et le point de passage voisin, ils seront positifs*.

3. Détermination du point limite des charges.

Revenons maintenant au problème de l'équation (81) c'est-à-dire à la recherche de l'abscisse a du point d'application de la force P, pour laquelle le moment devient nul sur une section donnée dont l'abscisse et x_o. Le point cherché que nous nommerons G_x, limitera la surcharge sur le côté de droite ou sur le côté de gauche de la travée, suivant que ce sont les moments positifs ou négatifs que l'on voudra avoir sur la section donnée.

Nous remarquerons tout d'abord que puisque $o < x_0 < l:(\mu+1)$ d'après ce qui précède, les coefficients de l'équation (81) seront toujours positifs, car les inégalités

$$\frac{1}{\mu+1} < \frac{l(\nu+1)}{\mu+\nu+2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu+1} < \frac{l(2\nu-1)}{2\nu-\mu+1}$$

se réduisent facilement toutes les deux à $1 < \mu\nu$.

Nous allons faire voir maintenant que pourvu que $o < x_o < l:(\mu+1)$, l'équation (81) possède toujours deux racines réelles et positives dont la plus petite seule convient**.

Si l'on désigne par $\pm\sqrt{\mathfrak{Y}}$ la partie irrationnelle du numérateur dans l'expression bien connue des racines, la condition de réalité de celles-ci s'écrit:

$$(92) \quad \mathfrak{Y} = \left[l(2\nu-1) - x_0(2\nu-\mu+1)\right]^2 - 4x_0(\mu\nu-1)\left[l(\nu+1) - x_0(\mu+\nu+2)\right] > 0$$

Cette expression qui est du second degré en x_0, peut être décomposée en deux facteurs linéaires, car l'équation du second degré:

$$(93) \quad \mathfrak{Y} = 0, \quad \text{contient évidemment*** la racine: } x_o^{\mathrm{I}} = \frac{l}{\mu+1}$$

et la seconde racine x_o^{II} s'en déduit facilement à l'aide du terme indépendant de (93)

$$(94) \quad x_o^{\mathrm{II}} = \frac{(x_o^{\mathrm{I}} x_o^{\mathrm{II}})}{x_o^{\mathrm{I}}} = \frac{(\mu+1)(2\nu-1)^2 . l}{(2\nu-\mu+1)^2 + 4(\mu\nu-1)(\mu+\nu+2)} = \frac{(2\nu-1)^2 . l}{4\nu(\mu+\nu)+\mu-7}$$

En utilisant les valeurs trouvées pour les racines x_o^{I} et x_o^{II} on obtient:

$$(95) \quad \mathfrak{Y} = \left[l - x_0(\mu+1)\right]\left[l(2\nu-1)^2 - x_0\left[4\nu(\mu+\nu)+\mu-7\right]\right]$$

$$(96) \quad a = \frac{1}{2}\,\frac{l(2\nu-1) - x_0(2\nu-\mu+1) \pm \sqrt{\mathfrak{Y}}}{l(\nu+1) - x_0(\mu+\nu+2)}$$

Ces formules font voir qu'en supposant comme précedemment $o < x_o < l:(\mu+1)$, on aura $\mathfrak{Y} > o$; en effet l'inégalité $x_o^{\mathrm{I}} < x_o^{\mathrm{II}}$ se réduit à $o < (\mu\nu-1)(\nu-2)$; on a donc toujours $x_o < x_o^{\mathrm{I}} < x_o^{\mathrm{II}}$, et par suite l'ordonnée de parabole qui représente $\mathfrak{Y}$ en fonction de x_o se trouvant prise en dehors de l'intervalle des racines x_o^{I} x_o^{II} a toujours le signe (95) du coefficient de $(x_o)^2$ qui est positif. On reconnaît d'ailleurs d'après (81) et (86) que les deux racines cherchées a de la formule (96) sont toujours de même signe, c'est-à-dire positives.

On voit (95) en outre que pour $x_o = l:(\mu+1)$ on a évidemment $\mathfrak{Y} = o$, ce qui donne pour l'équation (81) deux racines égales à l, qu'enfin pour $x_o > l:(\mu+1)$ on a $\mathfrak{Y} < o$ ce qui donne deux racines imaginaires.

Parmi les deux valeurs positives de a données par la formule (96), c'est toujours la plus petite qui convient parce que, comme on sait (82), la valeur de a doit s'annuller avec celle de x_o †.

---

* Si ce n'est pas seulement une charge sur la travée elle-même, mais toute une combinaison de travées chargées que l'on a devant soi, alors l'épure des moments de flexion qui en résulte, peut présenter aussi des points de passage dans la section médiane I I'.

** La discussion des formules (82) (85) qui précède prouve seulement qu'il existe toujours une racine positive qui convient; et nous verrons qu'une discussion ultérieure est nécessaire.

*** En substituant cette valeur de x_0 on trouve immédiatement

$$(97) \quad \frac{1}{2}\left[l(2\nu-1) - x_0(2\nu-\mu+1)\right] = \left[l(\nu+1) - x_0(\mu+\nu+2)\right] = \frac{\mu\nu-1}{\mu+1}\,l$$

† La plupart des auteurs qui ont publié sur cette théorie des ouvrages souvent très-étendus, ont négligé de soumettre l'équation (81) et sa résolution (82) (96) suivant l'une ou l'autre des abscisses x_o et a, à une discussion exacte; c'est ce qui a déterminé l'auteur à entrer dans les détails de calculs du texte, qui sont destinés à dissiper les objections qui pourraient subsister encore.

On pourra donc calculer à l'aide des formules (95) (96) l'abscisse du point limite des charges G_x qui correspond à une section quelconque donnée sur A I. On pourra aussi déterminer le point analogue G'_x qui correspondrait à une section donnée sur A' I'; les formules tirées des considérations de symétrie (72) du système seraient:

(98) . . $\mathcal{Y}' = \left[1 - (1 - x_0)(\nu + 1)\right]\left[1(2\mu - 1)^2 - (1 - x_0)\left[4\mu(\nu + \mu) + \nu - 7\right]\right]$

(99) . . . . . . $b = \frac{1}{2}\,\frac{1(2\mu - 1) - (1 - x_0)(2\mu - \nu + 1) \pm \sqrt{\mathcal{Y}'}}{1(\mu + 1) - (1 - x_0)(\mu + \nu + 2)}$

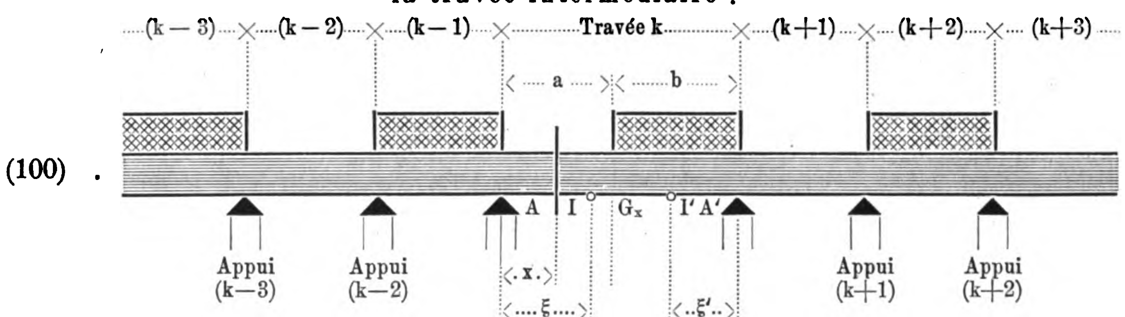
4. Charges les plus défavorables pour une travée intermédiaire.

En résumant tout ce qui a été expliqué précédemment on peut se rendre compte exactement de la surcharge qui dans chacune des trois sections A I, I I' I' A' d'une travée considérée, produira le plus grand moment positif ou négatif à savoir:

1. Le moment (positif) maximum dans une section de la région latérale A I de la travée k dont l'abscisse est x, s'obtient en surchargeant partiellement cette travée depuis le point limite G_x jusqu'à l'appui de droite A' et en surchargeant simultanément sur toute leur portée les travées de droite (k + 2) k + 4) . . . etc. ainsi que les travée de gauche (k — 1) (k — 3) . . . etc.; puisque pour toutes ces autres travées les droites représentatives correspondantes donnent encore des moments additionnels positifs sur la région A I considérée.

Barême des charges 1 pour les moments positifs dans une région latérale de la travée intermédiaire*.

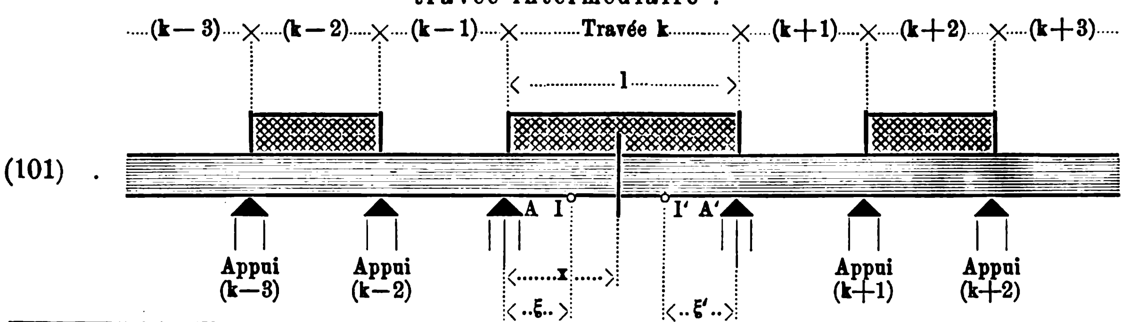
(100) .



2. Le moment (négatif) minimum sur une section de la région médiane I I' de la travée k considérée, s'obtient en surchargeant sur le total de la portée la travée k elle-même ainsi que les travées de droite (k + 2) (k + 4) . . . etc., et les travées de gauche (k — 2) (k — 4) . . . etc.

Barême des charges 2 pour les moments négatifs dans la région médiane de la travée intermédiaire*.

(101) .



* Les figures que nous donnons ici (100) (101) pour la travée intermédiaire et plus loin (124) (125) pour la travée de rive, ont été dessinées, pour plus de simplicité, de façon que l'on pourrait y croire admisse l'hypothèse d'une charge permanente par *m* qui serait constante pour toute la poutre. En réalité la charge permanente par *m* ainsi que la charge mobile par *m* sont supposées avoir des valeurs qui peuvent être différentes pour toutes les travées, comme on le trouve indiqué aux fig. (67) (70) (71) pour un pont à trois travées.

Dans le cas où l'on voudrait calculer directement les effets de charge d'un train donné, l'abscisse a serait celle du premier essieu du train couvrant la longueur b sur la droite; les relations établies entre a et x_0 sont toujours applicables à ce cas particulier de charge.

Les mêmes observations peuvent être faites pour le barême général des charges que nous donnons plus loin (136) et pour tous les cas où il doit être appliqué.

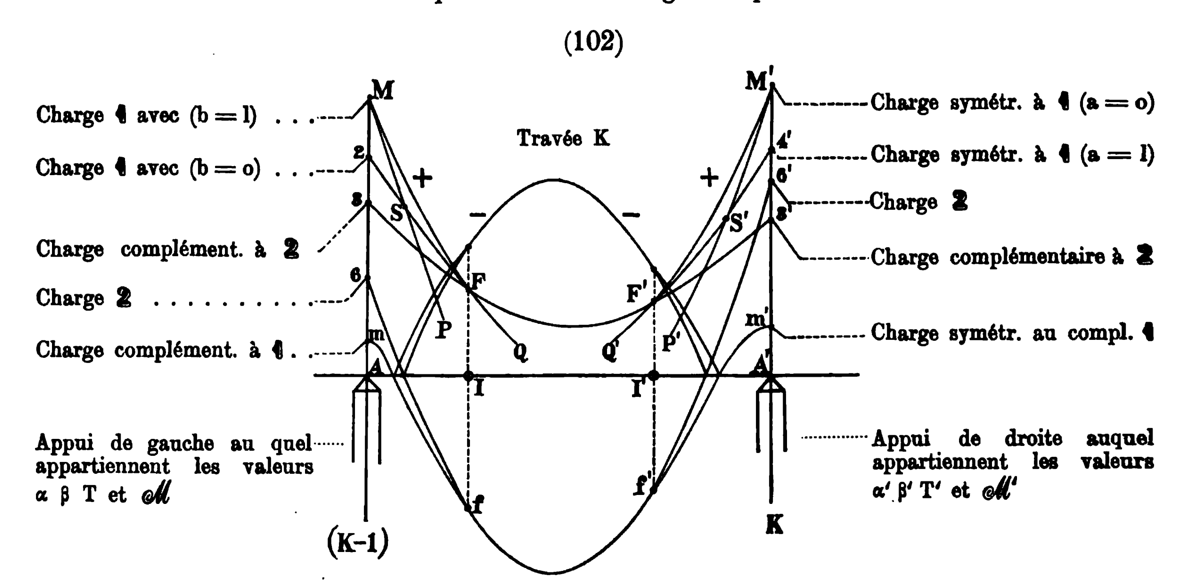
3. Le moment minimum dans la région A I et le moment maximum dans la région I I' s'obtiendront naturellement en prenant les surcharges complémentaires de celles (100) (101) que nous venons d'indiquer. Mais ces moments, même si on les considère seulement au point de vue théorique, n'ont pas d'importance; ils ne pourront dépasser les autres que dans le voisinage des points I I' et n'y donneront lieu qu'à des différences insignifiantes (pour les ponts usuels) car l'épure des moments présente dans cette région le creux connu dont on ne peut entièrement tenir compte dans la distribution des tôles de bandes.

4. Pour la région latérale A' I les moments maxima et minima s'obtiendront évidemment en prenant les barêmes des charges qui sont disposés symétriquement au barême (100) et à son barême complémentaire. On aurait donc pour une travée intermédiaire à tenir compte en tout de six combinaisons ou barêmes de charges, abstraction faite des simplifications pratiques que nous allons signaler*.

5. Epure des moments maxima et minima dans une travée intermédiaire.

Il résulte de ce qui précède que le contour enveloppe des moments maxima se composera (102) de deux courbes de degré supérieur M F et M' F' pour les régions latérales A I et A' I', et d'un arc de parabole F F' pour la région médiane I I' de la travée. On trouvera encore de même pour les moments minima les courbes de degré supérieur m f et m' f' ainsi que la parabole f f' formant ensemble un contour qui résulte des charges complémentaires.

(102)



Dans cette figure les ordonnées négatives ont été rabattues vers le haut au-dessus de la ligne des appuis comme il est d'usage.

Nous allons maintenant faire voir que pour les moments maxima comme pour les moments minima, les trois courbes dont nous venons de parler forment une ligne continue dont les courbes composantes se coupent à angles obtus au droit des points d'inflexion fixes (sans pouvoir s'y rencontrer tangentiellement comme on l'avait prétendu et même imprimé). En raison de la disposition symétrique des courbes de gauche et de droite et de la disposition complémentaires des charges donnant les maxima ou minima, il suffira évidemment d'étudier l'un des quatre points F F' f f' et nous prendrons par exemple le point F.

On obtient l'ordonnée I F de la courbe M F à l'aide de la charge du barême 1 avec b = o. L'ordonnée I F de la parabole F F' d'autre part s'obtiendra avec la charge complémentaire à celle du barême 2. Ces deux charges (100) (101) ne diffèrent que par les combinaisons de travées chargées (charge mobile) sur la droite de l'appui A'; les droites représentatives des moments produites par ces dernières charges dans la travée A A' passent toutes par le point I. Toutes les charges provoqueront donc au point I un seul et même moment I F.

* En résumé il suffira des deux fig. (100) et (101) pourvu que l'on y ajoute dans la pensée les figures symétriques et complémentaires nécessaires; nous nous contenterons donc dans le texte de rapporter ce qui suit aux deux barêmes cités.

Pour étudier la tangente à la courbe MF tant au point F qu'à l'autre extrémité M, il est nécessaire d'établir une formule exprimant $\mathcal{M}_x$ en fonction de x dans la région latérale AI considérée. En désignant par $(M_x)_p$ le moment additionel provoqué par la surcharge partielle de la travée elle-même, sur la section dont l'abscisse est x on aura d'après (54) (58).

$$(103)\quad (M_x)_p = \frac{(l-x)\,M + x\,M'}{l} + (\mathfrak{M}_x)_p = \frac{[l\,\nu - (\nu+1)\,x]\,T - [l - (\mu+1)\,x]\,T'}{l^2(\mu\,\nu - 1)} + (\mathfrak{M}_x)_p$$

$$(104)\quad \ldots\ldots\quad \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_0 + (\mathcal{M}'_0 - \mathcal{M}_0)\,\frac{x}{l} + (\mathfrak{M}_x)_q + (M_x)_p$$

En substituant d'après (56) les valeurs de T, T' et $(\mathfrak{M}_x)_q$ qui conviennent à la charge partielle que nous considérons, les équations deviennent:

$$(105)\quad (M_x)_p = \frac{p\,b^2}{2}\left\{\frac{\frac{1}{2}\left[\nu - 1 + (\mu-\nu)\frac{x}{l}\right]\left(1+\frac{a}{l}\right)^2 - \left[\nu - (\nu+1)\frac{x}{l}\right]\frac{a^2}{l^2}}{\mu\,\nu - 1} - \frac{x}{l}\right\} = \frac{p\,l^2}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)^2 . \mathcal{K}$$

$$(106)\quad \ldots\ldots\quad \mathcal{M}_x = \mathcal{M}_0 - \left[\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}'_0 + \frac{q\,l}{2}(l-x)\right]\frac{x}{l} + (M_x)_p$$

Dans ces formules b représente la longueur surchargée de la travée, et a la longueur non chargée (81) (96); nous y désignons en outre par p la charge mobile et par q la charge permanente par *m*, enfin par $\mathcal{K}$ le facteur dans la grande parenthèse. La charge à admettre pour calculer ,ainsi (105) (106) les valeurs de $\mathcal{M}_x$ tout le long de la courbe MF sont celles du barême 1.

Si l'on différentie maintenant l'équation (105) par rapport à x comme variable indépendante en représentant par $\partial\mathcal{K}$ la différentiation partielle de $\mathcal{K}$ par rapport à x ou par rapport à a (comme fonction de x) on aura:

$$(107)\quad .\;.\quad \frac{d(M_x)_p}{dx} = -p\,l\left(1-\frac{a}{l}\right)\frac{da}{dx}.\mathcal{K} + \frac{p\,l^2}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)^2\left(\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial a}\cdot\frac{da}{dx}\right)$$

Pour tirer parti de cette fourmule nous calculerons les fonctions qui y figurent; nous trouverons ainsi ce qui suit:

1. Pour le point F d'après (75) (85) et (105) on a les valeurs fort simples:

$$(108)\quad .\; x = \xi = \frac{l}{\mu+1} \qquad a = l \qquad \left(1-\frac{a}{l}\right)\frac{da}{dx} = \frac{(\mu+1)^2}{2}\cdot\frac{\nu-2}{\mu\,\nu-1}$$

$$(109)\quad .\;.\;.\quad \left[\nu - 1 + (\mu-\nu)\frac{\xi}{l}\right] = \left[\nu - (\nu+1)\frac{\xi}{l}\right] = \frac{\mu\,\nu-1}{\mu+1} \qquad \text{et}$$

$$(110)\quad .\;.\quad \mathcal{K} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x} = -\frac{(\mu+1)(\nu-2)}{l(\mu\,\nu-1)} \qquad \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial a} = 0$$

pour lesquelles la dérivée (107) de $(M_x)_p$ devient nulle; la courbe MF a donc en F d'après (106) la même tangente que la parabole qui résulterait de la charge du barême 1 avec b = o, et doit par conséquent couper à angle obtus la parabole FF' qui provient d'une charge complémentaire à celle du barême 2. C'est ce qu'il s'agissait de prouver*.

2. Pour le point M d'après (82) (96) et (105) on a les valeurs moins simples:

$$(111)\quad \ldots\ldots\; x = 0 \qquad a = 0 \qquad \frac{da}{dx} = \frac{\mu\,\nu-1}{2\,\nu-1}$$

$$(112)\quad .\; \mathcal{K} = \frac{1}{2}\,\frac{\nu-1}{\mu\,\nu-1} \qquad \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x} = -\frac{1}{2\,l}\left[1 + \frac{(\mu+1)(\nu-1)}{\mu\,\nu-1}\right] \qquad \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial a} = \frac{\nu-1}{l(\mu\,\nu-1)}$$

avec lesquelles la dérivée (107) de $(M_x)_p$ devient après substitution et réduction:

$$(113)\quad .\;.\quad \frac{d(M_x)_p}{dx} = -\frac{p\,l}{4}\left[1 + \frac{(\mu+1)(\nu-1)}{\mu\,\nu-1}\right] = -\frac{p\,l}{2}\left[1 + \frac{\nu-\mu}{2(\mu\,\nu-1)}\right]$$

---

* Il convient de remarquer que d'après (85) pour $x = \xi$ on a $\frac{da}{dx} = +\infty$ ce qu'on a négligé de voir dans les publications antérieures. Par exemple dans l'ouvrage connu: „Theorie der äusseren Kräfte gerader Träger" du Dr. E. Winkler, Wien, 1870, p. 48 et 49, on prétend à la suite d'une différentiation inexacte qu'en F les deux courbes MF et FF' sont tangentes. La nouvelle édition de 1875 renferme aux p. 76 et 77 encore la même erreur; l'édition de 1886 la rectifie implicitement, d'accord avec la théorie de l'auteur, déjà établie à cette époque.

Cette valeur est identique avec celle que l'on obtient (88) en supposant la travée surchargée sur le total de la portée, de façon qu'au point M d'après (106) la courbe M F possède la même tangente que la parabole qui répond à la charge du barême 1 avec $b = l$.

La théorie qui précède conduit à la règle suivante, importante en pratique:

La courbe de degré supérieur M F obtenue avec les surcharges partielles du barême 1 peut être approximativement remplacée par la ligne brisée M S F composée de deux arcs de paraboles que l'on obtient en n'utilisant le barême 1 que pour les hypothèses extrêmes $b = l$ et $b = o$ et en se servant ensuite des patrons paraboliques construits (68) avec les charges $(p + q)$ et q par *m*, pour tracer ces courbes (69) à la manière ordinaire entre les moments sur les appuis calculés à l'avance.

La ligne brisée M S F remplace la courbe de degré supérieur M F avec une exactitude suffisante en pratique, puisque comme nous l'avons démontré les deux contours ont à leurs extrémités communes des tangentes communes*. On remplacera de la même manière la courbe de degré supérieur M' F' par la ligne brisée M' S' F' en se servant des barêmes symétriques au barême 1 pris pour $(a = l)$ et pour $(a = o)$.

On pourrait enfin de la même manière substituer aux courbes de moments minima m f et m' f' des contours brisés composés d'arcs paraboliques obtenus à l'aide des charges complémentaires de celles qui servent aux maxima; mais cette construction** serait superflue en raison de l'usage auquel doit servir l'épure des moments de flexion, parce que les courbes en question ne pourront influer que très-légèrement sur le contour enveloppe cherché dans le voisinage des points f et f', où elles ne diffèrent de la parabole résultant du barême 2 que de quantités insignifiantes (102).

6. Surcharges les plus défavorables pour une travée de rive.

La théorie que nous venons d'exposer aux Nos 1, 2 . . . à 5 pour les surcharges les plus défavorables concernant une travée intermédiaire, peut être appliquée avec bien des simplifications à une travée de rive; il suffit pour cela de supposer que l'un des moments d'appuis $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}'$ est nul et que la valeur de μ ou ν pour cet appui devient $+\infty$; nous considérons à cet effet

---

* Si l'on veut se rapprocher d'avantage de la théorie exacte, on peut tracer la courbe M F à l'aide de la règle courbe en guise de parabole définie par ses extrémités M et F ainsi que par les tangentes en ces points, en se servant à cet effet de la construction rapide que nous recommandons plus loin (137).

** La démonstration du texte pour M F quant aux tangentes communes en M et F peut être étendue immédiatement à la courbe analogue des minima m f à l'aide de la considération des charges complémentaires, qui pourrait servir aussi à calculer les ordonnées de m f en fonction de celles de M F.

Nous désignons pour les moments provoqués uniquement par la charge partielle de la travée même, sur la section dont l'abscisse est x, par:

(114) $\begin{cases} (M_x)_{pb} \ldots \text{le moment obtenu comme dans le texte en chargeant la longueur b;} \\ (M_x)_{pa} \ldots \text{le moment obtenu avec la charge complémentaire sur la longueur a;} \\ (M_x)_{pl} \ldots \text{le moment obtenu en chargeant la longueur entière de la portée l.} \end{cases}$

On devra avoir alors évidemment à cause des charges complémentaires:

(115) . . . . $(M_x)_{pa} = (M_x)_{pl} - (M_x)_{pb}$

Les dérivées des trois moments devront satisfaire à la même relation et on en déduit d'après les résultats déjà demontrés dans le texte, que:

pour $a = o$ . . . . $\frac{d\,(M_x)_{pa}}{dx} = o$ tandis que pour $a = l$ . . . . . $\frac{d\,(M_x)_{pa}}{dx} = \frac{d\,(M_x)_{pl}}{dx}$

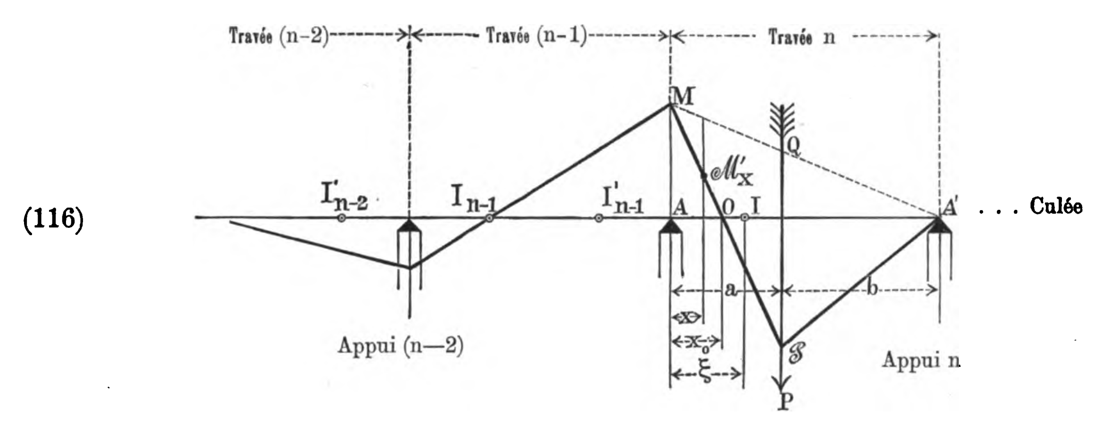
Pour le tracé des courbes minima dont pourraient avoir besoin les ingénieurs qui appliquent la formule (64) du N° *XXXIII* il ne faut aucune construction nouvelle; ce sont les paraboles M S et S F qui prolongées jusqu'au droit de l'appui A' donnent la ligne brisée remplaçant la courbe f' m' et l'on obtient de la même manière la ligne qui remplace f m à l'aide des prolongements des paraboles M' S' et S' F'. Notre exemple du N° *LIX* fait voir cette construction. Il serait du reste oiseux de s'appesantir sur ces détails.

La théorie des poutres continues admet qu'il n'y pas d'abaissements sur les appuis et l'on sait que des mouvements même peu importants en ces points, modifient très-notablement la répartition des moments sur les divers appuis et par suite toute la théorie. Certains ingénieurs ont même voulu (du moins dans leurs publications) utiliser ces effets pour obtenir à l'aide d'abaissements artificiels une meilleure répartition des moments de flexion; ces études n'ont pas été sanctionnées par la pratique. Dans les ponts construits on cherche à parer aux abaissements qui se produisent, au moyen de cales et plaques de remplissage en fer. On conçoit du reste que le passage des trains devra en peu de temps établir dans les constructions un état d'équilibre stable entre les actions moléculaires du métal et les abaissements permanents, qui sont alors pour ainsi dire consommés une fois pour toutes; on sera arrivé ainsi à l'état d'équilibre que la théorie a en vue. L'étude des effets de l'abaissement des appuis s'effectue à l'aide des équations (24) et nous renvoyons à cet égard à la note de notre exemple du N° *LIX*.



le cas (116) de la dernière travée. L'épure des moments de flexion qui remplace l'épure (72) et correspond à l'action d'une force isolée P, se présentera comme suit:

(116)



Le point d'inflexion fixe I' se confond ici avec l'appui A', et le point analogue de gauche I, ne peut plus être défini comme point fixe de passage (ou d'inflexion); on trouvera toutefois ce point en cherchant comme précédemment le maximum de la longueur $x_0 = AO$. Ce calcul ainsi que tout ce qui concerne la travée de rive considérée, se déduit des relations que nous avons déjà établies pour la travée intermédiaire (76) (80) (82) (85) (96) en y supposant $\nu = \infty$; on aura ainsi:

(117) . . $$M = \frac{Pab}{\mu l}\left(1 + \frac{b}{l}\right) = \frac{Pb}{\mu} \cdot \frac{a}{l}\left(2 - \frac{a}{l}\right)$$ . . . . . . ainsique $M' = o$

(118) . . . . . . $$M_x = -\frac{Pb}{\mu l}\left[(l - x)\frac{a^2}{l^2} - 2(l - x)\frac{a}{l} + \mu x\right]$$

(119) . $$x_0 = \frac{a\left(2 - \frac{a}{l}\right)}{\mu + 2\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}} = \frac{a\left(2 - \frac{a}{l}\right)}{\left(\sqrt{\mu + 1} + 1 - \frac{a}{l}\right)\left(\sqrt{\mu + 1} - 1 + \frac{a}{l}\right)}$$

(120) . $$\frac{dx_0}{da} = \frac{2\mu\left(1 - \frac{a}{l}\right)}{\left(\mu + 2\frac{a}{l} - \frac{a^2}{l^2}\right)^2} > o \qquad \frac{a}{l} = 1 - \sqrt{\frac{1 - (\mu + 1)\frac{x_0}{l}}{1 - \frac{x_0}{l}}}$$

On reconnaît comme précédemment que lorsque P varie de position depuis $a = o$ jusqu'à $a = l$, l'abscisse x_0 du point O varie de $x_0 = o$ jusqu'à $x_0 = \xi = l : (\mu + 1)$ en croissant d'une manière continue. Chaque force P appliquée à la travée d'une manière quelconque, y produit toujours un moment positif sur l'appui A et un moment négatif au point d'application, ainsi que sur toutes les sections de la région I A' déterminée à l'avance.

La travée de rive se divise ainsi en deux régions A I et I A'. Pour la région latérale A I chaque section dont l'abscisse est x aura son point limite des charges G_x déterminé par la

* Si au lieu de la dernière travée on avait considéré la première, les abscisses seraient comptées à partir de l'extrémité de la poutre, ce qui conduirait à des formules un peu modifiées. On a ici également avec

(121) . . . . $x + x' = l = a + b$ . . . . les formules en question, équivalentes:

(122) . . $$(M_{x'})_P = -\frac{Pb}{\mu l}\left[x'\frac{b^2}{l^2} - (\mu + 1)x' + \mu l\right]$$ . . . . $$x'_0 = \frac{\mu l}{\mu + 1 - \frac{b^2}{l^2}}$$

(123) . . . . $$\frac{dx'_0}{db} = \frac{2\mu\frac{b}{l}}{\left(\mu + 1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{l} = \sqrt{\frac{(\mu + 1)\frac{x'_0}{l} - \mu}{\frac{x'_0}{l}}}$$

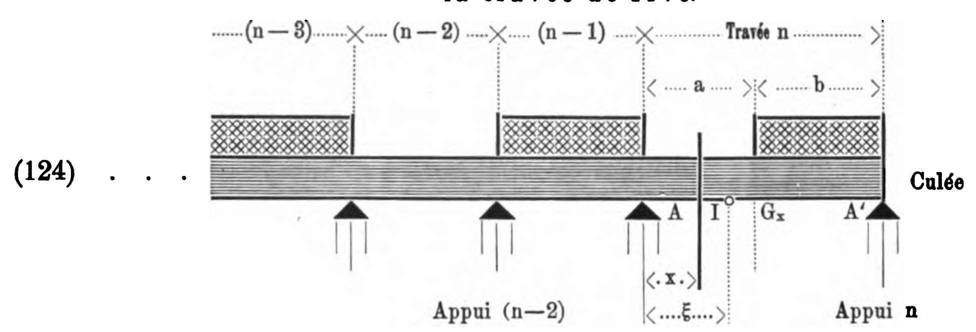
Les formules équivalentes du texte ont été citées de préférence pour mieux mettre en évidence l'analogie avec les formules de la travée intermédiaire.

formule (120); pour la région médiane I A′ au contraire, qui s'étend ici jusqu'à l'appui extrême A′, on n'aura pas de surcharges partielles à considérer*. On en conclut:

1. Le moment (positif) maximum dans une section de la région latérale A I de la travée de rive dont l'abscisse est x, s'obtient en surchargeant partiellement cette travée depuis le point limite G_x sur la droite jusqu'à l'appui extrême A′, et en surchargeant simultanément sur toute leur portée les travées de gauche (n — 1), (n — 3) . . . etc.

Barême des charges 1 pour les moments positifs dans la région latérale de la travée de rive.

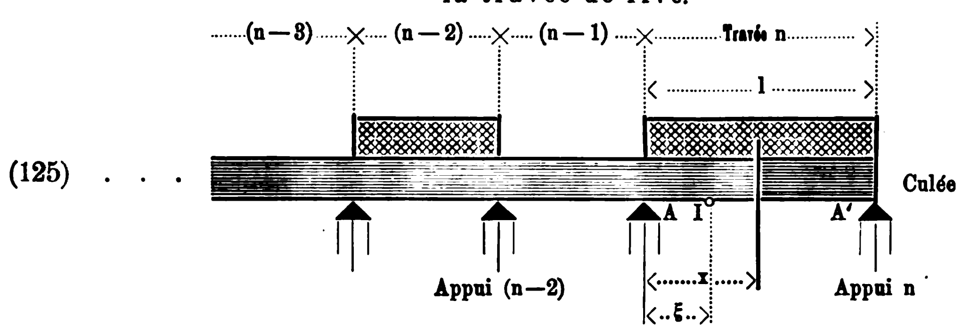
(124) . . .



2. Le moment (négatif) minimum sur une section de la région médiane I A′ de la travée de rive, s'obtient en surchargeant en entier cette travée elle-même, ainsi que les travées de gauche (n — 2), (n — 4) . . . etc.

Barême des charges 2 pour les moments négatifs dans la région médiane de la travée de rive.

(125) . . .



3. Le moment minimum dans la région latérale A I et le moment maximum dans la région médiane I A′ s'obtiendront en prenant les surcharges complémentaires de celles (124) et (125) que nous venons de citer. Mais ces moments, considérés même au point de vue théorique seulement, resteront presque toujours sans influence sur le contour enveloppe cherché car ils ne peuvent devenir supérieurs aux autres que dans le voisinage du point I, où l'épure des moments présente le creux connu, que l'on ne peut utiliser entièrement dans la distribution des tôles de bandes.

On aurait donc pour une travée de rive à tenir compte en tout de quatre combinaisons ou barême de charges, abstraction faite des simplifications pratiques que nous signalons ci-dessous. On remarquera du reste que les barêmes de charges cités (124) (125) ne sont autres que ceux que l'on a cités déjà (100) (101) pour la travée intermédiaire, pour vu que l'on sépare de ces derniers toute la partie située sur la droite de l'appui A′ en faisant en même temps coïncider avec ce point, le deuxième point d'inflexion fixe I′. Avec ces explications complémentaires, on n'aurait donc généralement que deux barêmes de charges 1 et 2 à considérer en tout (100) (101) pour en déduire toutes les combinaisons des charges.

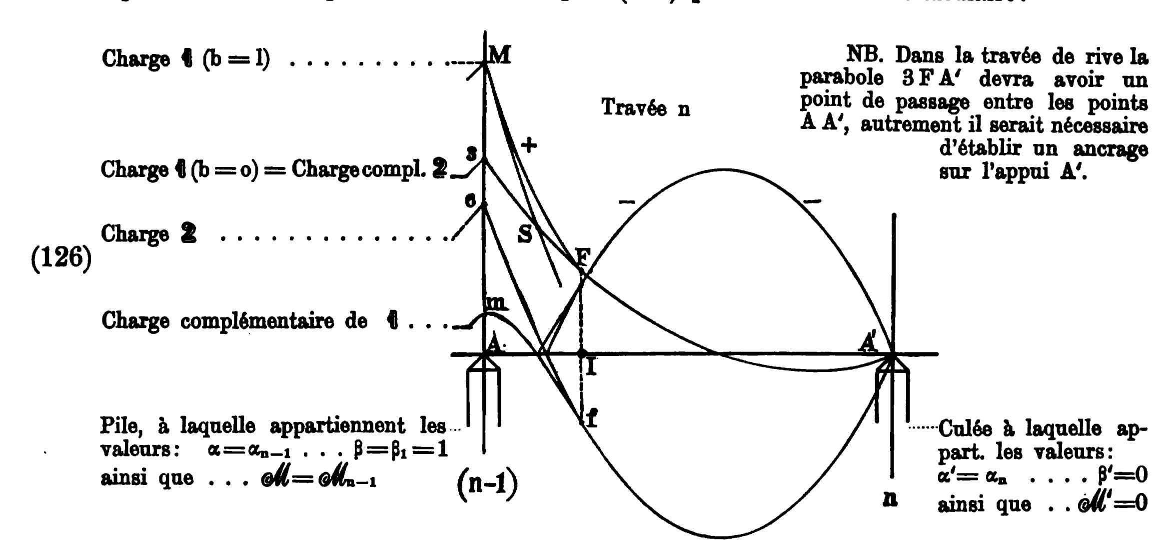
---

* Dans les publications antérieures on applique toujours cette discussion à la première travée et non à la dernière, ce qui paraît motivé par la forme usuelle des épures dont on se sert en pratique. Nous préférons prendre la dernière travée pour faciliter la comparaison des formules avec celles de la travée intermédiaire. Nous citons ensuite (122) (123) (131) (132) les formules analogues qui concernent la première travée et qui ont une forme spéciale qu'il importe de signaler.



L'épure des moments maxima et minima dans la travée de rive, pourra se déduire aussi très-simplement de celle que nous avons indiquée (102) pour la travée intermédiaire:

(126)



La région latérale de droite s'est annullée en se concentrant au point A' en même temps que les points F' f' et les courbes M'F' et m'f' que l'on avait dans (102) et qui s'y rapportent.

Du côté gauche dans la région latérale A I, nous avons également une simplification à signaler puisqu'ici la charge du barême 1 avec (b = o) est identique à la charge complémentaire de celle du barême 2, de façon que les paraboles 2 S F et 3 F F' de la fig. (102) coïncident ici. Il en résulte que dans la travée de rive la courbe de degré supérieur M F est tangente en F à la parabole 3 F A'.

Toutes ces particularités de l'épure des moments (126) que nous venons de déduire de l'épure pour une travée intermédiaire, peuvent aussi se démontrer directement pour la travée de rive. On aura à cet effet au lieu des équations (105) (106) celles qui suivent:

(127) . $$(M_x)_p = \frac{p\,b^2}{2}\left\{\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{l}\right)^2-\frac{a^2}{l^2}}{\mu}-\frac{x}{l}\right\} = \frac{p\,l^2}{2}\left(1-\frac{a}{l}\right)^2 . \mathcal{X}$$

(128) . . . . $$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_0 - \left[\mathcal{M}_0 + \frac{q\,l}{2}(1-x)\right]\frac{x}{l} + (M_x)_p$$

Ces équations qui ne diffèrent de celles de la travée intermédiaire (105) (106) qu'en ce $\mathcal{M}'_0 = o$ et $\nu = \infty$, conduisent aux mêmes conclusions; elles font voir que la courbe de degré supérieur M F est tangente à ses extrémités aux arcs paraboliques formant la ligne brisée M S F' et peut par conséquent être remplacée par cette dernière. Il suffit pour cela d'utiliser le barême 1 en n'y considérant que les deux hypothèses extrêmes b = l et b = o.

La formule (127) comporte quelques simplifications intéressantes lorsqu'on y introduit les longueurs $a = l - b$ et $x' = l - x$; on trouve ainsi:

(129) . $$(M_x)_p = \frac{p\,l^2}{2}\left\{\frac{x'}{l}\,\frac{1-\frac{1}{2}\frac{b^2}{l^2}}{\mu}-\left(1-\frac{x'}{l}\right)\right\} = \frac{p\,b^2}{2\,\mu}\left\{(\mu+1)\frac{x'}{l}-\mu-\frac{1}{2}\frac{b^2}{l^2}\frac{x'}{l}\right\}$$

En substituant la valeur de (b : l) tirée de (123) on obtient $(M_x)_p$ en fonction de x ou x':

(130) . . $$(M_x)_p = \frac{p\,b^4\,x'}{4\,\mu\,l^3} = \frac{p\,l^2}{4\,\mu}\,\frac{\left[(\mu+1)\frac{x'}{l}-\mu\right]^2}{\frac{x'}{l}} = \frac{p\,l^2}{4\,\mu}\,\frac{\left[1-(\mu+1)\frac{x}{l}\right]^2}{1-\frac{x}{l}}$$ ainsi que

(131) . $$(M_x)_p = \frac{p\,l^2}{4\,\mu}\left[(\mu+1)\left(\frac{x'}{l}\right)^{\frac{1}{2}}-\mu\left(\frac{x'}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 = \frac{p\,l^2}{4}\left[\frac{(\mu+1)^2}{\mu}\,\frac{x'}{l}+\mu\,\frac{l}{x'}-2\,(\mu+1)\right]$$

On en tire la valeur de la tangente comme ordonnée d'hyperbole du 3me degré:

(132) . . . . . $$\frac{d(M_x)_p}{dx} = -\frac{d(M_x)_p}{dx'} = -\frac{pl}{4}\left[\frac{(\mu+1)^2}{\mu} - \mu\frac{l^2}{x'^2}\right]$$

et les valeurs ainsi obtenues aux extrémités de la courbe MF:

(133) . $$\begin{cases} \text{pour } x = \dfrac{l}{\mu+1} \quad \text{et} \quad x' = \dfrac{\mu l}{\mu+1} \quad \ldots\ldots \quad \dfrac{d(M_x)_p}{dx} = 0 \\ \text{pour } x = 0 \quad \text{et} \quad x' = l \quad \ldots \quad \dfrac{d(M_x)_p}{dx} = -\dfrac{pl}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2\mu}\right) \end{cases}$$

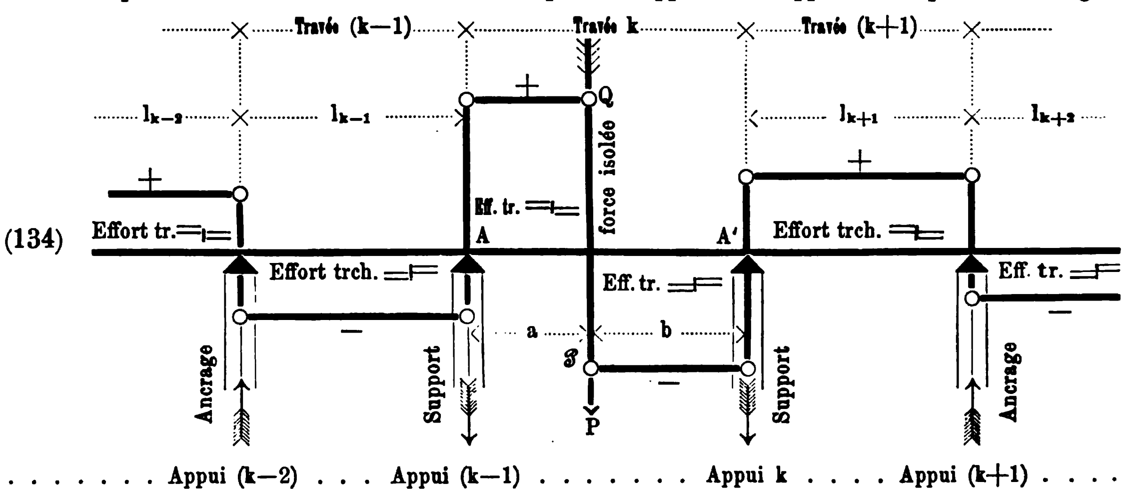
comparées aux formules (128) (89) confirment à nouveau l'exactitude de ce que nous avons dit pour les tangentes communes aux extrémités de la ligne brisée MSF. Le calcul des ordonnées de la courbe MF dans une travée de rive au moyen des formules (130) (131) (132), serait beaucoup plus simple que le calcul analogue dans la travée intermédiaire; mais tous deux sont inutiles.

LVI. Théorie des surcharges les plus défavorables pour les croisillons.

L'épure des efforts tranchants produits par une force isolée P agissant sur une poutre continue supposée non chargée, peut être déduite immédiatement de l'épure correspondante (72) ou (116) des moments de flexion, à l'aide de la relation connue (8) applicable ici, puisqu'il s'agit d'une seule et même charge. On arrivera ainsi aux deux épures suivantes*:

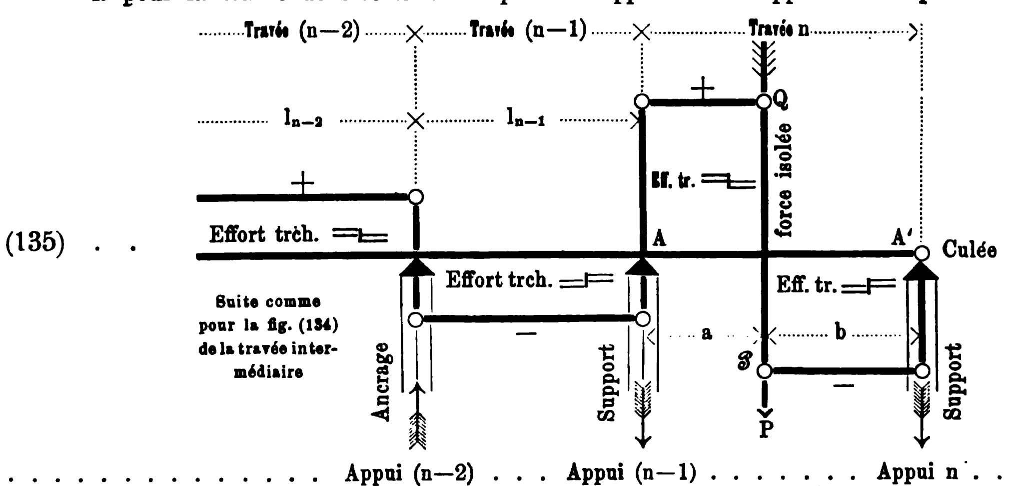
1. pour la travée intermédiaire k de la poutre supposée ne supportant ni poids ni charges:

(134)



2. pour la travée de rive n de la poutre supposée ne supportant ni poids ni charges:

(135) . .



* Pour comprendre les épures quant aux signes, il faut se reporter aux conventions admises (3).

La dernière épure peut être obtenue à l'aide de la première dont on sépare la partie de droite à partir de l'appui A'. On reconnaît aussi (11) que la force P produira toujours sur les appuis adjacents A et A' des charges positives et sur les appuis suivants à gauche ou à droite des charges alternativement négatives et positives, dont la valeur absolue est indiquée sur les épures au droit de chaque appui, par la distance des deux lignes représentatives qui en partent.

D'après les croquis ci-dessus (134) (135), qui montrent l'action d'une force isolée tant sur la travée chargée que sur celles qui ne le sont pas, on pourra résumer ce qui concerne les charges les plus défavorables quant aux efforts tranchants, ainsi qu'il suit:

1. L'effort tranchant (positif) maximum dans une section quelconque d'une travée A A', s'obtient en surchargeant cette travée partiellement (échelle **b**) depuis la section jusqu'à l'appui de droite A' et en tenant compte en outre de la charge permanente ainsi que de la surcharge des autres travées (échelle **a**) d'après le barème **1** que nous avons cité (100) (124) et dans lequel on prend $b = o$.

2. L'effort tranchant (négatif) minimum dans une section quelconque d'une travée A A', s'obtient en surchargeant cette travée partiellement (échelle **b**) depuis la section jusqu'à l'appui de gauche A et en tenant compte en outre de la charge permanente ainsi que de la surcharge des autres travées (échelle **a**) d'après le barème qui serait complémentaire au barème **1** que nous avons cité (100) (124) pour les moments, et dans lequel on doit prendre $a = o$.

Ces règles simples déduites de la théorie qui précède, donnent la marche à suivre pour le calcul des efforts tranchants, ainsi qu'il résulte de la formule (55) et de l'exemple que nous avons cité (67) (61) (70) (71) en détail. On utilise le barème des moments sur les appuis que l'on a dû dresser déjà précédemment (échelle **a**) à propos des bandes, pour déterminer la constante $(\mathcal{M}_a - \mathcal{M}'_o) : l$ à laquelle on vient ajouter les efforts tranchants $(\mathfrak{V}_x)_q$ et $(V_a)_p$ concernant les charges permanentes et mobiles (échelle **b**) sur la travée elle-même.

LVII. Procédés pratiques pour dresser rapidement les épures générales des moments de flexion et des efforts tranchants agissant sur l'ensemble d'une poutre continue.

La théorie des surcharges les plus défavorables pour les bandes et les croisillons que nous venons d'exposer aux N^{os} *LV* et *LVI* permet de généraliser maintenant les règles indiquées en principe au N° *LIV* pour le calcul des poutres continues, et que nous avons déjà appliquées (63) (67) (68) (69) (70) (71) à un pont à trois travées.

Si la poutre a n travées de longueurs $l_1\, l_2 \ldots l_n$ quelconques, on commencera par calculer (46) les coefficients $\alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_n$ et $\beta_2\ \beta_3 \ldots \beta_n$. Avec les formules (57) (60) et les coefficients que nous venons d'indiquer (29) (31), on dressera ensuite le barème des moments sur les appuis (63)* dûs à la surcharge appliquée à chaque travée isolément. En ajoutant algébriquement ces moments entre eux et avec ceux qui proviennent de la charge permanente, et en choisissant les combinaisons convenables on obtiendra (67) le barème général des moments sur les appuis.

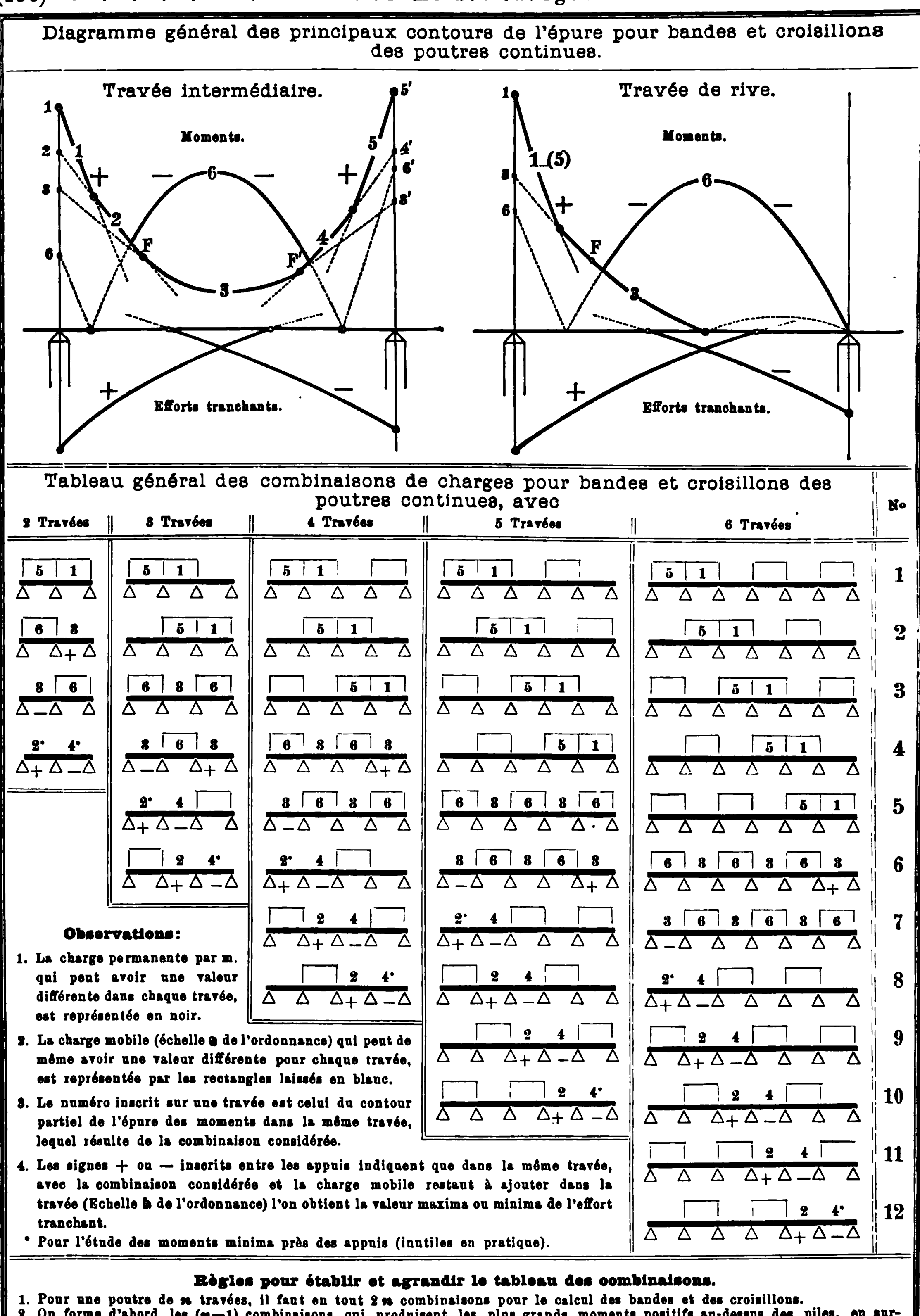
Ce barème doit contenir toutes les combinaisons de surcharges qui sont nécessaires et suffisantes pour les bandes et pour les croisillons. Or la théorie du N° *LV* a prouvé qu'on peut, avec une exactitude suffisante pour la pratique, dresser l'épure des moments de flexion dans une travée intermédiaire (102) en prenant pour le contour enveloppe des moments positifs, l'ensemble des 5 arcs de parabole M S, S F, F F', F' S', S' M' et pour celui des moments négatifs la parabole unique 6 f f' 6' rabattue vers le haut autour de la ligne des appuis. Ces six arcs de parabole que pour simplifier nous numérotons dans la suite par 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans l'ordre cité, résultent de six hypothèses de surcharge (100) (101) qui dérivent toutes des barèmes de charges **1** et **2** cités pour la travée intermédiaire.

Dans la travée de rive (126) on devra considérer l'un des arcs de parabole 1 ou 5 comme concentré dans l'appui extrême et l'un des arcs 2 ou 4 comme confondu avec l'arc 3 tandis que l'autre s'est annullé sur l'appui extrême. Nous aurons donc dans la dernière travée (126) les trois arcs 1, 3, 6 et dans la première travée les trois arcs 3, 5, 6 qui restent à considérer, et il faudra d'après (124) (125) trois hypothèses de surcharge, dérivant des barèmes de charges **1** et **2** cités pour la travée de rive, pour pouvoir les obtenir.

* Pour les poutres usuelles à travées intermédiaires égales à l et travées de rive un peu moindres égales à θ l, on obtient ces moments directement à l'aide de la Tab. V et des coefficients des nos Tab. XX à XLV du Tome II.



(136) . . . . **Barême des charges.**



Observations:

1. La charge permanente par m. qui peut avoir une valeur différente dans chaque travée, est représentée en noir.
2. La charge mobile (échelle a de l'ordonnance) qui peut de même avoir une valeur différente pour chaque travée, est représentée par les rectangles laissés en blanc.
3. Le numéro inscrit sur une travée est celui du contour partiel de l'épure des moments dans la même travée, lequel résulte de la combinaison considérée.
4. Les signes + ou — inscrits entre les appuis indiquent que dans la même travée, avec la combinaison considérée et la charge mobile restant à ajouter dans la travée (Echelle b de l'ordonnance) l'on obtient la valeur maxima ou minima de l'effort tranchant.

* Pour l'étude des moments minima près des appuis (inutiles en pratique).

Règles pour établir et agrandir le tableau des combinaisons.

1. Pour une poutre de n travées, il faut en tout $2n$ combinaisons pour le calcul des bandes et des croisillons.
2. On forme d'abord les $(n-1)$ combinaisons qui produisent les plus grands moments positifs au-dessus des piles, en surchargeant le couple de travées adjacentes ainsi que les autres travées de deux en deux, comptées de part et d'autre.
3. On forme ensuite les deux combinaisons qui produisent les plus grands moments négatifs dans la région médiane des travées, en surchargeant, soit toutes les travées d'ordre impair, soit toutes celles d'ordre pair.
4. On forme enfin encore les $(n-1)$ combinaisons qui sont complémentaires de celles formées tout d'abord (2), et qui par suite comportent chacune un couple de travées sans charge.

On aurait donc d'après cela à considérer pour la poutre à n travées, un nombre total:
$6(n-2)+3\times2=6(n-1)$ de combinaisons de surcharge.
Beaucoup de ces combinaisons se répètent pour plusieurs travées et il n'en faut réellement que $2\times n$ en tout, comme on le voit sur le tableau ci-contre *.

Ce barême général des charges est destiné à indiquer immédiatement au constructeur dans chaque cas particulier, toutes les combinaisons dont il a besoin; l'auteur y a introduit une disposition nouvelle spéciale, en utilisant le numérotage des arcs paraboliques dont nous venons de parler, de telle façon que l'on y trouve à vue les travées et contours du diagramme des moments qui correspondent à une combinaison donnée, ou bien encore que l'on y distingue immédiatement celle des combinaisons qu'il faut prendre pour obtenir dans une travée considérée un contour de numéro donné**. La disposition adoptée convient du reste également bien pour la recherche des moments et pour celle des efforts tranchants.

Le rang assigné aux diverses combinaisons répond à peu près à leur importance relative. D'abord viennent les $(n-1)$ combinaisons qui produisent les plus grands moments positifs sur les appuis, puis les 2 combinaisons qui donnent les plus grands moments négatifs dans la région médiane des travées, puis enfin les $(n-1)$ combinaisons qui servent seulement à obtenir les contours moins importants N° 2 ou 4 de l'épure des moments; toutes ces combinaisons sont cependant indispensables, puisque les $(n+1)$ ou n dernières, suivant que n est pair ou impair, servent toujours au calcul des efforts tranchants.

Il est facile de constater sur le barême que les 2 n combinaisons*** qu'il donne, sont bien celles qui répondent exactement à la théorie des surcharges les plus défavorables. En effet d'après les lois de formation du barême (qui s'y trouvent inscrites), on aura toujours chaque contour N° 1 et 5 avec l'une des $(n-1)$ premières combinaisons, chaque contour N° 3 ou 6 avec l'une des deux suivantes et chaque contour N° 2 ou 4 avec l'une des $(n-1)$ dernières. Le barême contient donc toutes les combinaisons nécessaires pour les moments. On reconnaît de même qu'il contient aussi toutes celles qui sont nécessaires pour les efforts tranchants et qui, comme nous savons, sont comprises dans les précédentes. Il est clair d'autre part que la loi de formation du barême exclue toute répétition; donc enfin il donne bien toutes les combinaisons qui sont nécessaires et suffisantes.

Lorsqu'on aura une fois établi (67) à l'aide des règles et des procédés expliqués ci-dessus, le barême général des moments sur les appuis, le calcul le plus important sera déjà effectué; et il ne restera qu'à s'en servir pour dresser l'épure des moments de flexion et des efforts tranchants dans l'ensemble de la poutre, dont on a besoin pour la distribution des fers dans les bandes et les croisillons.

L'épure des moments pourra être tracée facilement à l'aide des patrons paraboliques (68) (69) que l'on construit avec les charges q et $(p+q)$ par *m* pour chaque travée (généralement quatre en tout). Il ne sera bas absolument nécessaire d'y rechercher (136) spécialement les points F, F' en déterminant leurs abscisses ξ ξ' et il importera peu que ces points tombent à l'intérieur ou à l'extérieur de la parabole N° 6 †. Dans le cas plus rare toutefois, où

---

* M. Collignon cite 2 n combinaisons dans son cours de mécanique appliquée (Paris, Dunod, 1869, p. 294). Notre barême des charges ci-contre, donne non seulement leur nombre mais encore leur forme.

** Nous avons ici en vue surtout les contours donnant les plus grands moments en valeur absolue, dont le praticien a besoin pour la distribution des tôles. On peut facilement compléter l'épure au point de vue théorique en y ajoutant les contours des moments minima à tracer de part et d'autre de l'arc de parabole N° 6, entre les appuis et les points d'inflexion fixes; il suffit de remarquer à cet effet que ce sont les mêmes paraboles N° 1, 2 et 4, 5 déjà utilisées vers le haut, que l'on utilisera de nouveau vers le bas en ordre inverse, c. a. d. les premières pour le contour de droite et les dernières pour celui de gauche. Le N° 2* pour la première travée et la combinaison où les deux premières travées sont sans charge, ainsi que le N° 4* pour la dernière travée et la combinaison où les deux dernières travées sont sans charge, ne servent uniquement qu'à cette étude. C'est pour tenir compte de ces circonstances, que nous avons ajouté les numéros en question dans le barême des charges du Tome I; nous les avons supprimés dans celui du Tome II qui servira plus spécialement aux constructeurs.

*** Dans le cas d'une répartition symétrique des longueurs de travées, il y aura $(n-1)$ combinaisons qui seront symétriques de $(n-1)$ autres et alors le nombre total des combinaisons distinctes se réduit à $(n+1)$.

† D'après les épures annexées à l'ouvrage déjà cité de M. L. Bresse (cours de mécan. appl. 3me partie 1865) pour les ponts usuels à travées intermédiaires égales à l et travées de rive un peu moindres égales à θ l ainsi que pour l'hypothèse d'une seule et même surcharge p par *m* sur tout le pont, il paraîtrait que les points F, F' sont encore à l'intérieur de la parabole N° 6 lorsque $l_1 : l_2 = 8 : 10$ et en sont déjà sortis lorsque $l_1 : l_2 = 10 : 8$. Les hypothèses faites sur la surcharge p influent aussi sur l'emplacement des points dont il est question. (Voir notre épure du N° *LIX*.)

En pratique il est commode, de porter d'abord en ordonnées sur l'épure, tous les moments sur les appuis trouvés (136), en désignant leurs extrémités dans chaque travée avec celui des numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6

une répartition tout à fait irrégulière des longueurs de travées ne permettrait pas d'employer nos tables de coefficients, et forcerait à calculer les α et β, il conviendra de calculer aussi les abscisses ξ ξ' des points F et F' à titre de contrôle (75)*. Dans tous les autres cas plus pratiques on pourra se contenter du tracé obtenu avec les patrons paraboliques**.

Pour construire l'épure des efforts tranchants qui se compose toujours de deux courbes de degré supérieur dans chaque travée, il est nécessaire de calculer (55) (61) un certain nombre d'ordonnées de chaque courbe (70) (71).

La disposition généralement adoptée pour l'épure des moments et des efforts tranchants, est celle des croquis du barême (136) où l'on a porté les ordonnées des moments vers le haut, celles des efforts tranchants vers le bas; on cherche souvent, comme l'on sait, à choisir les échelles du dessin de façon à mettre ces contours en relation immédiate avec l'épure de la distribution des fers dans bandes et les croisillons ce qui simplifie le travail du constructeur.

Lorsqu'enfin il ne s'agit que de vérifier sommairement des projets déjà faits, sans se servir de constructions graphiques (même des patrons paraboliques) on pourra se contenter de vérifier le barême général des moments sur les appuis (67) et de contrôler ensuite quelques points marquants des contours de l'épure en se servant des formules (54) (55) et (61) et utilisant pour $\mathfrak{M}_x$ et $\mathfrak{V}_x$ les tables numériques auxiliaires.

On pourra enfin vérifier encore directement l'une quelconque des paraboles tracées, dont on connaîtra toujours une corde donnée par ses extrémités au-dessus des appuis, et l'ordonnée médiane (6) (72) donnée par la flèche $\frac{1}{8}\,ql^2$ ou $\frac{1}{8}\,(p+q)\,l^2$ portée à partir du milieu de la corde vers le bas. Ce sera la construction (68) (69) généralisée***.

---

qui leur convient. (Certains points seront numérotés de part et d'outre de l'appui.) On applique ensuite à chaque couple de numéros semblables le patron $(p+q)$ ou (q) de la travée suivant qu'elle est ou non, en surcharge. Le papier-millimètre rend des services excellents pour tous ces tracés.

* Le calcul de ces abscisses ne donnera lieu du reste qu'à une simple division ou proportion pour chaque point lorsqu'on se sert de nos tables, ainsi que nous le faisons voir à propos de l'exemple d'un pont à 5 travées, que nous traitons au N° *LIX*. Cette vérification complémentaire permettra de juger de l'exactitude des tracés paraboliques.

** Si on dessine l'épure sur du papier-calque ou de la toile calque, on pourra même se dispenser de découper les patrons en carton. Les paraboles étant tracées comme dans la fig. (68) on les fera passer sous le calque dans chacune des positions requises, ce qui est très-expéditif.

*** Parmi les procédés presque sans nombre qui ont été proposés pour construire la parabole (à utiliser pour les patrons) nous recommandons celui qui concerne le cas où l'on donne deux points A A' de la courbe et leurs tangentes A T_1 et A' T_1. On réunit les milieux T_2 T'_2 des longueurs A T_1 et A' T_1 par une droite T_2 T'_2 qui sera tangente en son milieu M à la courbe. On opère ensuite sur chacun des arcs A M, A' M comme on a opéré sur l'arc entier A M A', ce qui donne les points 2 et leurs tangentes . . . et ainsi de suite.

Cette construction qui n'exige qu'une règle à division millimétrique, avec laquelle on pourra, comme on sait, pointer très-facilement les milieux sur les longueurs A T_1, A' T_1 puis T_2 T'_2 . . . etc., donne simultanément les points de la courbe et leurs tangentes. On pourra vérifier encore à titre de contrôle le parallelisme des lignes (T_1 M) (T_2 2) (T_3 3) . . . etc., ainsi que les longueurs (T_2 2) = 1/4 (O M) = 1/4 (M T_1), (T_3 3) = 1/4 (T_2 2) . . . etc.

(137)

Construction pratique la plus simple de la parabole AMA'.

$MT_2 = MT'_2 = \frac{1}{2}$ OA et ∥ OA

$MT_3 = MT'_3 = \frac{1}{2}\,MT_2$

$T_2.2 = \frac{1}{4}$OM

Dans le cas présent c'est généralement (68) la longueur O M qui est donnée en outre de la corde A A' et l'angle A O M est un angle droit. On prendra alors M T_1 = O M ou bien M T_2 = 1/2 A O. Dans la fig. (137) qui se rapporte directement au texte, l'angle A O M est quelconque.

Les paraboles destinées aux patrons devront être prolongées au-delà de A et A', ce qui peut être effectué à l'aide de la même construction comme l'indique la figure. Il suffirait aussi (69) de faire la construction en amplifiant A A' de 30% pour la travée intermédiaire et d'au moins 160% pour celle de rive, tout en conservant les mêmes charges q et $(p+q)$ par mètre.

LVIII. Manière d'utiliser nos tableaux de formules et les tables numériques du Tome II qui s'y rapportent.

Les tableaux de formules qui suivent ont été disposés de telle façon que les ingénieurs qui connaissent la théorie des poutres continues sinon telle que nous l'exposons, du moins telle qu'on l'étudie en France et en Autriche depuis une vingtaine d'années, puissent même après avoir abandonné ce genre de calculs pendant fort longtemps, reconnaître à première vue quels sont à peu-près les calculs qui leur sont nécessaires pour pouvoir dresser le projet d'un pont à construire*.

On a dû dans cet ordre d'idées disposer chaque tableau de formules, de façon qu'il se suffise en quelque sorte à lui-même et contienne tout ce dont on aura besoin dans chaque cas particulier, évitant ainsi au lecteur toute recherche ultérieure; on excusera par ce motif les répétitions que ce système rend inévitables.

Les tableaux de formules concernent les ponts à poutres continues avec 2, 3, 4 et 5 travées. Les formules de chaque tableau supposent d'abord le cas plus général mais rare d'une répartition de longueurs de travées tout-à-fait quelconque; on y traite ensuite le cas spécial qui se présente presque toujours en pratique où les travées intermédiaires sont égales à l et les travées de rive un peu moindres égales à θl. Dans ce dernier cas on a pu exprimer en fonction de la seule variable θ, tous les coefficients cités, parmi lesquels se trouvent aussi ceux (61) qui concernent l'effort tranchant résultant spécialement de la surcharge partielle (échelle 𝔟) de la travée considérée.

Lorsqu'on se sera assuré de l'exactitude des fonctions de θ que nous citons, on pourra ensuite appliquer les formulaires sans rechercher la théorie qui les concerne; les tables numériques du Tome II donnent les valeurs des coefficients toutes calculées pour les ponts avec 2, 3 et 4 travées, et les numérons des tables sont inscrits immédiatement au-dessous des formules qu'elles concernent.

Nous y avons ajouté au N[os] *LIX* à titre d'exemple, les calculs concernant un pont à 5 travées construit récemment sur le San au *km* 95·987 de la ligne Chyrow-Zagorz (Gallicie) par l'usine de Wittkowitz, et qui répond entièrement aux prescriptions de l'ordonnance autrichienne.

Les coefficients calculés à l'aide des formules monômes (173) (174) (175) (176) de l'auteur (formulaire 4) ne diffèrent que fort peu des valeurs analogues que l'on trouverait en supposant la travée centrale supprimée et appliquant nos tables numériques pour un pont à 4 travées. On en conclut que pratiquement parlant il n'y a pas lieu de considérer pour le calcul de ce genre de ponts plus de 5 travées, puisque pour ceux qui en auraient d'avantage on pourra construire toutes les travées N° 3, 4 . . . (n — 2) comme la travée N° 3 du pont à 5 travées.

Les tables numériques XX à XLV du Tome II pour les ponts à 2, 3 et 4 travées, contiennent les valeurs de tous les coefficients des formulaires dont on a besoin soit pour (échelle 𝔞) les moments sur les appuis (139) (140) (141) (152) (153) (154) (162) (163) (164) soit pour (échelle 𝔟) les efforts tranchants (142) (143) (155) (156) (165) (166).

Pour les moments sur les appuis provenant de la surcharge d'une travée de rive (139) (152) (162) on a dressé deux espèces de tables correspondant l'une aux moments $\frac{1}{8}\,p\,l_1^2$ l'autre** aux moments $\frac{1}{8}\,p\,l^2$.

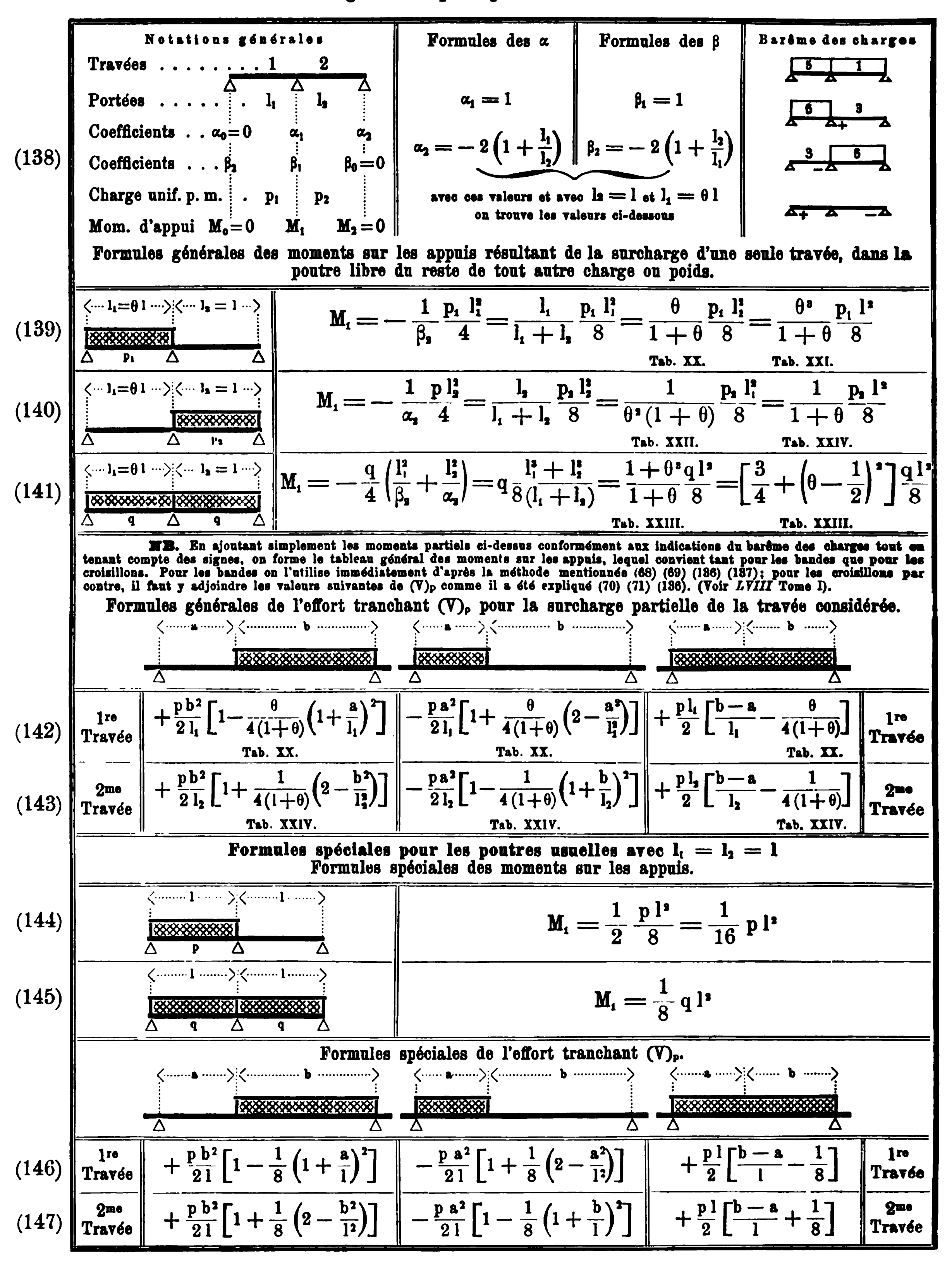
La première espèce de coefficients est destinée de préférence au calcul des moments pour les ponts de chemins de fer, parce que les moments $\frac{1}{8}\,p\,l_1^2$ se trouvent déjà tout calculés d'apres l'échelle 𝔞 de l'ordonnance à la table V de notre tome II. Les tables en question pourront être utilisées encore pour les coefficients relatifs à l'effort tranchant provenant de la surcharge partielle sur la travée de rive (échelle 𝔟) d'après les formules (142) (143) (155) (165) où il faut prendre le $^1/_4$ des valeurs tabulaires citées pour les moments au-dessus de la première pile. Pour cette raison on a aussi inscrit les numéros des tables en question au-dessous des formules citées pour les efforts tranchants.

La deuxième espèce de coefficients (pour les moments $\frac{1}{8}\,p\,l^2$) servira de préférence au calcul des ponts-routes pour lesquels la charge p par *m* (rassemblement humain) est constante pour toute la poutre, de manière que l'on n'aura à y calculer qu'un seul moment $\frac{1}{8}\,p\,l^2$. Ces coefficients peuvent encore être utilisés d'une manière générale pour vérifier qu'en surchargeant à la fois toutes les travées on obtient les mêmes moments sur les appuis qu'en additionnant algébriquement les moments partiels calculés en surchargeant chaque travée séparément.

* Les procédés graphiques que nous donnons au N° *LX*, ne présentent pas les mêmes avantages; ils exigent une étude spéciale, mais permettent en revanche de traiter rapidement des cas exceptionnels.

** Ces deux valeurs de coefficient correspondant à une même valeur de θ dans les deux tables, sont naturellement dans le rapport θ^2.

1. Formules générales pour poutres continues à 2 travées.



	Notations générales	Formules des α	Formules des β	Barème des charges
(138)	Travées .... 1 2 Portées ..... l_1 l_2 Coefficients .. $\alpha_0=0$ α_1 α_2 Coefficients ... β_2 β_1 $\beta_0=0$ Charge unif. p. m. p_1 p_2 Mom. d'appui $M_0=0$ M_1 $M_2=0$	$\alpha_1=1$ $\alpha_2=-2\left(1+\frac{l_1}{l_2}\right)$	$\beta_1=1$ $\beta_2=-2\left(1+\frac{l_2}{l_1}\right)$	5 1 6 3 + 3 6 − + −

avec ces valeurs et avec $l_2 = l$ et $l_1 = \theta l$ on trouve les valeurs ci-dessous

Formules générales des moments sur les appuis résultant de la surcharge d'une seule travée, dans la poutre libre du reste de tout autre charge ou poids.

	Charge	Moment
(139)	$l_1=\theta l$, $l_2=l$; p_1	$M_1=-\frac{1}{\beta_2}\frac{p_1 l_1^2}{4}=\frac{l_1}{l_1+l_2}\frac{p_1 l_1^2}{8}=\frac{\theta}{1+\theta}\frac{p_1 l_1^2}{8}=\frac{\theta^3}{1+\theta}\frac{p_1 l^2}{8}$ (Tab. XX.) (Tab. XXI.)
(140)	$l_1=\theta l$, $l_2=l$; p_2	$M_1=-\frac{1}{\alpha_2}\frac{p l_2^2}{4}=\frac{l_2}{l_1+l_2}\frac{p_2 l_2^2}{8}=\frac{1}{\theta^3(1+\theta)}\frac{p_2 l_1^2}{8}=\frac{1}{1+\theta}\frac{p_2 l^2}{8}$ (Tab. XXII.) (Tab. XXIV.)
(141)	$l_1=\theta l$, $l_2=l$; q q	$M_1=-\frac{q}{4}\left(\frac{l_1^2}{\beta_2}+\frac{l_2^2}{\alpha_2}\right)=q\frac{l_1^3+l_2^3}{8(l_1+l_2)}=\frac{1+\theta^3}{1+\theta}\frac{q l^2}{8}=\left[\frac{3}{4}+\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{q l^2}{8}$ (Tab. XXIII.) (Tab. XXIII.)

NB. En ajoutant simplement les moments partiels ci-dessus conformément aux indications du barème des charges tout en tenant compte des signes, on forme le tableau général des moments sur les appuis, lequel convient tant pour les bandes que pour les croisillons. Pour les bandes on l'utilise immédiatement d'après la méthode mentionnée (68) (69) (136) (137); pour les croisillons par contre, il faut y adjoindre les valeurs suivantes de $(V)_p$ comme il a été expliqué (70) (71) (136). (Voir *LVIII* Tome I).

Formules générales de l'effort tranchant $(V)_p$ pour la surcharge partielle de la travée considérée.

		a, b (charge sur b)	a, b (charge sur a)	a, b (charge sur toute la travée)	
(142)	1re Travée	$+\frac{p b^2}{2 l_1}\left[1-\frac{\theta}{4(1+\theta)}\left(1+\frac{a}{l_1}\right)^2\right]$ Tab. XX.	$-\frac{p a^2}{2 l_1}\left[1+\frac{\theta}{4(1+\theta)}\left(2-\frac{a^2}{l_1^2}\right)\right]$ Tab. XX.	$+\frac{p l_1}{2}\left[\frac{b-a}{l_1}-\frac{\theta}{4(1+\theta)}\right]$ Tab. XX.	1re Travée
(143)	2me Travée	$+\frac{p b^2}{2 l_2}\left[1+\frac{1}{4(1+\theta)}\left(2-\frac{b^2}{l_2^2}\right)\right]$ Tab. XXIV.	$-\frac{p a^2}{2 l_2}\left[1-\frac{1}{4(1+\theta)}\left(1+\frac{b}{l_2}\right)^2\right]$ Tab. XXIV.	$+\frac{p l_2}{2}\left[\frac{b-a}{l_2}-\frac{1}{4(1+\theta)}\right]$ Tab. XXIV.	2me Travée

Formules spéciales pour les poutres usuelles avec $l_1 = l_2 = l$
Formules spéciales des moments sur les appuis.

	Charge	Moment
(144)	l, l; p	$M_1=\frac{1}{2}\frac{p l^2}{8}=\frac{1}{16}p l^2$
(145)	l, l; q q	$M_1=\frac{1}{8}q l^2$

Formules spéciales de l'effort tranchant $(V)_p$.

		a, b (charge sur b)	a, b (charge sur a)	a, b (charge sur toute la travée)	
(146)	1re Travée	$+\frac{p b^2}{2 l}\left[1-\frac{1}{8}\left(1+\frac{a}{l}\right)^2\right]$	$-\frac{p a^2}{2 l}\left[1+\frac{1}{8}\left(2-\frac{a^2}{l^2}\right)\right]$	$+\frac{p l}{2}\left[\frac{b-a}{l}-\frac{1}{8}\right]$	1re Travée
(147)	2me Travée	$+\frac{p b^2}{2 l}\left[1+\frac{1}{8}\left(2-\frac{b^2}{l^2}\right)\right]$	$-\frac{p a^2}{2 l}\left[1-\frac{1}{8}\left(1+\frac{b}{l}\right)^2\right]$	$+\frac{p l}{2}\left[\frac{b-a}{l}+\frac{1}{8}\right]$	2me Travée

2. Formules générales pour poutres continues à 3 travées.

(148)

Notations générales	Formules des α	Formules des β	Barême du charges
Travées . . . . . . 1 2 3 Portées . . . . l_1 l_2 l_3 Coefficients . $\alpha_0 = 0$ α_1 α_2 α_3 Coefficients . . β_3 β_2 β_1 $\beta_0 = 0$ Charge unif. p. m p_1 p_2 p_3 Mom. d'appui $M_0 = 0$ M_1 M_2 $M_3 = 0$	$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)$ $\alpha_3 = -\frac{l_2}{l_3} - 2\left(1 + \frac{l_2}{l_3}\right)\alpha_2$	$\beta_1 = 1$ $\beta_2 = -2\left(1 + \frac{l_3}{l_2}\right)$ $\beta_3 = -\frac{l_2}{l_1} - 2\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)\beta_2$	5 1 5 1 6 3 6 3 − 6 3 + + 4 − 2 + −

Formules générales des moments sur les appuis résultant de la surcharge d'une seule travée, dans la poutre libre du reste de tout autre charge ou poids.

(149)	p_1	$M_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_3}\,\frac{p_1 l_1^2}{4}$	$M_2 = -\frac{1}{\beta_3}\,\frac{p_1 l_1^2}{4}$
(150)	p_2	$M_1 = \frac{1 + \beta_2}{1 - \alpha_2 \beta_2}\,\frac{p_2 l_2^2}{4}$	$M_2 = \frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2 \beta_2}\,\frac{p_2 l_2^2}{4}$
(151)	p_3	$M_1 = -\frac{1}{\alpha_3}\,\frac{p_3 l_3^2}{4}$	$M_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\,\frac{p_3 l_3^2}{4}$

NB. En ajoutant simplement les moments partiels ci-dessus, conformément aux indications du barême des charges tout en tenant compte des signes, on forme le tableau général des moments sur les appuis, lequel convient tant pour les bandes que pour les croisillons. Pour les bandes on l'utilise immédiatement d'après la méthode mentionnée (68) (69) (136) (137); pour les croisillons par contre il faut y adjoindre les formules (61) tout en procédant comme il a été expliqué (70) (71) (136). (Voir *LVIII* Tome I.)

Formules spéciales pour les poutres usuelles avec: $l_2 = l$ et $l_1 = l_3 = \theta l$.

Formules spéciales de tous les moments sur les appuis résultant de la surcharge d'une seule travée dans la poutre libre du reste de tout autre charge ou poids.

(152)	θl, l, θl; p_1	$M_1 = +\frac{4\theta(1+\theta)}{(3+2\theta)(1+2\theta)}\,\frac{p_1 l_1^2}{8}$ Tab. XXV ou XXVI.	$M_2 = -\frac{2\theta}{(3+2\theta)(1+2\theta)}\,\frac{p_1 l_1^2}{8}$ Tab. XXVII ou XXVIII.
(153)	θl, l, θl; p_2	$M_1 = +\frac{2}{3+2\theta}\,\frac{p_2 l^2}{8}$ Tab. XXIX.	$M_2 = +\frac{2}{3+2\theta}\,\frac{p_2 l^2}{8}$ Tab. XXIX.
(154)	θl, l, θl; q q q	$M_1 = +\frac{2(1+\theta^3)}{3+2\theta}\,\frac{q l^2}{8}$ Tab. XXX.	$M_2 = +\frac{2(1+\theta^3)}{3+2\theta}\,\frac{q l^2}{8}$ Tab. XXX.

Formules spéciales de l'effort tranchant $(V)_p$ pour la surcharge partielle de la travée considérée.

		a, b	a, b	a, b	
(155)	1re Travée	$+\frac{p b^2}{2 l_1}\left[1 - \frac{\theta(1+\theta)}{(3+2\theta)(1+2\theta)}\left(1 + \frac{a}{l_1}\right)^2\right]$ Tab. XXV.	$-\frac{p a^2}{2 l_1}\left[1 + \frac{\theta(1+\theta)}{(3+2\theta)(1+2\theta)}\left(2 - \frac{a^2}{l_1^2}\right)\right]$ Tab. XXV.	$+\frac{p l_1}{2}\left[\frac{b-a}{l_1} - \frac{\theta(1+\theta)}{(3+2\theta)(1+2\theta)}\right]$ Tab. XXV.	1re Travée
(156)	2me Travée	$+\frac{p b^2}{2 l_2}\left[1 - \frac{1}{1+2\theta}\,\frac{a^2}{l_2^2}\right]$ Tab. XXXI.	$-\frac{p a^2}{2 l_2}\left[1 - \frac{1}{1+2\theta}\,\frac{b^2}{l_2^2}\right]$ Tab. XXXI.	$+\frac{p}{2}(b - a)$	2me Travée

3. Formules générales pour poutres continues à 4 travées.

(157)

Notations générales

Travées		1		2		3		4	
Portées		l_1		l_2		l_3		l_4	
Coefficients α . .	$\alpha_0 = 0$		α_1		α_2		α_3		α_4
Coefficients β	β_4		β_3		β_2		β_1		$\beta_0 = 0$
Charge unif. pr. m. .		p_1		p_2		p_3		p_4	
Mom. d'appui . .	$M_0 = 0$		M_1		M_2		M_3		$M_4 = 0$

Formules des α

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_2 = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)$$

$$\alpha_3 = -\frac{l_2}{l_3} - 2\left(1 + \frac{l_2}{l_3}\right)\alpha_2$$

$$\alpha_4 = -\frac{l_3}{l_4} - 2\left(1 + \frac{l_3}{l_4}\right)\alpha_3$$

Formules des β

$$\beta_1 = 1$$

$$\beta_2 = -2\left(1 + \frac{l_4}{l_3}\right)$$

$$\beta_3 = -\frac{l_3}{l_2} - 2\left(1 + \frac{l_3}{l_2}\right)\beta_2$$

$$\beta_4 = -\frac{l_2}{l_1} - 2\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)\beta_3$$

Barème des charges

Formules générales des moments sur les appuis résultant de la surcharge d'une seule travée, dans la poutre libre du reste de tout autre charge ou poids.

(158)	p_1	$M_1 = -\frac{\beta_3}{\beta_4} \cdot \frac{p_1 l_1^2}{4}$	$M_2 = -\frac{\beta_2}{\beta_4} \cdot \frac{p_1 l_1^2}{4}$	$M_3 = -\frac{1}{\beta_4} \cdot \frac{p_1 l_1^2}{4}$
(159)	p_2	$M_1 = \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_2 - \alpha_2 \beta_3} \cdot \frac{p_2 l_2^2}{4}$	$M_2 = \beta_2 \frac{1 + \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2 \beta_3} \cdot \frac{p_2 l_2^2}{4}$	$M_3 = \frac{1 + \alpha_2}{\beta_2 - \alpha_2 \beta_3} \cdot \frac{p_2 l_2^2}{4}$
(160)	p_3	$M_1 = \frac{1 + \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2 \alpha_3} \cdot \frac{p_3 l_3^2}{4}$	$M_2 = \alpha_3 \frac{1 + \beta_2}{\alpha_2 - \beta_2 \alpha_3} \cdot \frac{p_3 l_3^2}{4}$	$M_3 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2 - \beta_2 \alpha_3} \cdot \frac{p_3 l_3^2}{4}$
(161)	p_4	$M_1 = -\frac{1}{\alpha_4} \cdot \frac{p_4 l_4}{4}$	$M_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_4} \cdot \frac{p_4 l_4^2}{4}$	$M_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \cdot \frac{p_4 l_4^2}{4}$

NB. En ajoutant simplement les moments partiels ci-dessus, conformément aux indications du barème des charges tout en tenant compte des signes, on forme le tableau général des moments sur les appuis, lequel convient tant pour les bandes que pour les croisillons. Pour les bandes on l'utilise immédiatement d'après la méthode mentionnée (68) (69) (186) (187); pour les croisillons par contre il faut y adjoindre les formules (61) tout en procédant comme il a été expliqué (70) (71) (186). (Voir *LVIII* Tome I.)

Formules spéciales pour les poutres usuelles avec: $l_2 = l_3 = l$ et $l_1 = l_4 = \theta l$.

Formules spéciales de tous les moments sur les appuis résultant de la surcharge d'une seule travée dans la poutre libre du reste, de tout autre charge ou poids.

(162)	$M_1 = + \frac{\theta(7+8\theta)}{2(1+\theta)(3+4\theta)} \cdot \frac{p_1 l_1^2}{8}$ Tab. XXXII ou XXXIII.	$M_2 = - \frac{\theta}{3+4\theta} \cdot \frac{p_1 l_1^2}{8}$ Tab. XXXIV ou XXXV.	$M_3 = + \frac{\theta}{2(1+\theta)(3+4\theta)} \frac{p_1 l_1^2}{8}$ Tab. XXXVI ou XXXVII.
(163)	$M_1 = + \frac{5+6\theta}{2(1+\theta)(3+4\theta)} \cdot \frac{p_2 l^2}{8}$ Tab. XXXVIII.	$M_2 = + \frac{1+2\theta}{3+4\theta} \cdot \frac{p_2 l^2}{8}$ Tab. XXXIX.	$M_3 = - \frac{1+2\theta}{2(1+\theta)(3+4\theta)} \frac{p_2 l^2}{8}$ Tab. XL.
(164)	$M_1 = + \frac{2(1+2\theta^3)}{3+4\theta} \cdot \frac{q l^2}{8}$ Tab. XLI.	$M_2 = + \frac{2(1+2\theta-\theta^3)}{3+4\theta} \frac{q l^2}{8}$ Tab. XLII.	$M_3 = + \frac{2(1+2\theta^3)}{3+4\theta} \frac{q l^2}{8}$ Tab. XLI.

Formules spéciales de l'effort tranchant $(V)_p$ pour la surcharge partielle de la travée considérée.

(165)	1re Travée	$+ \frac{p b^2}{2 l_1}\left[1 - \frac{\theta(7+8\theta)}{8(1+\theta)(3+4\theta)}\left(1+\frac{a}{l_1}\right)^2\right]$ Tab. XXXII.	$- \frac{p a^2}{2 l}\left[1 + \frac{\theta(7+8\theta)}{8(1+\theta)(3+4\theta)}\left(2 - \frac{a^2}{l_1^2}\right)\right]$ Tab. XXXII.	$+ \frac{p l_1}{2}\left[\frac{b-a}{l_1} - \frac{\theta(7+8\theta)}{8(1+\theta)(3+4\theta)}\right]$ Tab. XXXII.	1re Travée
(166)	2me Travée	$+ \frac{p b^2}{2 l_2}\left[1 - \frac{9+10\theta}{4(1+\theta)(3+4\theta)} \frac{a^2}{l_2^2} + \frac{3 \overset{*}{-} 4\theta^2}{8(1+\theta)(3+4\theta)}\left(1+\frac{a}{l_2}\right)\right]$ Tab. XLIII. Tab. XLV.	$- \frac{p a^2}{2 l_2}\left[1 - \frac{3+2\theta}{2(3+4\theta)} \frac{b^2}{l_2^2} - \frac{3 \overset{*}{-} 4\theta^2}{8(1+\theta)(3+4\theta)}\left(1+\frac{b}{l_2}\right)^2\right]$ Tab. XLIV. Tab. XLV.	$+ \frac{p l_2}{2}\left[\frac{b-a}{l_2} + \frac{3 \overset{*}{-} 4\theta^2}{8(1+\theta)(3+4\theta)}\right]$ Tab. XLV.	2me Travée

* **Remarque.** Les derniers termes qui se présentent dans les formules des travées intermédiaires, pour les ponts de 4 travées et plus, disparaissent, comme l'on sait, dans une travée pour laquelle $\mu = \nu$. C'est ce qui arrive ici (tout comme dans les ponts à 5 travées) pour la valeur $\theta = \sqrt{3/4} = 0{\cdot}8660254037$ . . qui est très-admissible d'autre part. Le rapport le plus préconisé en pratique reste toutefois $\theta = 9/10$.

4. Formules générales pour poutres continues à 5 travées.

(167)

Notations générales							Formules des α	Formules des β
Travées		1	2	3	4	5	$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 1$
Portées		l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	$\alpha_2 = -2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)$	$\beta_2 = -2\left(1 + \frac{l_5}{l_4}\right)$
Coefficients α	$\alpha = 0$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\alpha_3 = -\frac{l_2}{l_3} - 2\left(1 + \frac{l_2}{l_3}\right)\alpha_2$	$\beta_3 = -\frac{l_4}{l_3} - 2\left(1 + \frac{l_4}{l_3}\right)\beta_2$
Coefficients β	β_5	β_4	β_3	β_2	β_1	$\beta_0 = 0$	$\alpha_4 = -\frac{l_3}{l_4} - 2\left(1 + \frac{l_3}{l_4}\right)\alpha_3$	$\beta_4 = -\frac{l_3}{l_2} - 2\left(1 + \frac{l_3}{l_2}\right)\beta_3$
Charge unif. pr. m.		p_1	p_2	p_3	p_4	p_5		
Moments d'appui	$M_0 = 0$	M_1	M_2	M_3	M_4	$M_5 = 0$	$\alpha_5 = -\frac{l_4}{l_5} - 2\left(1 + \frac{l_4}{l_5}\right)\alpha_4$	$\beta_5 = -\frac{l_2}{l_1} - 2\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)\beta_4$

Barème des charges

Formules générales des moments sur les appuis résultant de la surcharge d'une seule travée, dans la poutre libre du reste, de tout autre charge ou poids.

	Surcharge				
(168)	p_1	$M_1 = -\frac{\beta_4}{\beta_5}\,\frac{p_1 l_1^2}{4}$	$M_2 = -\frac{\beta_3}{\beta_5}\,\frac{p_1 l_1^2}{4}$	$M_3 = -\frac{\beta_2}{\beta_5}\,\frac{p_1 l_1^2}{4}$	$M_4 = -\frac{1}{\beta_5}\,\frac{p_1 l_1^2}{4}$
(169)	p_2	$M_1 = \frac{\beta_3 + \beta_4}{\beta_3 - \alpha_2 \beta_4}\,\frac{p_2 l_2^2}{4}$	$M_2 = \beta_3 \frac{1 + \alpha_2}{\beta_3 - \alpha_2 \beta_4}\,\frac{p_2 l_2^2}{4}$	$M_3 = \beta_2 \frac{1 + \alpha_2}{\beta_3 - \alpha_2 \beta_4}\,\frac{p_2 l_2^2}{4}$	$M_4 = \frac{1 + \alpha_2}{\beta_3 - \alpha_2 \beta_4}\,\frac{p_2 l_2^2}{4}$
(170)	p_3	$M_1 = \frac{\beta_2 + \beta_3}{\alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3}\,\frac{p_3 l_3^2}{4}$	$M_2 = \alpha_2 \frac{\beta_2 + \beta_3}{\alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3}\,\frac{p_3 l_3^2}{4}$	$M_3 = \beta_2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3}\,\frac{p_3 l_3^2}{4}$	$M_4 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3}\,\frac{p_3 l_3^2}{4}$
(171)	p_4	$M_1 = \frac{1 + \beta_2}{\alpha_3 - \beta_2 \alpha_4}\,\frac{p_4 l_4^2}{4}$	$M_2 = \alpha_3 \frac{1 + \beta_2}{\alpha_3 - \beta_2 \alpha_4}\,\frac{p_4 l_4^2}{4}$	$M_3 = \alpha_3 \frac{1 + \beta_2}{\alpha_3 - \beta_2 \alpha_4}\,\frac{p_4 l_4^2}{4}$	$M_4 = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_3 - \beta_2 \alpha_4}\,\frac{p_4 l_4^2}{4}$
(172)	p_5	$M_1 = -\frac{1}{\alpha_5}\,\frac{p_5 l_5^2}{4}$	$M_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_5}\,\frac{p_5 l_5^2}{4}$	$M_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_5}\,\frac{p_5 l_5^2}{4}$	$M_4 = -\frac{\alpha_4}{\alpha_5}\,\frac{p_5 l_5^2}{4}$

NB. En ajoutant simplement les moments partiels ci-dessus, conformément aux indications du barème des charges tout en tenant compte des signes, on forme le tableau général des moments sur les appuis, lequel convient tant pour les bandes que pour les croisillons. Pour les bandes on l'utilise immédiatement d'après la méthode mentionnée (68) (69) (136) (137); pour les croisillons par contre il faut y adjoindre les formules (61) tout en procédant comme il a été expliqué (70) (71) (136). (Voir *LVIII*, *LIX* du Tome I.)

Formules spéciales pour les poutres usuelles avec: $l_2 = l_3 = l_4 = l$ et $l_1 = l_5 = \theta l$.

Formules spéciales de tous les moments sur les appuis résultant de la surcharge d'une seule travée dans la poutre libre du reste de tout autre charge ou poids.

	Charge (θl, l, l, l, θl)				
(173)	p_1	$M_1 = + \frac{4\theta(13+15\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_1 l_1^2}{8}$	$M_2 = - \frac{2\theta(7+8\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_1 l_1^2}{8}$	$M_3 = + \frac{4\theta(1+\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_1 l_1^2}{8}$	$M_4 = - \frac{2\theta}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_1 l_1^2}{8}$
(174)	p_2	$M_1 = + \frac{2(19+22\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_2 l^2}{8}$	$M_2 = + \frac{2(7+8\theta)(1+2\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_2 l^2}{8}$	$M_3 = - \frac{4(1+\theta)(1+2\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_2 l^2}{8}$	$M_4 = + \frac{2(1+2\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{p_2 l^2}{8}$
(175)	p_3	$M_1 = - \frac{2}{9+10\theta} \frac{p_3 l^2}{8}$	$M_2 = + \frac{4(1+\theta)}{9+10\theta} \frac{p_3 l^2}{8}$	$M_3 = + \frac{4(1+\theta)}{9+10\theta} \frac{p_3 l^2}{8}$	$M_4 = - \frac{2}{9+10\theta} \frac{p_3 l^2}{8}$
(176)	q, q, q, q, q	$M_1 = + \frac{6+10\theta^3}{9+10\theta} \frac{q l^2}{8}$	$M_2 = + \frac{6+8\theta-2\theta^3}{9+10\theta} \frac{q l^2}{8}$	$M_3 = + \frac{6+8\theta-2\theta^3}{9+10\theta} \frac{q l^2}{8}$	$M_4 = + \frac{6+10\theta^3}{9+10\theta} \frac{q l^2}{8}$

Formules spéciales de l'effort tranchant $(V)_p$, pour la surcharge partielle de la travée considérée.

		(a, b — charge sur b)	(a, b — charge sur a)	(a, b — charge totale)	
(177)	1re Travée	$+\frac{p b^2}{2 l_1}\left[1 - \frac{\theta(13+15\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)}\left(1+\frac{a}{l_1}\right)^2\right]$	$-\frac{p a^2}{2 l_1}\left[1 + \frac{\theta(13+15\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)}\left(2-\frac{a^2}{l_1^2}\right)\right]$	$+\frac{p l_1}{2}\left[\frac{b-a}{l_1} - \frac{\theta(13+15\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)}\right]$	1re Travée
(178)	2me Travée	$+\frac{p b^2}{2 l_2}\left[1 - \frac{33+38\theta}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{a^2}{l_2^2} + \frac{2(3-4\theta^2)}{(5+6\theta)(9+10\theta)}\left(1+\frac{a}{l_2}\right)^2\right]$	$-\frac{p a^2}{2 l_2}\left[1 - \frac{(3+2\theta)(7+8\theta)}{(5+6\theta)(9+10\theta)} \frac{b^2}{l_2^2} - \frac{2(3-4\theta^2)}{(5+6\theta)(9+10\theta)}\left(1+\frac{b}{l_2}\right)^2\right]$	$+\frac{p l_2}{2}\left[\frac{b-a}{l_2} + \frac{2(3-4\theta^2)}{(5+6\theta)(9+10\theta)}\right]$	2me Travée
(179)	3me Travée	$+\frac{p b^2}{2 l_3}\left[1 - \frac{2(1+\theta)}{5+6\theta} \frac{a^2}{l_3^2}\right]$	$-\frac{p a^2}{2 l_3}\left[1 - \frac{2(1+\theta)}{5+6\theta} \frac{b^2}{l_3^2}\right]$	$+\frac{p}{2}(b-a)$	3me Travée

LIX. Exemple d'un pont avec poutres continues à 5 travées, calculées exactement d'après les prescriptions de l'ordonnance autrichienne du 15 Sept. 1887.

En construisant récemment la deuxième voie sur la ligne de Chyrow-Zagorz (Gallicie) on a eu à exécuter un certain nombre de ponts assez importants, dont les poutres continues ont été calculées entièrement d'après les prescriptions de la nouvelle ordonnance autrichienne.

Le pont sur le fleuve San avec poutres continues à cinq travées réparties dans de bonnes conditions et construites avec double treillis et montants verticaux de renfort (croix de St.-André) c. a. d. dans un excellent système, a été choisi comme exemple à soumettre aux procédés que nous avons exposés; les calculs qui s'y rapportent sont réunis ci-après dans les tableaux N° 1, 2, 3, 4, 5 et l'épure 6 annexée; nous y ajouterons les remarques suivantes:

ad 1. Les charges permanentes q par *m* admises ne dépassent que fort peu les valeurs moyennes de la Tab. V du Tome II; toutes les fonctions dépendant de la charge mobile répondent aux échelles **a** et **b** de l'ordonnance et sont tirées de la Tab. V déjà citée.

ad 2. Ce barême des moments sur les appuis obtenus d'après les formules (173) (174) (175) en surchargeant chaque travée séparément (échelle **a**) ou en ne considérant que la charge permanente a été complété en tirant partie de la symétrie. Les facteurs, linéaires pour la plupart, et leurs logarithmes entrant dans les formules, sont:

(180)

$\theta = 0{\cdot}770718 \,.\,.\, \bar{1}{\cdot}8868956$	$13 + 15\,\theta = 24{\cdot}56077 \,.\,.\, 1{\cdot}3902419$	$6 + 10\,\theta^3 = 10{\cdot}57812 \,.\,.\, 1{\cdot}0244085$
$\theta^2 = 0{\cdot}594007 \,.\,.\, \bar{1}{\cdot}7737912$	$7 + 8\,\theta = 13{\cdot}16574 \,.\,.\, 1{\cdot}1194454$	$6 + 8\theta - 2\theta^3 = 11{\cdot}25012 \,.\,.\, 1{\cdot}0511572$
$\theta^3 = 0{\cdot}457812 \,.\,.\, \bar{1}{\cdot}6606868$	$4\,(1 + \theta) = 7{\cdot}082872 \,.\,.\, 0{\cdot}8502094$	$33 + 38\,\theta = 62{\cdot}28730 \,.\,.\, 1{\cdot}7943995$
$5 + 6\,\theta = 9{\cdot}624308 \,.\,.\, 0{\cdot}9833694$	$2\,(19 + 22\,\theta) = 71{\cdot}91159 \,.\,.\, 1{\cdot}8567982$	$3 + 2\,\theta = 4{\cdot}541436 \,.\,.\, 0{\cdot}6571933$
$9 + 10\,\theta = 16{\cdot}70718 \,.\,.\, 1{\cdot}2229032$	$1 + 2\,\theta = 2{\cdot}541436 \,.\,.\, 0{\cdot}4050791$	$2(3 - 4\,\theta^2) = 1{\cdot}247944 \,.\,.\, 0{\cdot}0961955$

Avec ces valeurs auxiliaires* on obtient rapidement tous les coefficients des formules (173) à (179), et la vérifications concernant la surcharge simultanée des 5 travées donnerait:

(181) . .

première travée:		deuxième travée:	
$+ 0{\cdot}461310 \times \theta^3$ . . =	$+ 0{\cdot}274021$	$- 0{\cdot}092263 \times \theta^3$ . . =	$- 0{\cdot}054805$
en ajoutant	$+ 0{\cdot}359127$	en ajoutant	$+ 0{\cdot}728175$
on aura	$+ 0{\cdot}633148$	on aura	$+ 0{\cdot}673370$

Ce sont exactement les valeurs données directement par les formules (176). Les coefficients vérifiés sont utilisés au tableau 2 des moments sur les appuis.

ad 3. Ce barême général des moments sur les appuis qui résultent des combinaisons de surcharge (échelle **a**) et de la charge permanente, s'obtient en effectuant sur les moments du tableau 2 toutes les additions algébriques indiquées par le barême des charges (136) et en utilisant la symétrie.

ad 4. Ces formules pour le calcul des plus grands efforts tranchants positifs et négatifs sont établies d'après l'équation générale (55) et ne diffèrent des formules analogues qui concerneraient la travée supposée indépendante, que par la présence de la constante $(\mathcal{M}_o - \mathcal{M}'_o) : l$ qui figure en premier terme ainsi que par la présence du facteur entre [ ] qui multiplie le dernier terme. Les moments $\mathcal{M}_o$ et $\mathcal{M}'_o$ se trouvent parmi ceux qui ont été déjà calculés (échelle **a**) au tableau 3 et le facteur entre [ ] du dernier terme $(V_a)_p$, est donné par les formules pour la surcharge partielle (échelle **b**) de la travée considérée (177) (178) (179) dont les coefficients se calculent à l'aide des facteurs auxiliaires (180).

ad 5. Ce tableau contient le détail des opérations de calcul effectuées d'après les formules du tableau 4 pour un certain nombre d'efforts tranchants que l'on n'a pas pris aux milieux de mailles de la construction (comme l'exigerait une recherche plus exacte) mais bien plutôt aux sections qui divisent chaque travée en dix parties égales. Cette façon de procéder qui donne une exactitude plus que suffisante pour le tracé de l'épure des efforts tranchants, simplifie beaucoup les calculs, puisque la partie supérieure du tableau pourra même servir pour tous les cas analogues, comme une table calculée une fois pour toutes **.

On remarquera que les moments tournants des lignes 10 et 18 sont tirés directement de la Tab. V du Tome II dressée pour travées indépendantes (échelle **b**) et que les efforts

* Nous répétons ici qu'il suffirait en pratique d'évaluer toutes ces fonctions avec 3 ou 4 chiffres significatifs (règle à calcul).

** Il suffirait en pratique de diviser en cinq parties égales en y utilisant la même table dont nous parlons, en raison de la courbure peu prononcée et régulière des contours de l'épure.

tranchants que l'on aurait si toutes les travées étaient indépendantes seraient ceux qui résultent de l'addition des valeurs inscrites aux lignes 11 et 12 pour la première travée, ou de celles qui sont inscrites aux lignes 19 et 20 s'il s'agit de la deuxième ou troisième travée.

En observant ensuite qu'il faut modifier ici ces valeurs par l'addition de la constante $(\mathcal{M} - \mathcal{M}'):l$ et en tenant compte du facteur correctif dont les valeurs sont inscrites aux lignes 13 et 15 pour la première travée, aux lignes 21 et 23 pour la deuxième et à la ligne 25 pour la troisième on en conclut ce fait certainement intéressant que les croisillons exigent un peu plus de métal dans le pont à travées solidaires qu'ils n'en exigéraient si les travées étaient indépendantes. L'économie de métal résultant de la continuité porte donc exclusivement sur les bandes. Les ponts à poutres continues ne seront toutefois presque jamais soumis aux charges admises pour les calculer et présentent par suite une grande sécurité.

ad 6. Pour tracer l'épure des moments de flexion on a porté les moments du tableau 3 en ordonnées au-dessus des appuis en numérotant leurs extrémités dans chaque travée suivant les indications du barême de charges (136). On a construit ensuite (68) (69) (137) les quatre patrons paraboliques nécessaires pour les charges q_1 et $(p_1 + q_1)$ de la première travée ainsi que pour celles q_2 et $(p_2 + q_2)$ des travées intermédiaires 2 et 3, et en les appliquant aux points numérotés on a tracé tous les contours de l'épure*.

A titre de complément théorique seulement, des contours enveloppes ainsi obtenus, nous y avons ajouté les courbes de degré supérieur résultant des surcharges partielle (échelle a) en les traçant (137) comme arcs paraboliques dont on connaît les points extrêmes ainsi que leurs tangentes. Ce perfectionnement n'a pas d'importance pratique**.

Les points d'inflexion fixes qui n'ont également pas d'intérêt pratique quant à la distribution des tôles dans les bandes, peuvent encore s'obtenir par de simples proportions à l'aide des coefficients numériques du tableau 2***. Pour la travée de rive il suffira de remarquer que d'après (168) (173) on a:

$$(182) \quad . \; . \; . \; . \quad \frac{1}{\nu} = -\frac{\beta_4}{\beta_6} = \frac{1}{2}\,\frac{4\,\theta\,(13 + 15\,\theta)}{(5 + 6\,\theta)\,(9 + 10\,\theta)} = \frac{1}{2}\,0{\cdot}470896$$

Le point d'inflexions fixe dans la première travée sera donc donné par:

$$(183) \quad . \; . \; . \; . \quad \xi' = \frac{l_1}{\nu + 1} = \frac{0{\cdot}470896}{2{\cdot}470896}\,l_1 = 0{\cdot}190577\,.\,l_1 = 5\overset{m}{\cdot}317$$

Pour les travées intermédiaires il suffit de se rappeler (29) (31) la définition des α et β et des points d'inflexion fixes (74) (75) qui en résulte, pour écrire immédiatement d'après le tableau 2:

$$(184) \quad . \; . \quad \xi = \frac{0{\cdot}119709\,.\,l_2}{0{\cdot}423942 + 0{\cdot}119709} = 0{\cdot}220192\,.\,l_2 = 7\overset{m}{\cdot}971$$

$$(185) \quad . \; . \quad \xi' = \frac{0{\cdot}126212\,.\,l_2}{0{\cdot}470896 + 0{\cdot}126212} = 0{\cdot}211372\,.\,l_2 = 7\overset{m}{\cdot}652$$

pour la 2me travée

$$(186) \quad . \quad \xi = \xi' = \frac{0{\cdot}111948\,.\,l_3}{0{\cdot}416181 + 0{\cdot}111948} = 0{\cdot}211972\,.\,l_3 = 7\overset{m}{\cdot}673 \; . \; . \; \text{pour la 3}^{\text{me}} \text{ travée.}$$

Ce calcul fait voir que les points d'inflexion fixes s'obtiennent immédiatement ici à l'aide des coefficients du tableau 2, coefficients qui pour un pont de 2, 3 ou 4 travées se trouveraient tout calculés dans nos tables du tome II.

---

* Suivant que la travée que l'on étudie se trouve chargée ou non, dans la combinaison de surcharges que l'on considère, c'est le patron $(p + q)$ ou le patron q dont on aura à se servir.

** Afin de faire voir cependant que notre méthode ne laisse rien à désirer quant à l'exactitude théorique nous avons ajouté encore les courbes analogues fort inutiles donnant les moments minima près des appuis. Pour les tracer on utilise les paraboles déjà obtenues. Dans une travée intermédiaire la courbe de gauche est tangente au droit de l'appui à la parabole N° 4 et au droit du point d'inflexion fixe à la parabole N° 5, ce point étant aussi commun à la parabole N° 6 (non rabattue), de même la courbe de droite est tangente au droit de l'appui à la parabole N° 2 et au droit du point fixe à la parabole N° 1. Les courbes en question son bombées vers le haut. Pour la 1re travée il faut ajouter à l'épure la parabole N° 2 tracée pour la septième combinaison du tableau 3; la courbe cherchée lui est tangente au droit de l'appui, elle est tangente à la parabole N° 6 au droit du point fixe. Pour la dernière travée le tracé se ferait d'une manière analogue avec la parabole N° 4 pour la dixième combinaison du tableau 3.

*** Dans les travées intermédiaires, ces points résultent déjà des points d'intersection obtenus en traçant avec les patrons les paraboles numérotées 2, 3, 4 dans chaque travée.

L'échelle admise sur l'épure concerne les moments de flexion en tonnes-mètres par voie, d'accord avec les indications des tableaux 2 et 3. En pratique on admet généralement pour toute la poutre une hauteur théorique moyenne constante, que l'on utilise pour les efforts de bandes (quotients des moments par la hauteur). L'épure des moments par voie peut alors avec une autre échelle convenable, être considérée comme l'épure des efforts de bandes par poutre.

Pour utiliser cette épure comme épure de la distribution des tôles, c'est-à-dire pour mettre les deux contours en relation immédiate sur un seul et même dessin, permettant de constater immédiatement que le premier couvre bien suffisamment le second, il est nécessaire de recourir, d'abord à une l'hypothèse approximative. L'ordonnance autrichienne fixe pour le travail du fer une limite supérieure qui est de 772^{kg} par cm^2 pour les travées de 36^m2 et de 756^{kg} par cm^2 pour la travée de 27^m9. On acceptera donc préalablement la limite plus élevée de 772^{kg} pour les sections de bandes de toutes les travées, et on portera les efforts de résistance des bandes qui s'en suivent en ordonnées sur l'épure, en se servant de la même échelle qui est aussi celle des efforts provenant des moments de flexion. En rectifiant ensuite définitivement la distribution des fers dans les bandes on devra tenir compte de ce que dans les travées de rive un surplus de section de (772—756) : 756 ou environ 2·12 % sera nécessaire pour rectifier l'hypothèse cidessus. Les considérations d'aboutement dans les parties comprimées ou de flexion locale dans celles qui supportent directement la voie . . . . etc. entraînent d'autres rectifications analogues *.

Pour tracer l'épure des efforts tranchants on portera les valeurs calculées au tableau 5 en ordonnées sur le dessin et on tracera les contours passant par les points obtenus à l'aide de la règle courbe. Pour les poutres usuelles à mailles égales les croisillons ont une inclinaison constante sur les bandes et les efforts qui leur incombent sont dans un rapport constant avec les efforts tranchants correspondants.

On pourra donc en prenant une échelle convenable utiliser l'épure des efforts tranchants comme épure des efforts incombant aux croisillons, et mesurer ces derniers efforts sur le dessin, ce qui suffit pour établir les sections à donner aux barres du treillis. Si l'on veut en outre obtenir une épure d'ensemble pour comparer directement les efforts à supporter par les croisillons et les efforts de résistance que leurs profils de section y opposent, on pourra y parvenir en procédant à peu près comme nous l'avons indiqué à propos des bandes; mais cette façon de procéder n'est plus usitée actuellement, ce qui tient surtout aux grandes mailles des poutres à triangles admises de préférence et au grand nombre de calibres de fers dont on dispose pour construire les barres.

En résumé notre méthode pour calculer les poutres continues, consiste essentiellement à se procurer d'abord par le calcul quelques points importants des épures, lesquels concernent les moments de flexion sur les appuis et les efforts tranchants en quelques sections de chaque travée. On trace ensuite l'épure à la règle courbe. On peut objecter qu'il serait plus logique et plus bref d'établir aussi les premiers points par la voie graphique. Nous sommes d'avis contraire et nous déconseillons même en général l'usage de constructions graphiques successives, où les erreurs se cumulent. On trouvera toutefois au N° *LX* celles de ces constructions que nous recommandons comme les plus pratiques.

---

* Ces effets mentionnés en dernier lieu sont bien plus importants que les différences insignifiantes provenant des limites de travail dans le métal.

Si l'on veut encore se rendre compte des perturbations dans les moments sur les appuis qui résulteraient de l'abaissement possible de quelques *mm* dans les appuis, on y arrivera à l'aide de l'équation de Clapeyron généralisée (24). Supposons par exemple des tassements y_2 et y_3 dans les appuis 2 et 3 de la travée centrale; et considérons le cas où cette travée se trouve chargée isolément; (en posant pour simplifier $6EJ : l^2 = \mathfrak{S}$) on aura alors pour les 4 moments:

$$2(1+\theta)M_1 + M_2 = \mathfrak{S}\,y_2 \qquad M_1 + 4M_2 + M_3 = \mathfrak{S}(y_3 - 2y_2) + \tfrac{1}{4}pl^2$$

$$2(1+\theta)M_4 + M_3 = \mathfrak{S}\,y_3 \qquad M_2 + 4M_3 + M_4 = \mathfrak{S}(y_2 - 2y_3) + \tfrac{1}{4}pl^2$$

A l'aide de ces 4 équations on trouve en particulier pour les moments sur la travée:

$$M_2 = \frac{1+\theta}{9+10\theta}\cdot\frac{pl^2}{2} + \frac{6EJ}{l^2}\cdot\frac{24(1+\theta)^2 y_3 - [4(10+9\theta)(1+\theta)-1]\,y_2}{(5+6\theta)(9+10\theta)}$$

$$M_3 = \frac{1+\theta}{9+10\theta}\cdot\frac{pl^2}{2} + \frac{6EJ}{l^2}\cdot\frac{24(1+\theta)^2 y_2 - [4(10+9\theta)(1+\theta)-1]\,y_3}{(5+6\theta)(9+10\theta)}$$

d'où avec (180) et en prenant $J = 0{\cdot}33$, $l = 36{\cdot}2$, $E = 20 \times 10^6$ il résultera avec mètres et tonnes.

$$M_2 \overset{mt}{=} 400{\cdot}76 + 14142\,y_3 - 22356\,y_2 \qquad M_3 \overset{mt}{=} 400{\cdot}76 + 14142\,y_2 - 22356\,y_3$$

Pont sur le San au Km. 95·987 de la ligne de Chyrow à Zagorz (Gallicie)
avec poutres continues à 5 travées: 27m9 + 36m2 + 36m2 + 36m2 + 27m9
(et par suite $\theta = 27{\cdot}9 : 36{\cdot}2 = 0{\cdot}770718 \ldots \bar{1}{\cdot}8868956$).

1. Données principales pour les calculs de résistance.

Travée	Portée l	Charge permanente pr. m de voie q	Charge mobile par mètre de voie — pour les bandes $(p)_a$	$\left(\frac{pl^2}{8}\right)_a$	Charge mobile par mètre de voie — pour les croisillons $(p)_b$	$\left(\frac{pl^2}{2}\right)_b$	Flèches des patrons paraboliques $\frac{ql^2}{8}$	$\frac{1}{8}(p+q)_a l^2$
	m	t	t	mt	t	mt	mt	mt
1	27·9	2·08	6·1445	597·868	7·0470	2742·73	202·387	800·255
2	36·2	2·37	5·7710	945·319	6·4660	4236·65	388·218	1333·537
3	36·2	2·37	5·7710	945·319	6·4660	4236·65	388·218	1333·537

2. Barême pour le calcul des moments sur les appuis (par voie).

Charges	Formules et valeurs des moments sur les appuis — M_1	M_2	M_3	M_4	Observations
travée 1 chargée	$+0{\cdot}470896 \cdot \frac{p_1 l_1^2}{8}$	$-0{\cdot}126212 \cdot \frac{p_1 l_1^2}{8}$	par symétrie	par symétrie	
	mt + 281·534	mt − 75·458	mt + 20·297	mt − 5·731	
travée 2 chargée	$+0{\cdot}447225 \cdot \frac{p_2 l_2^2}{8}$	$+0{\cdot}416181 \cdot \frac{p_2 l_2^2}{8}$	par symétrie	par symétrie	Les coefficients des colonnes M_1 et M_2 sont ceux qui résultent des formules de notre tableau général au No *LVIII* : 4.
	+ 422·770	+ 393·424	− 105·827	+ 29·882	
travée 3 chargée	$-0{\cdot}119709 \cdot \frac{p_3 l_3^2}{8}$	$+0{\cdot}423942 \cdot \frac{p_3 l_3^2}{8}$	par symétrie	par symétrie	
	− 113·161	+ 400·760	+ 400·760	− 113·161	—
travée 4 chargée	$+0{\cdot}031611 \cdot \frac{p_4 l_4^2}{8}$	$-0{\cdot}111948 \cdot \frac{p_4 l_4^2}{8}$	par symétrie	par symétrie	Les moments des colonnes M_3 et M_4 sont les mêmes qu'on a déjà calculés pour M_1 et M_2, la symétrie permet de les utiliser pour compléter le tableau.
	+ 29·882	− 105·827	+ 393·424	+ 422·770	
travée 5 chargée	$-0{\cdot}009586 \cdot \frac{p_5 l_5^2}{8}$	$+0{\cdot}033949 \cdot \frac{p_5 l_5^2}{8}$	par symétrie	par symétrie	
	− 5·731	+ 20·297	− 75·458	+ 281·534	
toutes travées chargées	$+0{\cdot}461310 \cdot \frac{q_1 l_1^2}{8}$ $+0{\cdot}359127 \cdot \frac{q_2 l_2^2}{8}$	$-0{\cdot}092263 \cdot \frac{q_1 l_1^2}{8}$ $+0{\cdot}728175 \cdot \frac{q_2 l_2^2}{8}$	obtenus par symétrie	obtenus par symétrie	Les coefficients des colonnes M_1 et M_2 résultent de l'addition algébrique des coefficients placés plus haut pour la surcharge.
	+ 232·782	+ 264·018	+ 264·018	+ 232·782	

3. Barême général des moments sur les appuis (par voie) pour toutes les combinaisons.

Charges ($\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_2$ $\mathcal{M}_3$ $\mathcal{M}_4$)	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	$\mathcal{M}_4$
5 1	mt + 966·968	mt + 476·157	mt + 571·912	mt + 679·703
5 1	536·660	1078·499	483·493	431·037
5 1	431·037	483·493	1078·499	536·660
5 1	679·703	571·912	476·157	966·968
6 3 6 3 6	395·424	609·617	609·617	395·424
3 − 6 3 6 + 3	685·434	551·615	551·617	685·434
+ 4 −	113·890	685·075	589·320	401·155
2 + 4 −	544·198	82·733	677·739	649·821
2 + 4 −	649·821	677·739	82·733	544·198
2 + −	401·155	589·320	685·075	113·890

4. Formules des plus grands efforts tranchants positifs et négatifs (par voie).

Travée	Charges	$\mathcal{V}_a$	Constante $\frac{\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}'_0}{l}$	Charge permanente dans la travée isolée $(\mathbb{V})_q = q\left(\frac{l}{2} - a\right)$	Charge mobile suivant l'échelle b $(V_a)_p = \left[\frac{M - M'}{l} + (\mathbb{V}_a)_p\right]$
1		$(\mathcal{V}_a)_+ = -$	4·0821	$+ 2{\cdot}08 \left(\frac{l_1}{2} - a\right)$	$+ 0{\cdot}0358423 \frac{pb^2}{2}\left[1 - 0{\cdot}117724\left(1 + \frac{a}{l_1}\right)^2\right]$
		$(\mathcal{V}_a)_- = -$	24·5676	$+ 2{\cdot}08 \left(\frac{l_1}{2} - a\right)$	$- 0{\cdot}0358423 \frac{pa^2}{2}\left[1 + 0{\cdot}117724\left(2 - \frac{a^2}{l_1^2}\right)\right]$
2		$(\mathcal{V}_a)_+ = +$	12·7477	$+ 2{\cdot}37 \left(\frac{l_2}{2} - a\right)$	$+ 0{\cdot}0276243 \frac{pb^2}{2}\left[1 - 0{\cdot}387371 \frac{a^2}{l_2^2} + 0{\cdot}0077612\left(1 + \frac{a}{l_2}\right)^2\right]$
		$(\mathcal{V}_a)_- = -$	15·7786	$+ 2{\cdot}37 \left(\frac{l_2}{2} - a\right)$	$- 0{\cdot}0276243 \frac{pa^2}{2}\left[1 - 0{\cdot}371849 \frac{b^2}{l_2^2} - 0{\cdot}0077612\left(1 + \frac{b}{l_2}\right)^2\right]$
3		$(\mathcal{V}_a)_+ = +$	16·4366	$+ 2{\cdot}37 \left(\frac{l_3}{2} - a\right)$	$+ 0{\cdot}0276243 \frac{pb^2}{2}\left[1 - 0{\cdot}367968 \cdot \frac{a^2}{l_3^2}\right]$

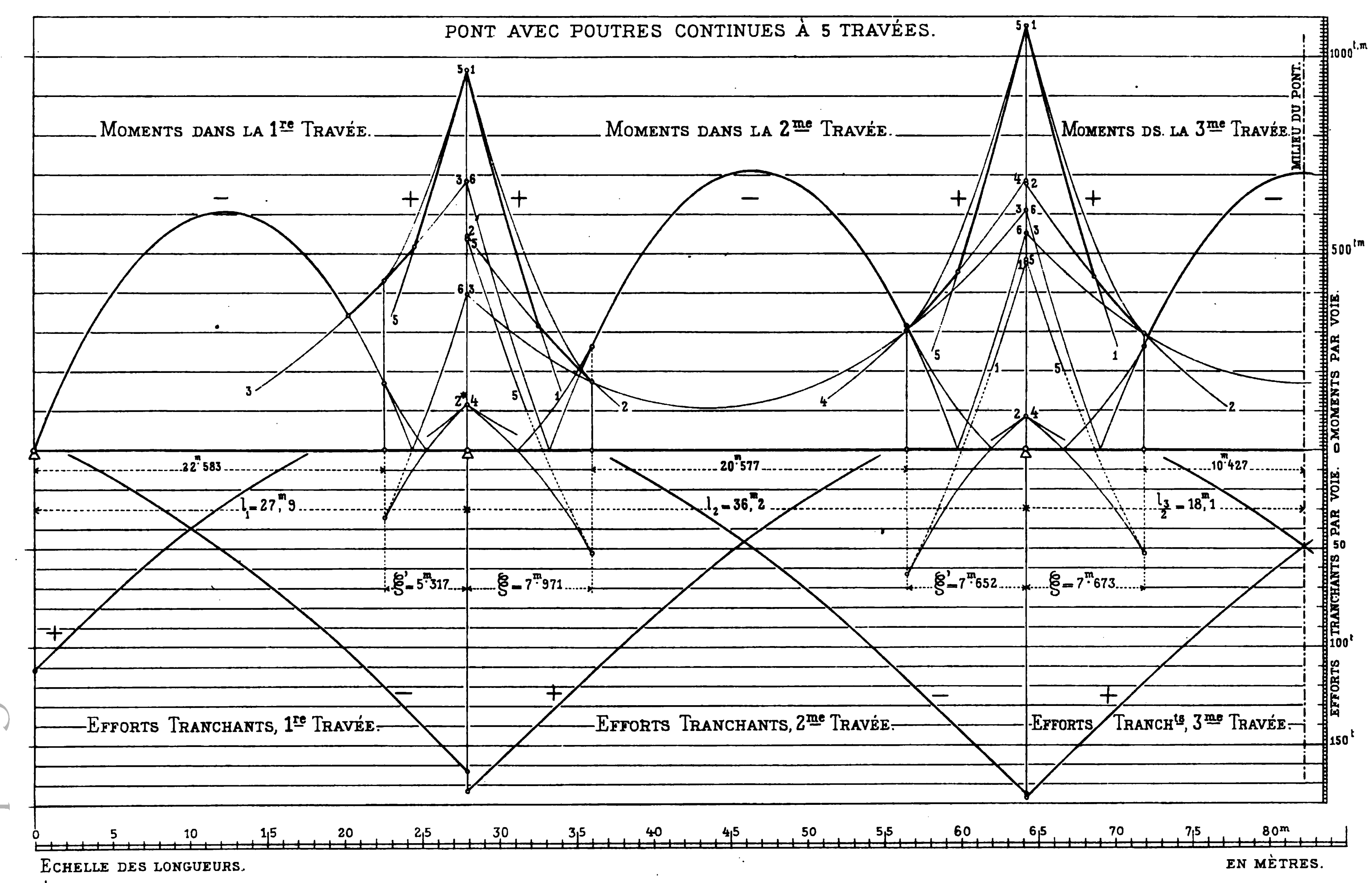
5. Calcul des efforts tranchants d'après les formules pour a : l =

	Fonctions	= 0·0	= 0·1	= 0·2	= 0·3	= 0·4	= 0·5	= 0·6	= 0·7	= 0·8	= 0·9	= 1·0
1	$\frac{a}{l}$ = . .	0·00	0·10	0·20	0·30	0·40	0·50	0·60	0·70	0·80	0·90	1·00
2	$\left(\frac{a}{l}\right)^2$ = . .	0·00	0·01	0·04	0·09	0·16	0·25	0·36	0·49	0·64	0·81	1·00
3	$\left(1 + \frac{a}{l}\right)^2$ = . .	1·00	1·21	1·44	1·69	1·96	2·25	2·56	2·89	3·24	3·61	4·00
4	$2 - \frac{a^2}{l^2}$ = . .	2·00	1·99	1·96	1·91	1·84	1·75	1·64	1·51	1·36	1·19	1·00
5	$\frac{1}{2} - \frac{a}{l}$ = . .	+ 0·50	+ 0·40	+ 0·30	+ 0·20	+ 0·10	0·00	— 0·10	— 0·20	— 0·30	— 0·40	— 0·50
6	$\frac{b}{l}$ = . .	1·00	0·90	0·80	0·70	0·60	0·50	0·40	0·30	0·20	0·10	0·00
7	$\left(\frac{b}{l}\right)^2$ = . .	1·00	0·81	0·64	0·49	0·36	0·25	0·16	0·09	0·04	0·01	0·00
8	$\left(1 + \frac{b}{l}\right)^2$ = . .	4·00	3·61	3·24	2·89	2·56	2·25	1·96	1·69	1·44	1·21	1·00
	1re travée											
9	b = ...	27·90	25·11	22·32	19·53	16·74	13·95	11·16	8·37	5·58	2·79	0·00
10	$\frac{1}{2} pb^2$ = . .	2742·73	2283·08	1852·64	1465·53	1147·08	857·71	601·06	395·96	210·74	68·255	0·000
11	$0{\cdot}0358423 \frac{pb^2}{2}$ = . .	98·306	81·831	66·403	52·528	41·114	30·742	21·543	14·192	7·553	2·446	0·000
12	$58{\cdot}032 \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right)$ =	+29·016	+23·213	+17·410	+11·606	+ 5·803	0·000	— 5·803	—11·606	—17·410	—23·213	—29·016
13	[pour $(\mathcal{V}_a)_+$] = .	0·882276	0·857544	0·830477	0·801047	0·769261	0·735121	0·698627	0·659778	0·618574	0·575017	0·529104
14	$(\mathcal{V}_a)_+$ = . .	+111·667	+ 89·304	+ 68·474	+ 49·601	+ 33·849	+ 18·517	+ 5·166	— 6·324			
15	[pour $(\mathcal{V}_a)_-$] = . .	1·235448	1·234271	1·230739	1·224853	1·216612	1·206017	1·193067	1·177763	1·160104	1·140091	1·117724
16	$(\mathcal{V}_a)_-$ =* . .	+ 4·448	— 4·375	— 16·483	— 30·305	— 44·975	— 61·644	— 79·423	— 98·089	—119·012	—141·076	—168·462
	2me travée											
17	b = ...	36·20	32·58	28·96	25·34	21·72	18·10	14·48	10·86	7·24	3·62	0·00
18	$\frac{1}{2} pb^2$ = . .	4236·65	3566·18	2923·99	2319·93	1764·28	1300·94	907·45	574·49	319·96	106·21	0·000
19	$0{\cdot}0276243 \frac{pb^2}{2}$ = . .	117·034	98·513	80·773	64·086	48·737	35·938	25·068	15·870	8·839	2·934	0·000
20	$85{\cdot}794 \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l}\right)$ =	+42·897	+34·318	+25·738	+17·159	+ 8·579	0·000	— 8·579	—17·159	—25·738	—34·318	—52·897
21	[pour $(\mathcal{V}_a)_+$] = .	1·007761	1·005517	0·995680	0·978254	0·953233	0·920619	0·880416	0·832619	0·777228	0·714248	0·643674
22	$(\mathcal{V}_a)_+$ = . .	+178·587	+146·123	+118·910	+ 92·600	+ 67·785	+ 45·883	+ 26·239	+ 8·802	— 6·120		
23	[pour $(\mathcal{V}_a)_-$] = .	0·597106	0·670784	0·736871	0·795364	0·846265	0·889576	0·925292	0·953417	0·973951	0·986891	0·992239
24	$(\mathcal{V}_a)_-$ =* . .			+ 3·446	— 11·248	— 28·414	— 47·748	— 69·454	— 94·039	—120·186	—147·319	—174·802
	3me travée											
25	[pour $(\mathcal{V}_a)_+$] = .	1·000000	0·996320	0·985281	0·966883	0·941125	0·908008	0·867532	0·819696	0·764500	0·701946	0·632032
26	$(\mathcal{V}_a)_+$ =** . .	+176·368	+148·906	+121·760	+ 95·560	+ 70·884	+ 49·069	+ 29·605	+ 12·286	— 2·544		

* Les fonctions auxiliaires No 11, 12 dans la 1re travée et No 19, 20 dans la 2me travée, calculées pour $(\mathcal{V}_a)_+$ sont utilisées de nouveau pour $(\mathcal{V}_a)_-$ dans l'ordre inverse.

** Les valeurs No 19 et 20 calculées pour la 2me travée sont utilisées ici de nouveau.

LIX: 6. Pont sur le San au Km 95·987 de la ligne de Chyrow à Zagorz (Gallicie).



LX. Procédés graphiques pour le calcul des poutres continues.

1. Introduction.

Le calcul des ponts à poutres continues, se fera toujours avec la plus grande facilité et une sécurité complète au moyen des procédés que nous venons d'exposer et d'appliquer à un exemple, nous désirons cependant que le lecteur qui voudrait s'aider d'autres constructions graphiques que celles que nous avons admises se trouve immédiatement à même de les rattacher à notre théorie et à nos formules, sans être obligé de chercher ailleurs. Les procédés graphiques que nous avons en vue appliqués aux poutres continues, pourront dans des cas douteux ou dans des conditions exceptionnelles, fournir un contrôle utile; ils permettent d'ailleurs de vérifier que les moments sur les appuis, obtenus avec un train de surcharge donné, sont très-sensiblement les mêmes que ceux que l'on obtient par l'hypothèse des surcharges équivalentes uniformément reparties évaluées comme pour les travées indépendantes. Les constructions graphiques que nous donnons à nouveau ci-après ou que nous citons seulement plus loin sont surtout conçues dans ce sens.

Pour effectuer les calculs en vue d'un train de surcharge donné, on devra généralement admettre les surcharges uniformément réparties reconnues équivalentes. Il serait oiseux de maintenir pour le tracé de tous les contours de l'épure, les charges concentrées des essieux, et de remplacer ainsi tous les arcs de parabole représentatifs par des contours polygonaux* qu'il faudrait ensuite combiner avec les paraboles résultant de la charge permanente. Si cependant on voulait absolument faire abstraction des charges mobiles uniformément réparties et s'en tenir uniquement au train de surchage, il faudrait au moins supposer que l'on sépare ce train en autant de parties, et que l'on répète ces dernières autant de fois que cela paraît nécessaire pour réaliser à peu près les combinaisons de surcharge indiquées par la théorie. L'hypothèse du train de surcharge formant un tout indivisible conduirait à de graves erreurs, car la capacité de chargement d'une voie ferrée considérée, sera toujours estimée d'après les ponts à travées indépendantes que celle-ci renferme, en supposant que chaque travée soit chargée de la manière la plus défavorable avec les véhicules circulant sur la ligne en question; il semble donc prudent de faire pour les ponts à poutres continues les mêmes hypothèses, sans se préoccuper de savoir si on peut réaliser immédiatement avec les trains en service, les combinaisons de surcharges qui en résultent.

En supposant qu'on se rallie à cette manière de procéder, la marche à suivre sera exactement celle que nous avons indiquée pour l'hypothèse des charges continues équivalentes; toutefois il est nécessaire, ici de traiter séparément ce qui concerne la charge permanente et la charge mobile. Nous n'avons à nous occuper à présent que de cette dernière.

On construira une fois pour toutes à une échelle convenable le polygone funiculaire ouvert correspondant au train comme nous l'avons fait voir au N° *XLVIII* (fig. 4), en le prolongeant suffisamment pour pouvoir y appliquer toutes les portées du pont; on supposera que pour chaque travée, considérée comme indépendante, on veuille avoir le plus grand moment négatif en une section occupant à peu près le milieu des points d'inflexion fixes**. Ce sont les ordonnées des divers polygones partiels ainsi obtenus pour chaque portée, qu'il faudra placer ensuite, dans chaque travée chargée de même portée, au-dessous de la ligne droite qui joint les points représentatifs des moments sur les appuis. On voit ainsi que le problème de l'épure des moments de flexion dûs à la charge mobile se trouve ramené à l'évaluation des moments sur les appuis, pour toutes les combinaisons de travées surchargées à considérer.

Pour établir le barême général des moments sur les appuis dûs à la surcharge, conformément aux combinaisons de notre barême des charges (136), on pourra opérer comme nous l'avons fait pour la méthode analytique, en supposant successivement chaque travée chargée seule, et réunissant ensuite par voie d'addition algébrique les moments provenant de ces diverses hypo-

* Nous avons vu au N° *XLIX* (6) que le contour représentatif des moments de flexion résultant de charges quelconques dans une travée s'obtient en portant à partir de la ligne droite qui joint les points représentatifs des moments sur les appuis, les ordonnées qui représentent les moments de flexion évaluées comme si la travée était indépendante. Ces dernières et le polygone représentatif qui les concerne se construisent avec un polygone funiculaire comme nous l'exposons au N° *XLVIII*; nous revenons ici du reste sur cette construction.

** Cette règle est pratiquement suffisante dès qu'il s'agit d'essieux en nombre comparable à ceux qui se présentent en service. Pour le cas d'un seul essieu, on obtient, en différentiant les formules (76) par rapport à l'abscisse, deux abscisses théoriques pour lesquelles l'essieu donne sur un appui ou sur l'autre, le plus grand moment positif. Cette étude et les constructions qui en dérivent n'ont pas d'application pratique. Si l'on voulait une règle plus exacte, il faudrait d'abord, à l'aide des surcharges uniformes équivalentes, déterminer les points que nous indiquons au N° *XXXVIII*: 1 à la formule (107). Les observations faites lors des surcharges d'épreuve semblent indiquer que les points les plus défavorables se trouvent entre les points mentionnés au texte et les milieux des travées.

thèses, pour former les combinaisons; ces additions peuvent s'effectuer soit graphiquement soit numériquement, après un relevé à l'échelle des longueurs partielles obtenues.

Le barême général des moments sur les appuis une fois établi, tant pour les charges mobiles que pour les charges permanentes, on s'en servira directement pour tracer l'épure des moments de flexion comme nous l'avons expliqué pour les surcharges continues, en opérant séparément pour les deux sortes de charges et cumulant ensuite dans les travées chargées, les ordonnées des contours polygonaux et paraboliques. On utilisera enfin le même barême pour obtenir les efforts tranchants d'après la formule (55). La constante qui forme le premier terme est connue; les termes $(\mathfrak{V}_x)_q$ et $(\mathfrak{V}_x)_p$ sont représentés par les ordonnées d'une ligne droite et celles du polygone funiculaire construit comme au N° *XLVIII* (fig. 4) ensorte que tout revient à construire un nombre suffisant de valeurs des moments M et M' sur les appuis.

En résumé on voit que pour toutes les évaluations du barême des moments ainsi que pour tout ce qui concerne la surcharge partielle variable de la travée où l'on cherche les efforts tranchants, on sera toujours ramené à déterminer les moments sur les appuis, dans le cas d'une travée chargée seule, tout le reste de la poutre étant alors supposé ne supporter ni poids ni charges. Pour résoudre ce problème spécial, ainsi que pour construire les points d'inflexion fixes dont on a besoin tout d'abord on dispose de plusieurs méthodes fort simples et très-connues. Avant de les exposer* nous indiquerons quelques constructions nouvelles qui se rattachent plus spécialement à nos formules et que nous croyons devoir recommander comme les plus simples. Nous terminerons en appliquant à nos procédés, la théorie et les constructions graphiques que le professeur Mohr de Stuttgart a établies en 1868 et que presque tous les auteurs de statique graphique ont reproduites depuis. Nous faisons abstraction des méthodes fondées sur les courbes d'influence qui nos semblent peu pratiques.

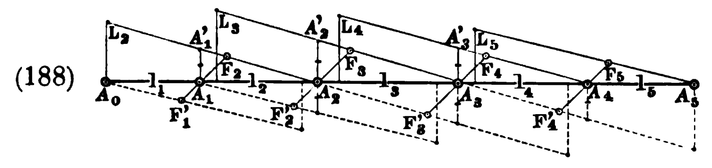
2. Points d'inflexion fixes et points correspondants.

Toutes les constructions donnant les **points fixes** dérivent de la conception d'une suite de travées consécutives non chargées, qui nous a servi également pour notre analyse (46). On nomme plus généralement **points d'inflexion correspondants** les points d'inflexion dans un couple de travées non chargées placées d'une manière quelconque parmi les travées chargées; l'un de ces points peut occuper une position quelconque dans l'une des deux travées, mais le second point dans l'autre, se trouve alors determiné par cela même. Cette dépendance, entre les deux points correspondants, peut être exprimée géométriquement d'une manière simple en ne tenant compte que des longueurs de travées, et a servi de base à toutes les constructions publiées jusqu'ici pour les points fixes. Voici toutefois une construction nouvelle qui donne les points où les verticales des points fixes coupent les lignes menées à 45° par chacun des appuis intermédiaires, et qui résulte immédiatement de nos formules (46); nous les écrivons ici:

$$(187)\quad \alpha_1 = 1,\ -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \Big[l_2 + l_1\Big] : \frac{l_2}{2},\ -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \Big[l_3 + l_2\Big(1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\Big)\Big] : \frac{l_3}{2},\ -\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \Big[l_4 + l_3\Big(1 + \frac{\alpha_2}{2\alpha_3}\Big)\Big] : \frac{l_4}{2} \,..\text{etc.}$$

Prenons (fig. 188) sur l'appui extrême de gauche $(A_0 L_2) = {}^1/_2\, l_2$ et joignons L_2 et A_2, on aura $(A_0 A_2) : (A_0 L_2) = -\alpha_2 : \alpha_1 = \mu_2$ et la tangente de l'angle en L_2 représente μ_2. Il résulte de là que $L_2 A_2$ coupe la ligne $A_1 F_2$ menée à 45° sur l'axe des appuis, en un point F_2 qui appartient à la verticale du point fixe de gauche de la deuxième travée, car la projection de F_2 sur $A_1 A_2 = l_2$ divise cette longueur dans le rapport $(A_2 A_1) : (A_1 A_1')$ qui est μ_2. Elevons maintenant à droite de $A_1 A_1'$ et à une distance égale à la moitié de cette longueur une ordonnée

(188)



* On pourra consulter sur la statique graphique des poutres continues:

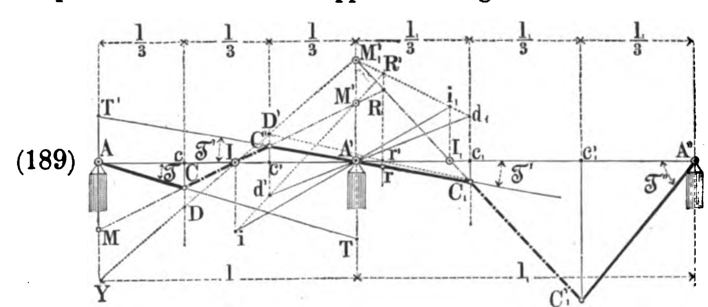
1. C. Cullmann. Die graphische Statik. Zürich, 1864. — Traduction française par Glasser Jaquier et Valat. Paris, 1880.
2. Mohr. Theorie der continuirlichen Träger. Zeitschr. des hannovr. Arch.- u. Ing.-V. 1868.
3. F. Lippich. Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnittes. Wien, 1871.
4. Kleitz. Ann. des P. et Ch. 1876 1er Sem. et 1877 1er Sem. Note sur les calculs de stabilité des poutres continues ayant des moments d'inertie variables.
5. Fouret. Ann. des P. et Ch. 1876 1er Sem. Détermination graphique des moments de flexion d'une poutre à plusieurs travées solidaires.
6. Müller et Seyrig. Eléments de la statique graphique. Paris, 1886.
7. Maurice Lévy. La statique graphique et ses applications aux constructions. Paris, 1886.

égale à $^1/_2\ l_3$ et joignons le point L_3 ainsi obtenu au point A_3, cette ligne coupera la ligne $A_2\ F_2$ menée à 45° sur l'axe des appuis, en un point F_3 situé sur la verticale du point fixe de gauche de la troisième travée, car la projection de F_3 sur $A_2\ A_3 = l_3$ divise cette longueur dans le rapport $(A_3\ A_2) : (A_2\ A_2')$ qui n'est autre que $\mu_3 = -\alpha_3 : \alpha_2$ ou la tangente de l'angle en L_3 ainsi que l'indique la formule correspondante (188). On continuera ainsi ces constructions jusqu'à l'extrémité de droite de la poutre, et l'on aura les verticales de tous les points fixes de gauche, dans toutes les travées y compris la dernière; on sait que dans celle-ci le point cherché ne répond plus qu'à la définition algébrique seule, et n'est plus en réalité un point d'inflexion. En faisant ensuite les mêmes constructions en ordre inverse, partant de l'appui extrême de droite pour terminer à celui de gauche (lignes ponctuées) et utilisant à cet effet les lignes à 45° déjà construites, on obtiendra de même toutes les verticales des points fixes de droite dans toutes les travées*.

Cette construction appliquée ici à un pont de $50 + 62 + 74 + 68 + 56$ mètres, fournit vers le haut les angles $L_2\ L_3\ L_4 \ldots.$ dont les tangentes sont $\mu_2\ \mu_3\ \mu_4 \ldots.$ et vers le bas les angles analogues dont les tangentes sont $\nu_2\ \nu_3\ \nu_4 \ldots$; elle n'exige que la division de longueurs en deux parties égales, et pourra s'effectuer en pratique en ne traçant que les lignes à 45° et les ordonnées, dont il suffira de marquer les extrémités en plaçant la règle suivant les longues lignes inclinées sans tracer ces dernières. Cette construction nouvelle de l'auteur nous paraît donc préférable à celle de Mohr qui est la plus connue et que nous allons déduire de nos formules, sous sa forme la plus générale.

Considérons d'abord (fig. 189) une travée non chargée quelconque A A' les autres travées de part et d'autre étant supposées chargées d'une manière quelconque. Soit I le pont d'inflexion (qui pourrait tout aussi bien se trouver en dehors de A A') et M M' la ligne représentative des moments de flexion; cette ligne est, comme on sait, la droite qui joint les points représentatifs M et M' situés sur les verticales des appuis où les moments sont $\mathcal{M} = -$ A M $\quad \mathcal{M}' = +$ A' M'. Par les points c c' qui divisent A A' en trois parties égales menons des verticales jusqu'aux points C C' où elles coupent M M' et menons les droites A C et A' C' qui rencontrent les verticales des appuis aux points T et T'. En désignant par $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ les angles de ces droites avec A A' on aura sur la figure et d'après nos formules générales (20) (21) où les y et les T sont supposés nuls:

(189)



$$(190) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{tang}\ \mathfrak{T} &= \frac{2\,(A\,M) - (A'\,M')}{l} = -\frac{2\,\mathcal{M} + \mathcal{M}'}{l} = \frac{6\,E\,J}{l^2}\,t \\ \text{tang}\ \mathfrak{T}' &= \frac{2\,(A'\,M') - (A\,M)}{l} = +\frac{2\,\mathcal{M}' + \mathcal{M}}{l} = \frac{6\,E\,J}{l^2}\,t' \end{aligned} \right\}$$

où l'on compte les moments positifs et les ordonnées positives comme nous l'avons admis (2) et (3).

Donc si M M' représente les moments, les droites A C et A' C' représentent les tangentes aux appuis à une certaine échelle et inversement si l'on connaît ces dernières et les points C C' qui en résultent la ligne C C' fournit immédiatement les moments aux appuis $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ à une certaine échelle. Comme t et t' sont généralement très-petits, nous supposerons que l'on prenne d'après (190):

$$(191) \quad \text{tang}\ \mathfrak{T} = \mathcal{K}\,t \qquad \text{tang}\ \mathfrak{T}' = \mathcal{K}\,t' \qquad -A\,M = \frac{\mathcal{K}\,l^2}{6\,E\,J}\,\mathcal{M} \qquad +A'\,M' = \frac{\mathcal{K}\,l^2}{6\,E\,J}\,\mathcal{M}'$$

Le rapport qui figure ici contient l^2 et des coefficients numériques; par conséquent, si pour une suite de travées non chargées on prenait tous les moments sur les appuis à la même échelle on n'aurait pas les tangentes à la même échelle et inversement, si on construisait toutes les tangentes avec le même coefficient $\mathcal{K}$ les droites représentatives des moments ne se couperaient pas sur les verticales des appuis. C'est toujours cette dernière hypothèse cependant, que nous admettrons dans la suite, en vue des tangentes communes sur les piles.

* Si l'on voulait construire directement un point fixe sur l'axe des appuis, par exemple celui que représente F_3, alors au lieu de mener $A_2\ F_3$ on reporterait la longueur l_3 sur la verticale de A_3 vers le bas et la droite joignant le point ainsi obtenu au point A_2' couperait l'axe des appuis au point fixe cherché.

Considérons donc un couple de travées non chargées A A′ et A′ A″ et soient A C, C′ C_1 et C_1' A″ les trois tangentes construites avec le même facteur $\mathcal{K}$ pour les deux travées. Les lignes C C′ et C_1 C_1' représentant les moments, couperont la verticale de A′ en M′ et M_1' et se rencontreront en un point R dont la verticale coupe C′ C_1 en r et l'axe des appuis en r′. On pourra évaluer la longueur R r par rapport à A′ M′ à l'aide des triangles semblables au sommet commun C′, et par rapport à A′ M_1' au moyen des triangles au sommet commun C_1 ce qui donne d'après (191).

$$(192) \quad . \; . \quad Rr = (A'M')\frac{(c'r')}{1:3} = (A'M_1')\frac{(c_1 r')}{l_1:3} = \frac{\mathcal{K}\,l}{2EJ}(c'r') = \frac{\mathcal{K}\,l_1}{2EJ}(c_1 r') \qquad \frac{c'r'}{l_1} = \frac{c_1 r'}{l}$$

La verticale du point R divise donc l'intervalle c′ c_1 dans le rapport inverse des longueurs de travées et on l'obtient de suite en prenant c_1 r′ = c′ A′ = $^1/_3$ l ou bien encore en prenant c′ r′ = c_1 A′ = $^1/_3$ l_1 ou enfin en prenant A′ r′ = $^1/_3$ (l_1 — l). Nous appellerons cette droite **l'antiverticale** de l'appui A′ (Die verschränkte Verticale, comme disent les auteurs allemands); cette verticale qui est connue à l'avance, établit une relation géométrique simple entre les points d'inflexion correspondants I et I_1 dans les deux travées. Le point I étant donné, pour avoir I_1 on mène la droite IR à volonté, on mène ensuite C′ A′ jusqu'au point C_1 sur la verticale de c_1 et la droite R C_1 coupe l'axe des appuis au point cherché.

Plus généralement, si au lieu de partir du point I on partait d'un point i quelconque de sa verticale, on trouverait par la même construction un point correspondant i_1 situé sur la verticale du point I_1. En effet, menons la droite i M′ qui rencontre en d′ la verticale de c′ et en R′ l'antiverticale, puis menons d′ A′ qui rencontre en d_1 la verticale de c_1 et joignons d_1 R′; il est facile de voir d'abord que cette droite doit passer par M_1'. En effet les faisceaux M′ C′ A′ et M′ d′ A′ étant équivalents dans le sens vertical, détachent sur l'antiverticale des longueurs égales, donc les faisceaux R C_1 A′ et R′ d_1 A′ sont aussi équivalents, ce qui exige que d_1 R′ passe par le point M_1'. Menons maintenant i A′ jusqu'au point de rencontre i_1 avec d_1 R′. Pour que ce point se trouve sur la verticale de I_1 il faut et suffit que les faisceaux M_1' i_1 A′ et M_1' I_1 A′ soient équivalents ou qu'ils détachent sur une autre verticale que A′ M_1' des longueurs égales. Or ces faisceaux détachent sur l'antiverticale des longueurs qui appartenant aussi aux faisceaux M′ i A′ et M′ I A′, équivalents entre eux sont égales*. Nous reviendrons sur cette proposition ainsi généralisée, à propos de la théorie de Mohr.

On trouve dans la nouvelle édition de la statique graphique de M. Maurice Lévy déjà citée (tome 2 page 202) une variante de la construction de Mohr, qui ne faisant usage que du point r′ (et non de l'antiverticale) implique un léger perfectionnement; il est facile de la déduire de la théorie qui précède en revenant au cas où ce sont les lignes représentatives des moments et non celles des tangentes, que l'on construit à la même échelle dans les deux travées; nous supposerons par exemple que ce soit l'échelle admise pour la travée de droite. La ligne représentative des moments dans la travée de gauche sera alors I M_1' coupant en Y, D et D′ les verticales de la figure et ayant pour ordonnées celles de la droite I M′ multipliées par ($l_1^2 : l^2$).

Remarquons maintenant que les abscisses de deux points correspondants I et I_1 sont sujettes à une relation très-simple; on a sur la figure:

$$(193) \quad . \; . \quad \frac{I_1 c_1}{I_1 r'} = \frac{C_1 c_1}{R r'} \qquad \frac{I c'}{I r'} = \frac{C' c'}{R r'} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{I_1 c_1}{I_1 r'} : \frac{I c'}{I r'} = \frac{C_1 c_1}{C' c'} = \frac{l_1}{l}$$

Ceci signifie que les rapports dans les quels les points I_1 et I divisent (intérieurement et extérieurement) longueurs r′ c_1 = $^1/_3$ l et r′ c′ = $^1/_3$ l_1 sont entre eux comme les longueurs l_1 et l. On a d'autre part:

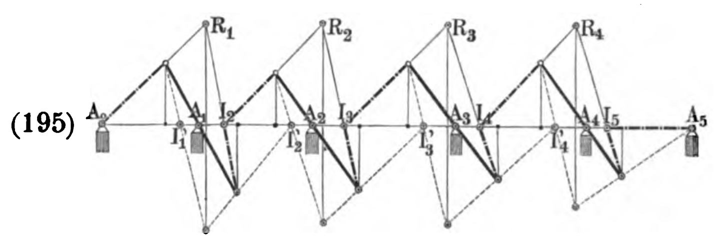
$$(194) \quad . \quad . \quad D'c' = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2 C'c' \qquad \text{donc} \qquad \frac{C_1 c_1}{D' c'} = \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 \frac{C_1 c_1}{C' c'} = \frac{l}{l_1} \text{ d'après (193).}$$

Donc enfin la droite C_1 D′ passe par le pied r′ de l'antiverticale et il en résulte immédiatement la construction simplifiée suivante: Ayant marqué seulement le point r′ on mène I M_1' à

* Une démonstration plus élégante que celle du texte, consiste à suivre la déformation des triangles C′ R C_1 et I R I_1 lorsque le point I passe en i, s'appuyant à ce sujet sur un théorême connu de géométrie. Pour le triangle C′ R C_1 les trois sommets se meuvent sur trois droites verticales fixes et deux côtés pivotent autour des points fixes A′ et M′, donc le 3me côté pivote autour d'un point fixe M_1'. Pour le triangle I R I_1 les trois côtés pivotent autour des points fixes A′, M′ et M_1' et deux sommets décrivent des droites verticales fixes donc le 3me sommet I, décrit également une verticale fixe.

volonté puis $C'r'$ jusqu'à la rencontre C_1 avec la verticale de c_1 et on joint M'_1C_1 ; cette droite coupera l'axe des appuis au point I_1 cherché. En somme ce tracé utilise les verticales des appuis au lieu des antiverticales mais il exige comme le tracé de Mohr les points de division au tiers des travées. Nous allons appliquer ce dernier (195) qui est le plus connu, à notre exemple (188). Nous prendrons pour simplifier, sur les antiverticales les points R_1 R_2 . . . etc. à des hauteurs égales au-dessus de l'axe des appuis (ce qui n'est pas nécessaire) ; ayant obtenu ainsi les points fixes de gauche I_2 I_3 . . . etc. par une première suite des constructions partant de A_0 et se terminant en A_5 (lignes pleines), nous revenons ensuite de A_5 vers A_0 par une seconde suite de constructions (lignes ponctuées) en utilisant les lignes déjà existantes, ce qui donne les points fixes de droite I'_4 I'_3 . . . etc.

(195)



On trouve encore dans la dernière édition de l'ouvrage de Winkler (Theorie der äusseren Kräfte, Wien, 1886, page 122) une construction simple pour passer d'un point d'inflexion donné à son correspondant; son auteur l'a déduite d'une construction plus générale donnée par M. Collignon (Cours de méc. appliquée, Paris, 1869, p. 254) comme équivalent graphique de l'équation des trois moments dite de Clapeyron. Cette construction paraît préférable à celle de Mohr en ce qu'elle n'exige que la division de longueurs en deux parties égales.

(196)

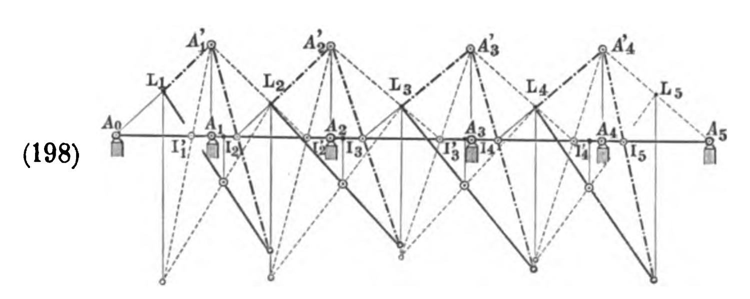
Supposons (fig. 196) que dans un couple de travées non chargées A A' et A' A", on prenne $-\text{AM} = \mathcal{M}$ $+ \text{A'M'} = \mathcal{M}'$ et $-\text{A''M''} = \mathcal{M}''$. L'équation des trois moments de Clapeyron peut alors s'écrire:

$$(197) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (\tfrac{1}{2}\mathcal{M}l + \tfrac{1}{2}\mathcal{M}''l_1) + \mathcal{M}'(l + l_1) = o.$$

Elle signifie sur la figure que si l'on prend (A' R) = 2 (A' M') l'ensemble des triangles MRA' + M" RA' est équivalent à l'ensemble des triangles AMA' + A" M" A'. En ajoutant de part et d'autre le triangle MA'M", l'équation signifie encore que le triangle MRM" équivant au trapèze MAA"M". Si S est le milieu de AA", l'aire du trapèze sera exprimée par le produit de sa base AA" et de sa hauteur moyenne SQ; donc cette dernière devra être égale à la moitié de la hauteur du point R au-dessus de MM", qui multiplie AA" pour l'aire du triangle MRM". Il en résulte que le point S se trouve sur la droite $m''m''_1$ qui joint les milieux de MR et M"R. Or $m''m''_1$ est parallèle à la droite $m'm'_1$ qui joint les milieux de MM' et M"M' et s'en écarte verticalement d'une hauteur égale à $SS' = m'm'' = m'_1m''_1 = {}^1/_2\,(M'R) = {}^1/_2\,\mathcal{M}'$; on en conclut la construction suivante de Winkler pour passer d'un point I quelconque à son correspondant I_1.

Ayant construit (196) sur le milieu S de AA" une verticale que nous appellerons la **bi-médiane** de l'appui A', on prend SS' à volonté et A'M' = 2 (SS') ; on trace ensuite les verticales médianes des travées ayant leurs pieds en m et m_1 et on mène IM' puis $m'S'm'_1$ et puis $M'm'_1$ qui coupe l'axe des appuis au point cherché. Il est facile de voir que plus généralement si on partait d'un point i quelconque de la verticale de I on trouverait à l'aide de la même construction un point correspondant i_1 situé sur la verticale de I_1. En effet le point I passant en i le faisceau M' I A' reste équivalent dans le sens vertical et détache sur la verticale de m une longueur m m' con-

(198)



stante; donc les longueurs constantes m m' et S S' se déplaçant verticalement le point d'intersection des droites m S et m' S' se déplace verticalement et la droite m' S' coupe la verticale de l'appui A' en un point fixe. Le reste de la démonstration s'en déduit facilement, en utilisant les raisonnements que nous avons appliqués à la figure (189).

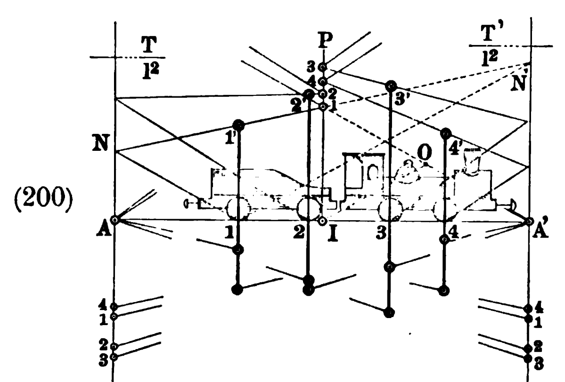
Nous appliquerons (198) la construction de Winkler à notre exemple (188) en prenant, pour simplifier sur toutes les verticales bi-médianes, et par suite au-dessus des appuis, des longueurs égales. La première suite de constructions partant de A_0 et se terminant en A_5 (lignes pleines) donne les points fixes de gauche I_2 I_3 . . . etc. On revient ensuite de A_5 vers A_0 (lignes ponctuées) en utilisant les lignes et points déjà construits et l'on obtient les points fixes de droite I'_4 I'_3 . . . etc. Les deux suites de constructions donnent en L_2 L_3 . . . etc. sur les verticales médianes des travées des couples de points très-rapprochés qu'on devra ne pas confondre.

3. Fonctions de surcharge T et T' et moments $\frac{T}{l}$ et $\frac{T'}{l}$.

Nous avons vu que pour calculer les moments de flexion au droit des appuis (58) il faut avant tout déterminer les fonctions de surcharge (56).

(199) . . . $T = + 6EJ\tau = \frac{1}{l}\Sigma P a b (l + b)$ $\qquad T' = - 6EJ\tau' = \frac{1}{l}\Sigma P a b (l + a)$

qui ne dépendent que de la manière dont la charge se trouve distribuée sur la travée supposée indépendante. Voici un procédé pour déterminer ces grandeurs ou ce qui revient au même les moments T : l et T' : l lorsqu'il s'agit d'un train de surcharge. Prenons (fig. 200) sur la verticale médiane I P de la travée A A' considerée, les longueurs IP_1, IP_2 . . . etc. représentant les charges supportées par les essieux **1, 2,** . . . . Menons **1** N parallèle à A' P_1 et joignons N P_1; cette droite détachera sur la verticale de l'essieu **1** une longueur **1 1'** qui est proportionnelle au moment P a b : l que produirait l'essieu **1** seul au point d'application sur la travée supposée indépendante. En effet, prolongeons N P_1 jusqu'au point de rencontre N' avec la verticale de A', le triangle **1** N N' sera le triangle funiculaire représentatif des moments de flexion avec le triangle P_1 I O comme triangle des forces ayant son pôle O au milieu* de A' P_1. On voit donc que **1 1'** représente le moment avec le quart de la portée l comme distance polaire**. En appliquant cette construction dans chaque demi-travée à tous les essieux qui s'y trouvent on aura pour chacun d'eux au moyen de deux lignes la longueur représentant P a b : l placée sur l'essieu même. Marquons maintenant les longueurs

(200)


ainsi obtenues sur une bande de papier à partir d'une même origine et portons leur ensemble au-dessous des appuis A et A'. En joignant les points ainsi obtenus à A et à A', on obtiendra deux faisceaux de droites qui déterminent sur les verticales des essieux deux séries de points; les longueurs comprises entre les droites partant de A et les points **1' 2'** . . . . construits ci-dessus, représentent les valeurs (P a b : l) (1 + a : l) dont la somme forme T' : l, tandis que celles qui sont comprises entre les droites partant de A' et les points **1' 2'** . . . représentent les valeurs (P a b : l) (1 + b : l) dont la somme forme T : l. On aura donc en portant les longueurs en question bout à bout, deux longueurs qui seront les moments cherchés T' : l et T : l construits avec le quart de la portée comme distance polaire c. a. d. à une échelle relativement très-grande***. Nous avons marqué sur le dessin les quarts de ces longueurs qui sont les longueurs $T' : l^2$ et $T : l^2$ en valeur absolue; on fera d'ailleurs varier les longueurs à volonté à l'aide de l'échelle des P.

* La droite A P_1 parallèle à I O dans le triangle A P_1 A' coupe 1 N en son milieu; elle est donc aussi parallèle à 1 N' dans le triangle 1 N N'; donc enfin I O est parallèle à 1 N'.

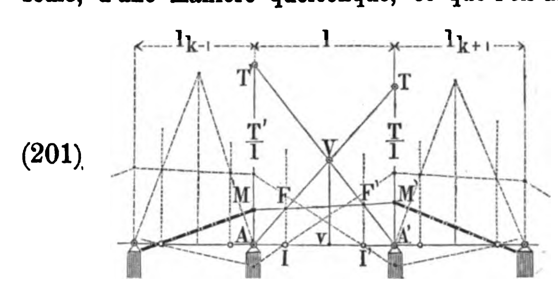
** Si au lieu de joindre N P_1 on joignait N A' on aurait la moitié de la valeur trouvée ci-dessus, le triangle des forces étant alors P_1 I A' avec A' pour pôle.

*** Cette nouvelle construction de l'auteur, donne les deux résultats cherchés par des longueurs très-grandes, s'il s'agit d'un train d'un certain nombre d'essieux; elle ne conduira d'ailleurs jamais à des points sortant du dessin, elle est donc bien préférable à celle dite de Lippich qui se trouve citée par presque tous les ouvrages et que Lippich luimême reconnaît impraticable dès que le train possède une certaine longueur. Remarquons encore que l'on n'aura ici en pareil cas que trois points P pour tout le train de surcharge si celui-ci est constitué comme ceux pris pour les calculs des N°s *XIX* à *XXV*, avec trois charges d'essieu types.

4. Construction des moments sur les appuis au moyen de T et T'.

Supposons fig. (201) que dans une poutre continue quelconque la travée A A' soit chargée seule, d'une manière quelconque, et que l'on ait construit ou calculé les valeurs de T et T' correspondant à cette charge; supposons en outre que tous les points fixes de la poutre aient été déterminés d'avance par l'une des méthodes que nous avons expliquées. Portons en A T' et A' T au-dessus des appuis les valeurs des moments T' : l et T : l à une certaine échelle; menons les droites A T et A' T' qui coupent les verticales des points fixes en F et F', nous allons faire voir que la droite F F' qui passe par ces points détache sur les verticales des appuis des longueurs A M et A' M' qui représentent les moments au-dessus des appuis à l'échelle adoptée pour les longueurs A T' et A' T.

(201)



On a en effet sur la figure et d'après nos formules (75) (76), pour les points fixes et les points F F':

(202) . . $AI = \xi = \frac{l}{\mu+1}$ $\quad A'I' = \xi' = \frac{l}{\nu+1}$ $\quad IF = \frac{T}{(\mu+1)l}$ $\quad IF' = \frac{T}{(\nu+1)l}$

(203) $I'F' - IF = \frac{(\mu+1)T' - (\nu+1)T}{(\mu+1)(\nu+1)l}$ $\quad II' = \frac{(\mu\nu-1)l}{(\mu+1)(\nu+1)}$ $\quad \text{pente } F'F = \frac{(\mu+1)T' - (\nu+1)T}{(\mu\nu-1)l^2}$

On en déduit immédiatement les hauteurs des points M et M' d'après celles de F et F':

(204) $AM = IF - AI \times (\text{pente } F'F) = \frac{1}{(\mu+1)l}\left[T - \frac{(\mu+1)T' - (\nu+1)T}{\mu\nu-1}\right] = \frac{\nu T - T'}{(\mu\nu-1)l}$ $\quad A'M' = \frac{\mu T' - T}{(\mu\nu-1)l}$

Ce sont les valeurs générales (58) que nous avons obtenues par voie analytique et l'exactitude de la construction indiquée est ainsi vérifiée; nous en donnerons plus loin, encore une démonstration plus élégante que nous déduisons de la theorie de Mohr.

Remarquons maintenant que les longueurs A T' et A' T sont généralement grandes par rapport à A M et A' M' ce qui constitue un inconvénient. Or les deux droites A T et A' T' se coupent en un point V dont la verticale V v divise évidemment la travée dans le rapport $Av : vA' = T' : T$. De plus l'ordonnée V v a généralement une valeur simple connue à l'avance, qui ne dépend que de la charge sur la travée considérée comme indépendante; dans le cas le plus général on aura pour le point V.

(205) . $Av = \frac{T'l}{T+T'} = \frac{l}{1+\frac{T}{T'}}$ $\quad A'v = \frac{Tl}{T+T'} = \frac{l}{1+\frac{T'}{T}}$ $\quad Vv = \frac{TT'}{T+T'} = \frac{1}{\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}}$

Dans le cas particulier de la charge uniformément répartie p par mètre, $T = T' = \frac{1}{4}pl^2$; alors V v se trouve sur le milieu de la portée et représente le moment de flexion connu $\frac{1}{8}pl^2$ qu'on y aurait si la travée était indépendante, et que nous donnons calculé à l'avance (Tab. V de notre Tome II) pour les surcharges de l'ordonnance autrichienne. Donc enfin si l'on opère par surcharges uniformes équivalentes, comme nous le conseillons toujours, on pourra se procurer les moments sur les appuis A M et A' M' d'une manière très-simple. On complétera ensuite la construction à droite et à gauche, sur les travées non chargées jusqu'aux deux extrémités de la poutre, en menant à partir de M et M' les droites représentatives qui passent par les points fixes.

En faisant ainsi successivement la construction indiquée pour chacune des travées de la poutre donnée on aura une épure qui remplace notre tableau 2 établi par voie analytique au N° *LIX*; on en pourra immédiatement déduire par voie d'additions algébriques, le barême général des moments sur les appuis pour toutes les combinaisons de surcharge voulues*.

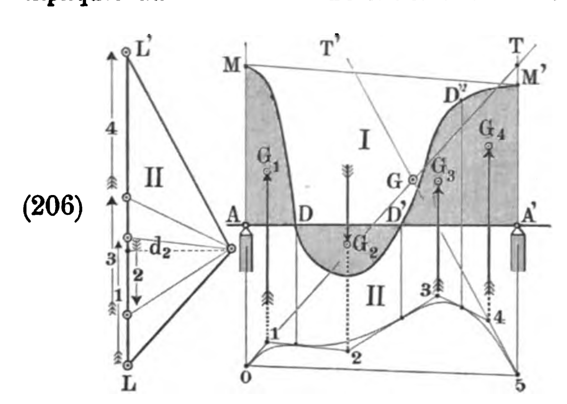
5. Principes de la méthode de Mohr pour la détermination graphique des moments de flexion sur les appuis.

Supposons que sur une travée quelconque A A' d'une poutre continue (fig. 206) on ait construit le contour représentatif M D D' D'' M' des moments de flexion qui résulte d'une combi-

* Nous avons indiqué en lignes ponctuées sur la figure, les constructions relatives aux travées voisines l_{k-1} et l_{k+1} de façon à donner une idée de l'ensemble d'une pareille épure.

naison de surcharge quelconque; supposons ensuite que la surface occupée par les ordonnées positives et négatives (couvertes de hachures sur le dessin) soit matérielle et représente une charge répartie inégalement d'une manière continue sur la travée A A'. D'après ce premier contour I construisons ensuite la courbe funiculaire II qui correspondrait aux charges continues que nous venons de définir, en opérant comme si la travée était indépendante, ainsi que nous l'avons expliquée au N° *XLVIII*. Divisions à cet effet le profil I en un certain nombre de parties M D, D D', D D'', D'' M' et considérons les centres de gravité G_1 G_2 G_3 G_4 des tranches verticales qui en résultent ainsi que les forces qui y sont appliquées. En construisant le polygone des forces L L' et le polygone funiculaire **0 1 2 3 4 5** répondant à cette division, ce dernier aura ses côtés tangents à la courbe funiculaire cherchée, en des points qui se trouveront sur les verticales des points de division D D' . . . du contour I. En multipliant suffisamment ces derniers on pourra donc construire la courbe funiculaire aussi exactement que l'on voudra, et nous allons faire voir que cette courbe n'est autre que celle de la fibre neutre déformée de la poutre continue considérée tout d'abord, tracée à une certaine échelle des hauteurs. En désignant en effet par y l'ordonnée de la fibre neutre, par $\mathcal{Y}$ celle de la funiculaire, comptées toutes deux positivement vers le bas comme nous le supposons (3) précédemment; en nommant p_x la charge continue par *m* au point dont l'abscisse est x et $\mathcal{H}$ la composante horizontale constante de la tension funiculaire on aura:

(206)



$$(207) \quad . \quad . \quad . \quad \text{fibre neutre} \ldots \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\mathcal{M}_x}{E J} \qquad\qquad \text{funiculaire} \ldots \frac{d^2 \mathcal{Y}}{dx^2} = \frac{p_x}{\mathcal{H}}$$

Les deux équations s'identifient immédiatement puisque E, J et $\mathcal{H}$ sont des constantes et que p_x n'est autre chose que $\mathcal{M}_x$ à une certaine échelle*. Supposons que comme précédemment on veuille avoir $\mathcal{Y} = \mathcal{K} y$, alors d_2 étant la distance polaire adoptée pour la funiculaire, il faudra que:

$$(208) \quad . \quad . \quad \frac{d^2 \mathcal{Y}}{dx^2} = \mathcal{K} \frac{d_2 y}{dx^2} = \mathcal{K} \frac{\mathcal{M}_x}{E J} = \mathcal{K} \frac{p_x}{E J} = \frac{p_x}{\mathcal{H}} \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{H} = \frac{E J}{\mathcal{K}} = d_2 \ \text{ et } \ \mathcal{K} = \frac{E J}{d_2}$$

Remarquons maintenant que si au lieu de prendre aux points D D' D'' . . . du contour I des lignes de division verticales, on prenait des lignes de direction quelconque on obtiendrait un polygone funiculaire II dont les côtés extrêmes en **0** et **5** seraient toujours tangents à la courbe funiculaire, tandis que les côtés intermédiaires ne le seraient plus. En effet dans le polygone des forces les rayons extrêmes aboutissant en L et L' restent invariables tandis que les rayons intermédiaires se déplacent en perdant toute dépendance vis-à-vis de la courbe funiculaire.

Ceci prouve en même temps que les côtés (**0** . . **1**) et (**4** . . **5**) toujours tangents aux extrémités de la funiculaire se coupent en G sur la verticale du centre de gravité des surfaces du contour I, et détachent sur les verticales des appuis A et A' à partir de la corde (**0** . . **5**) des longueurs qui sont proportionnelles aux tangentes t et t' ou encore aux moments statiques de l'ensemble des forces **1 2 3 4** par rapport aux appuis A, A' ainsi que nous l'avons fait voir au N° *XLVIII*. Désignons par m_A et m'_A ces moments statiques qui ne sont autres que ceux des surfaces représentatives du contour I et nous aurons généralement en tenant compte des signes (208)**:

$$(209) \quad . \quad . \quad t = - \frac{\text{long}.(5 \,.\,.\, T)}{\mathcal{K} \,.\, l} = - \frac{\text{long}\,(5 \,.\,.\, T)}{E \,.\, J \,.\, l} d_2 = \frac{m'_A}{E J l} \qquad \text{et} \qquad t' = - \frac{m_A}{E J l}$$

* Si l'on supposait d'une part que le contour I soit prolongé au-dessus de toutes les travées pour la combinaison de charges considérée et d'autre part que les funiculaires II se trouvent construites de façon que chaque corde (**0** . . **5**) coïncide avec la ligne des appuis A A', il en résulterait le dessin complet de la fibre neutre déformée de la poutre continue.

** Sur la figure $t < o$ et $t' > o$ la courbure de la fibre neutre est bien plus prononcée vers le haut que vers le bas ce qui tient au profil du contour I des moments, que nous avons admis pour plus de clarté; les moments statiques m_A et m'_A supposés comptés positivement pour des charges agissant du haut en bas, sont tous deux négatifs ici.

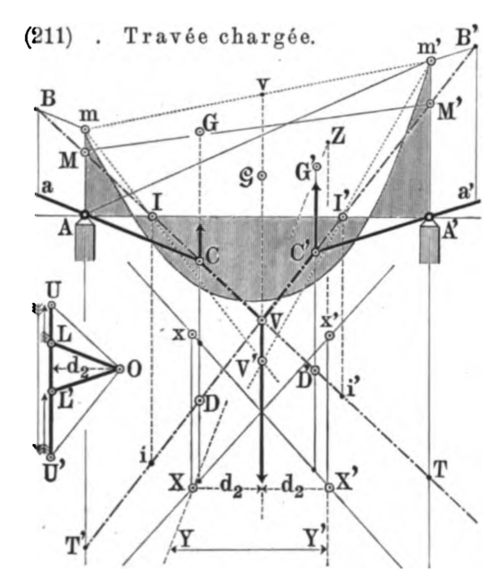
Ces formules très-générales n'ont pas d'application immédiate par ce que ne connaissant par les moments sur les appuis on ne peut tracer le contour I; mais en les appliquant au cas de la travée indépendante où les appuis seraient en M et M' sur la figure, et désignant par $\mathfrak{m}_A$ et $\mathfrak{m}'_A$ les moments statiques alors toujours positifs, on a:

$$(210) \quad . \quad . \quad \mathfrak{t} = \frac{\mathfrak{m}'_A}{EJl} \qquad \mathfrak{t}' = -\frac{\mathfrak{m}_A}{EJl} \qquad \frac{T}{l} = \frac{6EJ\mathfrak{t}}{l} = \frac{6\,\mathfrak{m}'_A}{l^2} \qquad \frac{T'}{l} = -\frac{6EJ\mathfrak{t}'}{l} = \frac{6\,\mathfrak{m}'_A}{l^2}$$

On arrive donc ainsi à une expression très-générale des fonctions T et T', qui lorsqu'on fait usage des intégrateurs Amsler ou d'autres procédés graphiques peut trouver son utilité pratique.

6. Le polygone secondaire et ses applications.

Considérons (fig. 211) une travée A A' quelconque d'une poutre continue, chargée d'une manière quelconque, et le diagramme des moments de flexion positifs et négatifs développés dans la travée. A m et A' m représentent les moments sur les appuis et le contour qui réunit les points m et m' peut être une ligne polygonale, courbe on droite quelconque, suivant la distribution de la charge sur la travée elle-même. Les surfaces du diagramme que nous avons à considérer (couvertes des hachures sur le dessin) peuvent être considérées comme étant la différence de deux surfaces. La première pesant du haut en bas a son centre de gravité en $\mathfrak{G}$ et n'est autre chose que la surface que l'on aurait en supposant la travée indépendante et les appuis placés en m et m'; la seconde pesant du bas en haut, est représentée par le trapèze A m m' A' ou bien encore par l'ensemble des deux triangles A m m' et A m' A' formés avec les moments sur les appuis et la portée et ayant leurs centres de gravité en G et G' sur des verticales qui divisent la portée en trois parties égales.



En construisant le polygone funiculaire des éléments superficiels d'après ces indications et de manière que la corde qui le ferme coïcide avec la ligne des appuis* nous aurons un polygone ouvert tel que A C V C' A'; les côtés A C et C' A' y représentent les tangentes aux appuis à une certaine échelle, d'après ce qui a été démontré, tandis que les points C, V, C' où les trois forces sont appliquées, doivent être préalablement regardés comme inconnus**. Ce polygone imaginé par Mohr et que nous appellerons **le polygone funiculaire secondaire** va nous servir à obtenir tout une série de relations géométriques remarquables.

Désignons par d_1 la distance polaire avec laquelle on suppose construit le contour funiculaire primaire m m' comme nous l'exposons au N° *XLVIII*; les lignes de la figure représenteront alors les quotients des moments de flexion par d_1. En designant par P, $\mathfrak{P}$ et P' les forces représentatives provenant des points G, $\mathfrak{G}$ et G' et qui sont appliquées en C, V et C' au polygone secondaire on aura.

$$(212) \quad . \quad . \quad G \ldots . P = \frac{\mathcal{M} \cdot l}{2\,d_1} \qquad \mathfrak{G} \ldots . \mathfrak{P} = -\frac{1}{d_1}\int_0^l \mathcal{M}_x \, dx \qquad G' \ldots . P' = \frac{\mathcal{M}' \cdot l}{2\,d_1}$$

Ces trois forces sont représentées par L U, U U' et U' L' dans le polygone des forces secondaire où la longueur U U' est seule connue pour le moment. Si nous désignons par d_2 la distance polaire secondaire et si nous prolongeons les droites V C et V C' jusqu'aux points M et M' situés sur les verticales des appuis on aura d'après les triangles semblables A M C, L U O et A' M' C', L' U' O les valeurs:

$$(213) \quad . \quad . \quad (A\,M) = \frac{P\,l}{3\,d_2} = \frac{l^2}{6\,d_1\,d_2}\mathcal{M} \qquad\qquad (A'\,M') = \frac{P'\,l}{3\,d_2} = \frac{l^2}{6\,d_1\,d_2}\mathcal{M}'$$

---

* Nous avons vu au N° *XLVIII* qu'il suffit pour cela de déplacer verticalement le pôle O du polygone des forces, après avoir effectué une première construction convenable.

** En considérant le polygone funiculaire comme fermé à l'aide de la corde A A' à tension nulle, le polygone fermé des forces qui lui correspond sera O L U U' L' O et représentera toutes les forces et tensions funiculaires qui se font équilibre.

Ces longueurs représentent donc à une certaine échelle les moments $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sur les appuis; pour la préciser rappelons nous que d_2 est lié (208) au rapport multiplicateur $\mathcal{K}$ adopté pour les tangentes, et doit en outre comme toutes lignes de la figure contenir le diviseur d_1; on aura donc:

(214) . . . $d_2 = \frac{E\,J}{\mathcal{K}\,d_1}$ ce qui donne: $(A\,M) = \frac{\mathcal{K}\,l^2}{6\,E\,J}\,\mathcal{M}$ et $(A'\,M') = \frac{\mathcal{K}\,l^2}{6\,E\,J}\,\mathcal{M}'$

Ces longueurs représentent donc toujours les moments sur les appuis à l'échelle que nous avions déjà trouvée (fig. 189) précédemment, en sorte que si $\mathcal{K}$ était fixé à l'avance d'une manière invariable, les longueurs (A M) (A' M') seraient toujours les mêmes quelle que soit la valeur de d_1 que l'on choisisse. Pour tout ce qui suit il est toutefois plus commode de se fixer un rapport constant entre d_1 et d_2 et de laisser varier $\mathcal{K}$ en conséquence; nous admettrons avec les auteurs allemands que l'on prenne toujours

(215) . . . $d_1 \lesseqgtr 1$, voisin de 1 $d_2 = \frac{1}{6}\,d_1$ $\mathcal{K} = \frac{6\,E\,J}{d_1^2}$

les valeurs trouvées ci-dessus deviendront alors *.

(216) . $(A\,M) = \left(\frac{l}{d_1}\right)^2 \mathcal{M}$ $(A'\,M') = \left(\frac{l}{d_1}\right)^2 \mathcal{M}'$ $\mathcal{M} = \left(\frac{d_1}{l}\right)^2 (A\,M)$ $\mathcal{M}' = \left(\frac{d_1}{l}\right)^2 (A'\,M')$

Ayant choisi d_1 on connaît d_2 et U U' dans le polygone des forces, ce qui détermine l'écart vertical du faisceau U O U' ou du faisceau des droites C V et C' V et établit une relation géométrique entre les tangentes aux appuis et les moments de flexion sur les appuis analogue à celle que nous avions déjà trouvée pour la travée non chargée (189).

Prenons pour le faire voir sur des verticales situées à des distances d_2 de $\mathcal{G}$ V les longueurs X x = X' x' = U U' puis joignons X x' et X' x. Ces droites forment un faisceau équivalent à U O U', que nous appellerons l'entrecroisement de la travée chargée (en allemand: die Kreuzlinien) en supposant pour simplifier X X' horizontal (ce qui n'est pas indispensable). Si l'on connaît maintenant des tangentes aux appuis ou les droites A C et A' C', on prendra sur les verticales de C et C' les longueurs C D et C' D' égales aux longueurs que ces droites détachent dans l'entrecroisement et on mènera les droites D' C et D C qui prolongées jusqu'au-dessus des appuis donneront les longueurs A M et A' M' représentant les moments. Si au contraire ces dernières longueurs étaient connues on en déduirait les tangentes sur les appuis en prenant au-dessous de M et M' les longueurs M T' et M' T égales aux longueurs que les verticales des appuis détachent dans l'entrecroisement et on menant les droites M T et M' T' qui fournissent sur les verticales de G et G' les points C et C' cherchés.

Le cas de la fig. (189) n'est qu'un cas particulier du cas plus général que nous venons d'étudier. La charge sur la travée A A' étant nulle l'écart vertical de l'entrecroisement est nul et la ligne brisée C V C' se réduit à une ligne droite. En considérant le couple de travées non chargées de la fig. (189) on voit que la polygone secondaire sera A C C' A' C_1 C_1' A". Les forces appliquées en C' et C_1 qui d'après (212) sont $P' = \mathcal{M}' . l : (2\,d_1)$ et $P_1 = \mathcal{M}' . l_1 : (2\,d_1)$ auront une résultante qui passe par le point de concours R des côtés funiculaires C C' et C_1' C_1 et qui divise c' c_1 dans le rapport $P_1 : P' = l_1 : l$ . . . . etc. On en conclut comme précédemment tout ce que nous avons dit sur l'antiverticale sur les points d'inflexion correspondants I et I_1 de la ligne des appuis et plus généralement sur les points i et i_1, situés sur leurs verticales et qui se correspondent également; on en déduit aussi la construction (195) de Mohr pour les points fixes.

Nous pouvons maintenant généraliser ces propositions pour un couple de travées, chargées ou non. Supposons d'abord qu'à droite de la travée chargée (fig. 211) se trouve une travée non chargée; les côtés funiculaires qui se recontrent alors sur l'antiverticale de l'appui A' coupent l'axe des appuis en deux points I' et I_1' (non indiqué sur la figure) auxquels le raisonnement que nous avons fait ci-dessus sera applicable, et qui seront correspondants. Si la travée de gauche est seule chargée dans toute la poutre, le point I_1' sera un point fixe et alors son correspondant

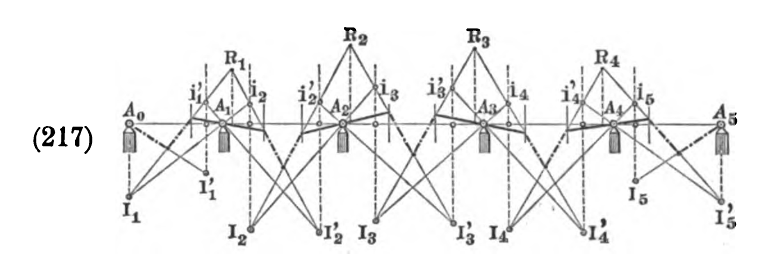
* Pour passer graphiquement d'après ces formules, des longueurs représentatives A M, A'M' aux longueurs A m, A'm' on prend sur l'entrecroisement X'Z = l et Z Y' = d_1 on mène Z X jusqu'à la rencontre Y de l'horizontale Y' Y. La longueur Y Y' est l'écart horizontal à porter extérieurement aux verticales G C, G' C' pour avoir les verticales a B, a' B' jusqu'auxquelles il faut prolonger les côtés funiculaires, pour que les longueurs a B et a' B' représentent exactement les moments sur les appuis.

I' le sera aussi. Donc dans le cas d'une travée chargée seule les côtés funiculaires VC et VC' passent par les points d'inflexion fixes de la travée*.

Dans le cas le plus général où l'on considère un couple de travées dans la poutre supposée chargée d'une manière quelconque, les côtés funiculaires VC' et $V_1 C_1$ (non indiqué sur la figure) qui se rencontrent sur l'antiverticale de l'appui A', coupent toujours les verticales des points fixes correspondants I et I_1 ou bien I' et I'_1 en deux points i et i_1 ou bien i' et i'_1 auxquels les raisonnements que nous avons faits ci-dessus seront applicables et qui seront correspondants. C'est en se fondant sur cette propriété du polygone funiculaire secondaire, que l'on peut arriver à le construire de suite pour une combinaison de charges quelconque.

7. Construction directe des moments sur les appuis pour une combinaison de charges quelconque.

Considérons par exemple (fig. 217) le pont à 5 travées auquel nous avons déjà appliqué les diverses constructions donnant les points fixes. Construisons ces points et les antiverticales des appuis intermédiaires, ainsi que les verticales divisant toutes les travées en trois parties égales; toutes ces constructions ne dépendent, comme on sait, que des longueurs de travées de la poutre.



Supposons maintenant que l'on considère une combinaison quelconque de charges permanentes et mobiles et le polygone secondaire qui en résulte, que nous représentons sur la figure en traits pleins pour les tangentes et en traits ponctués et pointillés pour les lignes intermédiaires concernant les moments appliqués. Pour pouvoir tracer ce polygone on déterminera d'abord les forces $\mathfrak{F}_1$ $\mathfrak{F}_2$ .... $\mathfrak{F}_5$ d'après les surfaces des polygones (ou courbes) funiculaires primaires représentant les moments de flexion dans les cinq travées supposées indépendantes, et on construira dans chaque travée l'entrecroisement qui en résulte. Ces opérations préalables (non indiquées sur la figure) une fois achevées, on pourra immédiatement tracer le polygone secondaire comme suit:

On prendra $I_1 A_0$ égal à la hauteur d'entrecroisement sous A_0 dans la première travée et on mènera la droite $I_1 A_1$ jusqu'au point correspondant i_2 de la deuxième travée, situé sur la verticale du point fixe de gauche; on prendra ensuite $I_2 i_2$ égal à la hauteur d'entrecroisement sous i_2 dans la travée et on mènera $I_2 A_2$ jusqu'au point correspondant i_3 de la troisième travée. On continuera ensuite ce tracé, construisant successivement $I_3 i_3$, $I_3 A_3 i_4$ puis $I_4 i_4$, $I_4 A_4 i_5$ puis $I_5 i_5$ et $I_5 A_5$ qui aboutit à l'appui extrême de droite. Partant alors de cet appui pour revenir sur la gauche on construira d'une manière analogue les droites $I'_5 A_4 i'_4$, $I'_4 A_3 i'_3$, ... etc. jusqu'à $I'_1 A_0$ qui ramène à l'appui extrême de gauche.

On vérifiera ensuite que les droites $I_1 i'_1$, $I'_2 i_2$ se rencontrent bien en un point R_1 de l'antiverticale de l'appui A_1; on effectuera les tracés et vérifications analogues pour les points R_2 R_3 R_4 concernant les antiverticales des autres appuis intermédiaires, et en utilisant les points où les droites ainsi construites rencontrent les verticales élevées aux tiers des portées on pourra achever le tracé du polygone secondaire en y ajoutant les lignes représentatives des tangentes. Ces lignes devront passer exactement par les points d'appui, ce qui donne lieu à une nouvelle vérification.

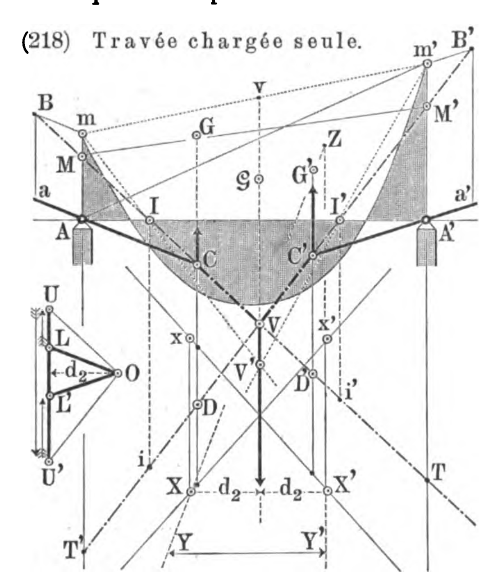
Ayant le polygone secondaire on en déduira immédiatement les moments sur les appuis (211). Remarquons à cet égard que si la poutre comprend un certain nombre de travées intermédiaires égales, en prenant leur portée commune pour distance polaire primaire d_1 la construction donne immédiatement (sans réduction) les moments sur les appuis qui comprennent ces travées (ce seraient les ordonnées des points R_1 R_2 R_3 R_4 ... etc. sur la figure et les points R_2 R_3 ... se trouvent alors au-dessus des appuis A_2 A_3 .... etc.). Remarquons en outre que la construction est aussi générale qu'élégante, qu'elle ne suppose nullement que les appuis soient en ligne droite et fait même voir clairement comment un point R doit s'élever ou s'abaisser en même temps que l'appui A

* Ceci permet immédiatement de construire le polygone secondaire dans ce cas spécial, en prenant au-dessous de I et I' des longueurs $I\,i$ et $I'\,i'$ égales à celles que ces verticales détachent dans l'entrecroisement. Nous y reviendrons en nous occupant plus spécialement de la travée chargée seule.

qui lui correspond*. Plusieurs auteurs distingués l'ont encore généralisée pour le cas de poutres continues à section variable en remplaçant les trois surfaces qui servent de base au tracé du polygone secondaire, par des surfaces déformées de façon à tenir compte de la manière dont varie le moment d'inertie des sections de la poutre. Ces études n'ont pas reçu jusqu'ici d'applications pratiques. Pour les ponts que l'on construit d'habitude nous ne pouvons conseiller l'application de la théorie qui précède, pour les motifs que nous avons déjà indiqués tout d'abord.

8. Identité de la construction de Mohr avec celle qui dérive de nos formules, pour le cas d'une travée chargée seule.

Dans le cas spécial d'une travée chargée seule (le reste de la poutre étant libre de poids et charges) qui sert de base à tous nos calculs et aux constructions graphiques que nous recommandons comme les plus simples, il est facile de voir que la construction déjà indiquée (201) n'est qu'un cas particulier de la construction plus générale qui dérive de la théorie de Mohr. Reprenons cette dernière (fig. 218) pour cette surcharge spéciale. Nous savons qu'alors les droites V C et V C' passent par les points fixes I et I' de la travée, que toute la figure d'ailleurs est susceptible d'une réduction des ordonnées dans le rapport $(d_1 : l)^2$ pour être amenée à se trouver d'accord avec les lignes représentant les moments véritables eu égard aux échelles admises pour les longueurs et les forces. On tiendra compte de cette réduction en remplaçant le faisceau M V M' par le faisceau m V' m' obtenu en joignant m I et m' I'. Or la construction résultant de ce faisceau de droites avec A A' et les longueurs A m et A' m' représentant les moments sur les appuis est équivalente dans le sens vertical avec notre construction de la fig. (201) qu'elle représente pour ainsi dire sous forme renversée. Pour nous en rendre compte faisons abstraction pour le moment de la réduction $(d_1 : l)^2$ qui disparaîtrait si $d_1 = l$, et remarquons que dans les deux figures les lignes A A' et M M' se substituent réciproquement de façon qu'il nous suffira de constater que les longueurs V v ou V' v occupent la même place sur la portée et sont équivalentes dans les deux cas. Prolongeons (fig. 218) les lignes M V et M' V vers le bas jusqu'aux points T et T' où elles rencontrent les verticales des appuis puis considérons le cas où la travée est indépendante et où, A M, A' M' étant nuls, les appuis se trouvent placés en M et M'. Alors, comme dans le polygone des forces O L et O L' coïncident avec O U et O U', on voit que M T et M' T' représentent les tangentes aux appuis dans le polygone secondaire et ce dernier se réduit au contour M V M'. On aura par suite d'après les formules (209) (215):



(218) Travée chargée seule.

$$(219)\quad . \quad M'T = \mathfrak{K}\, l\, \mathfrak{t} = \frac{6EJ}{d_1^2}\, l\, \mathfrak{t} = \frac{T}{l}\left(\frac{l}{d_1}\right)^2 \qquad MT' = -\mathfrak{K}\, l\, \mathfrak{t}' = -\frac{6EJ}{d_1^2}\, l\, \mathfrak{t}' = -\frac{T'}{l}\left(\frac{l}{d_1}\right)^2$$

Les longueurs M T' et M' T sont donc équivalentes aux longueurs A T' et A' T de la fig. (201), ou ce qui revient au même, les longueurs V v et V'v sont équivalentes de part et d'autre.

---

* Il importe de remarquer que le point de départ de toute cette théorie ainsi que de la théorie des calculs numériques exposée tout d'abord, est toujours l'équation différentielle (207) ou (12), où l'on suppose que la fibre neutre primitivement droite se trouve déformée tant sous l'action des charges appliquées que par suite des tassements des appuis et des moments de flexion supplémentaires qui en résultent. Pour appliquer les tracées graphiques mentionnées en dernier lieu au cas où l'on admet des tassements il faut porter ceux-ci sur l'épure au-dessous ou au-dessus des appuis, en tenant compte du coefficient $\mathfrak{K}$ qui affecte toutes ordonnées; la construction (217) sera applicable aux nouveaux appuis ainsi obtenus.

Si enfin la fibre moyenne était primitivement une ligne courbe il faudrait porter toutes les ordonnées à partir de cette ligne sur l'épure.

FIN du TOME I.

LXI. *Notations employées dans tout l'ouvrage.*

Notation	Signification	Pages Tome I	Pages Tome II
A_k $\mathfrak{A}_k$	Coefficients de α_k pour le cas où $\alpha_0 \lesseqgtr 0$	196	—
A_0 A_1	Coefficients de la formule parabolique pour les effets de l'aboutement	102	—
$\mathcal{A}$	Résistance au travail, pour des efforts dans un même sens (d'après Wöhler)	111	—
$+\mathcal{A}' - \mathcal{A}''$ $-\mathcal{A}' + \mathcal{A}''$	Résistances au travail alterné (extension et compression, d'après Wöhler)	111	—
a	Distance de l'appui de gauche d'une travée de poutre continue à une force P	190	—
a	Distance de l'appui de gauche d'une travée de poutre continue à la section qui limite la charge uniformément répartie	198	64
a_1 a_2	Distances de l'appui de gauche d'une travée de poutre continue aux sections qui comprenant la charge uniformément répartie	198	64
$a = {}^1/_2\, l$	Distances du milieu de la portée aux appuis dans une travée indépendante	36	IV
a' a''	Distances d'une section à l'appui de droite et à celui de gauche	37	—
$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$	Distances des forces $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_n$ au milieu de portée de la travée indépendante, prises positivement des deux côtés de ce point	36	—
$a_1'\ a_2' \ldots a_n'$ et $a_1''\ a_2'' \ldots a_n''$	les distances analogues toujours positives pour les forces P_n agissant sur la droite et sur la gauche de la section de pont	37	—
$\mathfrak{a}$	Echelle (scala) des charges du § 3 de l'ordonnance, pour le calcul des bandes	2	1
B_k $\mathfrak{B}_k$	Coefficients de β_k pour le cas où $\beta_0 \lesseqgtr 0$	196	—
B_0 B_1	Coefficients de la formule linéaire pour les effets de l'aboutement	102	—
b	Distance de l'appui de droite d'une travée de poutre continue à une force P	190	64
b	Distance de l'appui de droite d'une travée de poutre continue à la section qui limite la charge uniformément répartie	198	64
b_1 b_2	Distances de l'appui de droite d'une travée de poutre continue aux sections qui comprennent la charge uniformément répartie	198	64
$b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_n$	Distances de chacune des forces $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_n$ appliquées à une travée indépendante à celui des appuis qui est le plus proche, comptées positivement	36	—
$\mathfrak{b}$	Echelle (scala) des charges du § 3 de l'ordonnance pour le calcul des croisillons	2	2
C' C''	Hauteurs de la base de déformation pour le calcul graphique de $\Omega\ \mathfrak{m}\ J$	135	—
$C_2\ C_3\ C_4$	Les facteurs $[c^2 - (c-\delta)^2]$ $[c^3 - (c-\delta)^3]$ $[c^4 - (c-\delta)^4]$	142	—
$\mathcal{C}$	Limite inférieure pour la résistance au travail (d'après Wöhler)	111	—
c	Longueur d'un côté de cornière mesurée extérieurement	108	VII
c c'	Longueurs du grand et du petit côté d'une cornière, mesurées extérieurement	108	—
c_i c_i'	Longueurs du grand et du petit côté d'une cornière, mesurées intérieurement	140	—
D	Diamètre des colonnes résistant à l'aboutement (Formules Love)	103	—
D	Différence $c - c' = c_i - c_i'$ des côtés de cornières	141	—
$\mathfrak{D}$ $\mathfrak{D}'$ $\mathfrak{D}''$	Coefficients auxiliaires au dénominateur de x_0 (poutres continues)	206	—
$\mathcal{D}$	Intervalle $(\mathcal{A} - \mathcal{C})$ ou $(\mathcal{A}' + \mathcal{A}'')$ dans lequel oscillent les efforts (Wöhler)	111	—
d	Distances des rivets reliant l'âme aux bandes (cisaillement longitudinal)	145	—
d	Distance de centre de gravité dans la formule $J = J_0 + \Omega d^2$	—	VII
d	Distance polaire pour le polygone funiculaire (procédés graphiques)	182	—
d_1 d_2	Distances polaires primaire et secondaire (Théorie de Mohr, poutres continues)	240	—
d et d	Signe conventionnel pour toute différentiation usuelle	38	—
∂	Signe conventionnel pour indiquer la différentiation partielle	211	—
∂	Demi-longueur de la corde des segments paraboliques (Fonctions $\Omega\ \mathfrak{m}\ J$)	131	—
E ou E	Coefficient d'élasticité dans la théorie ordinaire	100	—
$\mathfrak{E}$	Valeur auxiliaire $\mathfrak{E} = 6\,E\,J\,l^2$ (Influence des tassements aux appuis)	230	—
$F\ F_t\ F_n$	Force appliquée en un point de la courbe funiculaire et ses composantes tangentielle et normale	181	—
$F\,(x, y)$	Equation d'une courbe fermée quelconque (Calcul des fonctions $\Omega\ \mathfrak{m}\ J$)	129	—
f	Longueur de la flèche dans la théorie de l'aboutement	101	—
f	Longueur de la flèche dans les segments paraboliques (Calcul de $\Omega\ \mathfrak{m}\ J$)	131	—
f	Valeur de la flèche (sinus verse) pour les ponts en courbe	152	—
G_x	Point limite de la surcharge pour les bandes dans une travée de poutre continue	209	—
$G\ G'\ \mathfrak{G}\ \mathfrak{G}'$	Centres de gravité des segments paraboliques (Fonctions $\Omega\ \mathfrak{m}\ J$)	131	—
g	Accélération de la pesanteur; $g = 9^m 81$ par seconde	84	—

Notations employées dans tout l'ouvrage (Suite)		Pages Tome I	Pages Tome II
H	Hauteur moyenne du contour d'une poutre (effets du vent)	83	—
H	Hauteur de l'âme verticale des poutres en tôle (Tab. du Tome II)	—	X
$H\ H'$	Hauteurs des montants verticaux à gauche et à droite d'une maille de poutre	158	—
$\mathcal{H}$	Composante horizontale constante dans la courbe funiculaire (Théorie de Mohr)	240	—
$\mathscr{H}$	Composante horizontale constante dans la courbe funiculaire à charge verticale	182	—
h	Hauteur de la fibre extrême au-dessus de l'axe neutre (aboutement)	101	VIII
h_1	Hauteur du point d'application de la force au-dessus de l'axe neutre	102	—
$h\ h'$	Hauteurs du côté et de l'arête d'une cornière sur l'axe neutre	—	VII
J	Moment d'inertie de la section d'une poutre continue, rapporté à l'axe neutre et supposé constant pour toute la poutre	190	—
J	Moment d'inertie de la pièce aboutie, rapporté à l'axe neutre	99	VIII
J	Moment d'inertie rapporté à un axe quelconque (calcul des cornières)	—	VII
J_0	Moment d'inertie sur l'axe neutre d'après la formule $J_0 = J - \Omega\, d^2$	—	VII
$J\ J_0$ et $\mathfrak{J}\ \mathfrak{J}_0$	Moments d'inertie analogues, pour le calcul des segments paraboliques	132	—
$J_{plein}\ J$	Moments d'inertie du profil plein au milieu de la portée et sur l'appui	149	—
$J_{min}\ J_{max}$	Moments d'inertie sur les axes principaux de l'ellipse centrale d'inertie	106	—
$J_1\ J_2\ J_3$	Moments d'inertie sur des axes qui font avec le grand axe de l'ellipse centrale d'inertie des angles ω, $(\omega + \pi : 4)$, $(\omega + \pi : 2)$	107	—
J_x	Moment d'inertie de la section dont l'abscisse est x (cisaillement longitudinal)	145	—
$J_z\ J_m$	Moment d'intertie pour l'abscisse z et au milieu de la portée	146	—
i	Travail intérieur des matériaux par unité de surface	145	1
i'	Le travail comparé (Ordonnance autrichienne et circulaire française)	123	1
$i\ i_0$	Travail intérieur en tenant compte ou non de l'aboutement	99	VIII
K	Ecartement de la médiane proportionnelle et du centre de gravité du train	38	—
$\mathcal{K}$	Coefficient auxiliaire dans l'expression $(M_x)_p$ (poutres continues)	211	—
$\mathcal{K}$	Coefficient multipliant les tangentes des inclinaisons sur les appuis (Mohr)	235	—
$\mathscr{K}$	Coefficient dans l'équation dite de Gerber (Théorie d'après Wöhler)	112	—
k	Indice de la travée surchargée, dans la théorie des poutres continues	189	—
$L_1\ L_2 \ldots L_6$	Catégories de locomotives classées d'après leur pouvoir surchargeant	121	—
L L	Longueur vraie de la barre résistant à l'aboutement	99	VIII
l l	Longueur libre de la barre aboutie (longueur d'une sinuosité)	100	5
$l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_k \ldots l_n$	Longueurs de portée des n travées d'une poutre continue	189	66
l'	Longueur surchargée dans un pont à travée indépendante	44	—
l_n	Distance de la charge isolée P_n de la section de pont considérée	44	—
$l_1\ l_2 \ldots l_n$	Distances des charges $P_1\ P_2 \ldots P_n$ de l'appui de droite	44	—
$l'_W\ l''_W$	Longueurs latérales sur la portée, couvertes de wagons (train fléchissant)	122	—
M_x	Moment de flexion pour l'abscisse x dans une travée d'une poutre continue, en supposant cette travée seule chargée, à l'exclusion de toutes les autres	206	XIV
M M'	Moments de flexion sur l'appui de gauche et de droite de cette travée	191	XIII
$M_1\ M_2 \ldots M_k \ldots M_{n-1}$	Moments sur les appuis d'une poutre continue à travée k chargée seule, toutes les autres travées ne supportant ni poids ni charges	189	—
$\mathscr{M}_x\ \mathscr{M}\ \mathscr{M}'$	Les moments analogues à M_x M M' pour le cas de charges quelconques	147	XII
$\mathscr{M}_0\ \mathscr{M}'_0$	Parties des moments $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ (charges permanentes et mobiles) qui seraient provoquées en excluant la surcharge de la travée considérée	191	XIV
$\mathscr{M}_1\ \mathscr{M}_2 \ldots \mathscr{M}_k \ldots \mathscr{M}_{n-1}$	Moments analogues à $M_1\ M_2 \ldots M_{n-1}$ sur les appuis d'une poutre continue chargée d'une manière quelconque	193	—
M_x	Moment dans une travée indépendante et une section dont l'abscisse est x compté toujours positivement	145	—
$\mathscr{M}\ \mathscr{M}'$	Moments de flexion sur le nœud de gauche et le nœud de droite d'une maille de poutre à triangles indépendante, chargée partiellement	158	—
$M_{\mathfrak{a}}\ \mathscr{M}_{\mathfrak{b}}$	Moments provoqués le premier par la charge de l'échelle $\mathfrak{a}$ au milieu de la portée, le second par la charge de l'échelle $\mathfrak{b}$ sur une section considérée	148	5
$\mathfrak{M}_x$	Moment de flexion analogue à M_x pour la travée indépendante sur la section dont l'abscisse est x, mais compté avec le signe admis pour les poutres continues	190	64
$\mathscr{M}_{max}$	Moment de flexion analogue a M_x mais comprenant les effets dynamiques	86	—
$\mathscr{M}_{p+q}$	Moment provoqué sur la poutre transversale par les charges perm. et mobiles	169	—
$m_A\ m'_A$	Moments statiques des surfaces représentatives, sur les appuis (Théorie de Mohr)	240	—
$\mathfrak{m}_A\ \mathfrak{m}'_A$	Moments analogues pour la travée supposée indépendante (Théorie de Mohr)	241	—
m	Moment statique de l'aire comprise dans une courbe sur un axe donné	129	—
$m\ \mathfrak{M}$	Moments statiques analogues pour les segments paraboliques	132	—
$m\ m_0$	Moments statiques des sections de cornières sur un axe quelconque et sur l'arête	—	VII

Notations employées dans tout l'ouvrage (Suite)		Pages Tome I	Pages Tome II
m_y	Moment statique d'une partie de section limitée par l'ordonnée y, compté sur l'axe neutre de la section (cisaillement longitudinal)	145	—
m	Rapport $a'' : a'$ dans lequel une section divise la portée	41	—
m	Ecartement du couple d'essieux de l'exemple de calcul	36	—
N	Tension (ou compression) en un point d'une courbe funiculaire	181	—
$\mathfrak{N}$ $\mathfrak{N}'$	Coefficients auxiliaires au numérateur de x_0 (poutres continues)	206	—
n	Nombre des travées d'un pont à poutres continues	189	—
n	Nombre de sections simples de rivets dans un assemblage	—	23
n	Nombre de tiges de rivets dans un assemblage (Trous de rivets)	—	24
P	Poids ou charge isolée quelconque agissant sur une poutre continue	189	64
P_1 P_2 P_3 . . P_n	. . . Charges analogues appliquées à volonté sur une travée de cette poutre	198	64
P_1 P_2 P_3 . . P_n	. . . Charges isolées analogues agissant sur la travée indépendante	36	—
P'_n et P''_n	Charge isolée quelconque agissant sur la droite et la gauche d'une section	37	—
P_m	Force médiane proportionnelle d'un train pour une section donnée	38	—
P	Force appliquée à une barre et provoquant l'aboutement	101	—
P_E	Force minima pouvant produire l'aboutement (Formule d'Euler)	100	—
P P_0	Forces pouvant produire l'écrasement avec ou sans aboutement	104	—
$\mathcal{P}$	Charge isolée appliquée aux poutres tranversales ou ailleurs	77	—
$\mathcal{P}_a$	Charge analogue d'après l'échelle a et du § 3 lit e de l'ordonnance	148	—
$\mathfrak{P}$	Charge idéale totale de la surface représentative pour la travée indépendante, agissant (d'après la théorie de Mohr) sur le polygone secondaire	240	—
p	Charge mobile par mètre agissant sur une poutre continue	147	64
p_x	Charge idéale par mètre pour l'abscisse x provenant la surface représentative (Mohr)	240	—
p_a et p_b	Charges par mètre prescrites par les échelles a et b de l'ordonnance	—	5
p	Chargè horizontale par m^2 (170 ou 270^{kg}) due aux effets du vent	164	—
p	Charge par m équivalente pour les moments au milieu de la portée, dans la travée indépendante	37	21
p_x	Charge variable par m, pour l'abscisse x appliquée verticalement à la courbe funiculaire	182	—
p'	Charge par m équivalente pour l'effort tranchant sur un appui de la travée indépendante	44	2
p et p'	Charges par m d'après l'ordonnance de 1887 et la circulaire française de 1877	123	1
p'_l $p'_{l'}$	Charges équivalentes analogues à p' pour les longueurs surchargées l l'	56	—
p''	Charge équivalente par m. pour les moments provoqués vers le $^1/_4$ de la portée	50	—
p_w	Charge équivalente par m. pour les wagons couvrant les longueur l'_w l''_w	122	—
$\mathfrak{p}$ $\mathfrak{p}'$	Charges par m, résultant pour p et p' des échelles a et b de l'ordonnance autrichienne et que l'on a mis en comparaison dans les calculs	71	—
q	Charge permanente par m, uniformément répartie sur une travée de poutre continue	197	66
q	Charge permanente par m, uniformément répartie sur une travée indépendante	85	5
q q'	Charges permanentes par m, pour les ponts construits d'après l'ordonnance autrichienne de 1887 et d'après la circulaire française de 1877	123	—
R R'	Réactions des appuis sur la gauche et la droite d'une travée de poutre continue, supposée chargée seule à l'exclusion de toutes les autres	189	—
R_0 R_1 . . . R_k . . . R_n	. . . Réactions de tous les appuis sur une semblable poutre	189	—
R R_0	Résistance à l'écrasement avec ou sans aboutement (pr. unité de surface)	103	—
$\mathcal{R}$ $\mathcal{R}'$	Réactions des appuis analogues à R R' mais pour des charges quelconques	191	—
$\mathcal{R}_0$ $\mathcal{R}_1$ . . . $\mathcal{R}_k$ . . . $\mathcal{R}_n$	. . . Réactions analogues à R_0 R_1 . . . R_n mais pour des charges quelconques	191	—
r	Rayon de giration d'une section $r = (J : \Omega)^{1/2}$	99	VIII
S	Tension (compression) d'une barre en général	174	—
S_{min} S_{max}	Efforts minimum et maximum provoqués sur une pièce considerée (Wöhler)	111	—
$\mathcal{S}$	Résistance à l'oscillation dans la théorie d'après Wöhler	111	—
s	Longueur d'une pièce fléchie par aboutement, comptée sur l'arc de courbe	101	—
s	Longueur de l'axe de la voie sur les ponts en courbe, mesurée sur l'arc ayant la longueur de poutre comme corde	152	—
$\mathfrak{s}$	Travail au cisaillement longitudinal par unité de surface	145	—
T T'	Fonctions des charges $T = + 6 E J \mathfrak{t} = \frac{1}{l} \Sigma P a b (l + b)$ et $T' = - 6 E J \mathfrak{t}' = = \frac{1}{l} \Sigma P a b (l + a)$ ne dépendant que de la travée (poutres continues)	193	64

Notations employées dans tout l'ouvrage (Suite)		Pages Tome I	Pages Tome II
T_1 T_2 ... T_5	Catégorie de tenders, classés d'après leur pouvoir surchargeant	121	—
$\mathcal{T}$	Résistance absolue, la rupture ayant lieu après l'application d'un seul effort	111	—
$\mathfrak{T}$ $\mathfrak{T}'$ $\mathfrak{T}''$	Angles des tangentes aux appuis d'une poutre continue, multiplies par $\mathcal{H}$	235	—
t t'	Tangentes des inclinaisons de la fibre moyenne d'une poutre continue au-dessus de l'appui de gauche et de l'appui de droite d'une travée considérée	192	—
$\mathfrak{t}$ $\mathfrak{t}'$	Tangentes analogues pour la travée supposée indépendante	193	64
t	Tangente de l'inclinaison d'un élément de la fibre moyenne dans la pièce aboutée, sur la corde de l'une des sinuosités	101	—
$+t_0$ et $-t_0$	Tangente t ci-dessus pour les deux extrémités de la corde considérée	101	—
U	Valeur auxiliaire $U = \frac{Pl}{EJ} \cdot \frac{v^2}{2g}$ pour l'étude des effets dynamiques	85	—
$\mathcal{U}$	Résistance primitive, pour un nombre infini d'efforts entre 0 et $\mathcal{U}$	111	—
u	Hauteur du centre de gravité d'une cornière à côtés égaux, sur l'arête	108	VII
u u'	Grande et petite hauteur analogue dans une cornière à côtés inégaux	138	—
V_x	Effort tranchant pour l'abscisse x dans une travée d'une poutre continue, supposée chargée à l'exclusion de toutes les autres	200	XIV
V V'	Valeurs de V_x pour x = o et x = l dans les mêmes conditions de charge	189	—
$\mathcal{V}_x$ $\mathcal{V}$ $\mathcal{V}'$	Efforts tranchants analogues à V_x V et V' pour des combinaisons de charges quelconques	190	XII
V_x	Effort tranchant dans une section quelconque d'une travée indépendante dont l'abscisse est x, pour des charges quelconques	145	—
$\mathfrak{V}_x$	Effort tranchant analogue à V_x mais avec le signe admis pr. la poutre continue	191	64
v	Hauteur du centre de gravité d'une cornière à côtés egaux sur l'un d'eux	109	VII
v v'	Grande et petite hauteur analogue dans les cornières à côtés inégaux	108	—
v	Vitesse d'un train en m par seconde (effets dynamiques)	84	—
W_1 W_2 W_3	Cathégories de wagons classées d'après leur pouvoir surchargeant	121	—
W	Surface en m^2 par m de l'une des maîtresses-poutres, qui est exposée au vent	81	V
w	Partie de la surface W en m^2 par m, qui couvre le train ou inversement	81	V
$\mathcal{W}$ w	Surfaces $W(1+\theta)$ et $[2^m5 - w(1+\theta)]$ à faire entrer dans les calculs	81	V
X	Fonction de x (fonctionnant comme constante en y) dans la formule du cisaillement longitudinal	145	—
X	Projection sur l'axe des x, de la force F (courbes funiculaires)	181	—
x	Abscisse d'une section de poutre continue rapportée à l'appui de gauche	190	—
x' = l — x	Abscisse comme ci-dessus, mais rapportée à l'appui de droite	213	—
x_m	Abscisse de la section où le plus grand moment négatif se produit	148	—
x_o	Abscisse du point de passage de gauche dans une travée de poutre continue, sur laquelle agit une charge isolée	206	—
x_o^v x_o^w	Racines de l'équation $\mathcal{Y} = 0$ dans une travée intermédiaire	208	—
x x'	Abscisses analogues à x x' dans la travée indépendante	145	64
x	Distance du point X_1 au point X, aussi de P_m au milieu de portée	37	—
x' x''	Abscisses déformées successivement pour le calcul de m et J	135	—
x_0	Abscisse du point de départ d'une droite dans l'équation de celle-ci	131	—
x_0	Abscisse du centre de cercle, pour le calcul du segment circulaire	132	—
x_1	Abscisse d'un point de profil, d'où part la tangente	136	—
x_1 x_2	Abscisses des points extrêmes d'un segment aux abscisses ou aux ordonnées	129	—
x_0 x_1 x_2 ... x_{2n}	Abscisses pour la formule de Simpson dans le calcul de Ω m J	130	—
Y	Valeur auxiliaire $Y = y - y_0$ pour les calculs des segments circulaires	133	—
Y	Projection de la force F sur l'axe des y (courbes funiculaires)	181	—
$\mathcal{Y}$	Ordonnée de la courbe funiculaire secondaire (Théorie de Mohr)	240	—
$\mathcal{Y}$ $\mathcal{Y}'$	Fonctions auxiliaire pour calculer a (poutres continues)	208	—
y	Ordonnée d'un point de la fibre moyenne de la poutre continue	190	—
y_m	Ordonnée qui dans une travée de poutre continue correspond à l'abscisse x_m pour laquelle se produit le plus grand moment négatif	148	—
y_A y'_A	Ordonnées (abaissements) de la fibre moyenne d'une poutre continue au droit de l'appui de gauche et de l'appui de droite	192	—
y_0 y_1 y_2 ... y_n	Ordonnées (abaissements) analogues aux appuis 0, 1, 2 ... n	189	—
y	Ordonnée d'un point d'une section par rapport à l'axe neutre	145	—
y	Ordonnée d'un point de la fibre neutre dans la travée indépendante	146	—
y	Ordonnée de la fibre moyenne d'une pièce fléchie par aboutement par rapport à la corde de l'une des sinuosités	101	—
y_0	Ordonnée du point de départ d'une droite, pour l'équation de celle-ci	131	—
y_0	Ordonnée du centre de cercle pour le calcul du segment circulaire	132	—

Notations employées dans tout l'ouvrage (Suite)

		Pages Tome I	Pages Tome II
y_1	Ordonnée d'un point M du profil, d'où part la tangente	136	—
y_1 y_2	Ordonnées des points extrêmes d'un segment aux abscisses ou aux ordonnées	129	—
y_0 y_1 . . y_{2n}	Ordonnées pour la formule de Simpson dans le calcul de Ω m J	130	—
Z	Fonction auxiliaire pour le segment aux abscisses en trapèze (Ω m J)	131	—
Z'' Z' Z et $\mathfrak{Z} = \pm Z$	Fonctions auxiliaires pour le segment circulaire	133	—
z	Distance d'une charge isolée ou d'une section au milieu de portée	146	64
z_0 z_1 z_2 . . . z_{2n}	Ordonnées pour la formule de Simpson en général	130	—
α_0 α_1 α_2 . . . α_k . . . α_n	Coefficients relatifs aux appuis 0, 1, 2 . . . n d'une poutre à n travées, et qui ne dépendent que des longueurs de travées	194	—
α α'	Les coefficients ci-dessus pour les appuis de gauche et de droite d'une travée	195	XIII
β_0 β_1 β_2 . . . β_k . . . β_n	Coefficients relatifs aux appuis n, n — 1, . . . 1, 0 d'une poutre continue à n travées, et qui ne dépendent que des longueurs de travées	194	—
β β'	Les coefficients ci-dessus pour les appuis de droite et de gauche d'une travée	195	XIII
γ	Inclinaison des diagonales sur l'horizontale (ponts à triangles)	158	—
γ	Angle des croisillons de contreventement avec l'axe du pont	—	V
Δ	Signe conventionnel pour les différences successives dans les tables	—	XI
δ	Epaisseur des côtés de cornières	108	VII
ε	Epaisseur de l'âme verticale (cisaillement longitudinal)	145	—
ζ	Fonction auxiliaire $\zeta = \sin^2 \frac{t}{2}$ dans les formules de l'aboutement	101	—
ζ	Distance des points d'inflexion fixe dans une travée de poutre continue	206	—
θ	Rapport $100 \times q:p$ de la charge permanente à la charge mobile	113	—
θ θ_0	Coefficients de réduction pour les effets du vent, compris entre 0 et 1	83	V
θ	Rapport compris entre 0 et 1 de la travée de rive aux travées intermédiaires dans les ponts à poutres continues les plus répandus	221	XVII
λ	Rapport toujours compris entre 0 et 1 entre l'accroissement de la variable et la différence d'entrée d'une table numérique	—	XI
μ	Rapport $-\frac{\alpha'}{\alpha}$ dans une travée considérée d'une poutre continue	199	XVI
ν	Rapport $-\frac{\beta}{\beta'}$ dans une travée considérée d'une poutre continue	199	XVI
ξ	Abscisse du point d'inflexion fixe de gauche, dans une travée intermédiaire d'une poutre continue, rapportée à l'appui de gauche	205	—
ξ'	Abscisse du point d'inflexion fixe de droite, dans une travée intermédiaire d'une poutre continue, rapportée à l'appui de gauche	205	—
π	Rapport connu $\pi = 3{\cdot}14159.26535$ . . de la circonférence au diamètre	100	—
ρ	Rayon de courbure en un point de la courbe funiculaire	181	—
ρ	Rayon de la voie en courbe pour le calcul de la force centrifuge	84	—
ρ	Rayon de la voie en courbe pour le calcul du sinus verse	152	—
ρ	Rayon de cercle pour le calcul des segments circulaires	132	—
Σ	Signe usuel pour la sommation simple de plusieurs termes	37	64
σ	Section d'un rivet (calcul de la distance des rivets entre âme et bande)	146	—
Ω	Surface de section dans les barres ou pièces	99	VIII
Ω_p Ω'_p Ω''_p	Aires mesurées au planimètre pour la détermination graphique des fonctions Ω m J (hyperboles)	137	—
ω	Angles des éléments des bandes avec l'horizontale	19	—
ω	Angle d'un axe quelconque sur lequel on cherche le moment d'inertie d'une section, avec le grand axe de l'ellipse centrale d'inertie	106	—

Errata:

Page 112, remarque* 1re ligne, lisez: $(\mathcal{T} - \mathcal{U}) : \mathcal{U} = 1:2$ . . . au lieu de $(\mathcal{T} - \mathcal{U}) = 1:2$

Page 241, équation (210) lisez: $\frac{T'}{l} = \frac{6\,\mathfrak{M}_A}{l^2}$ . . . . au lieu de . . . . $\frac{6\,\mathfrak{M}'_A}{l^2}$

